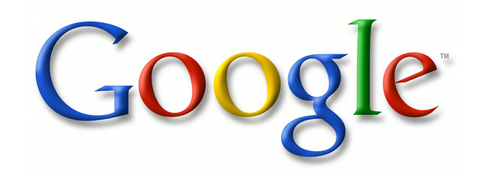
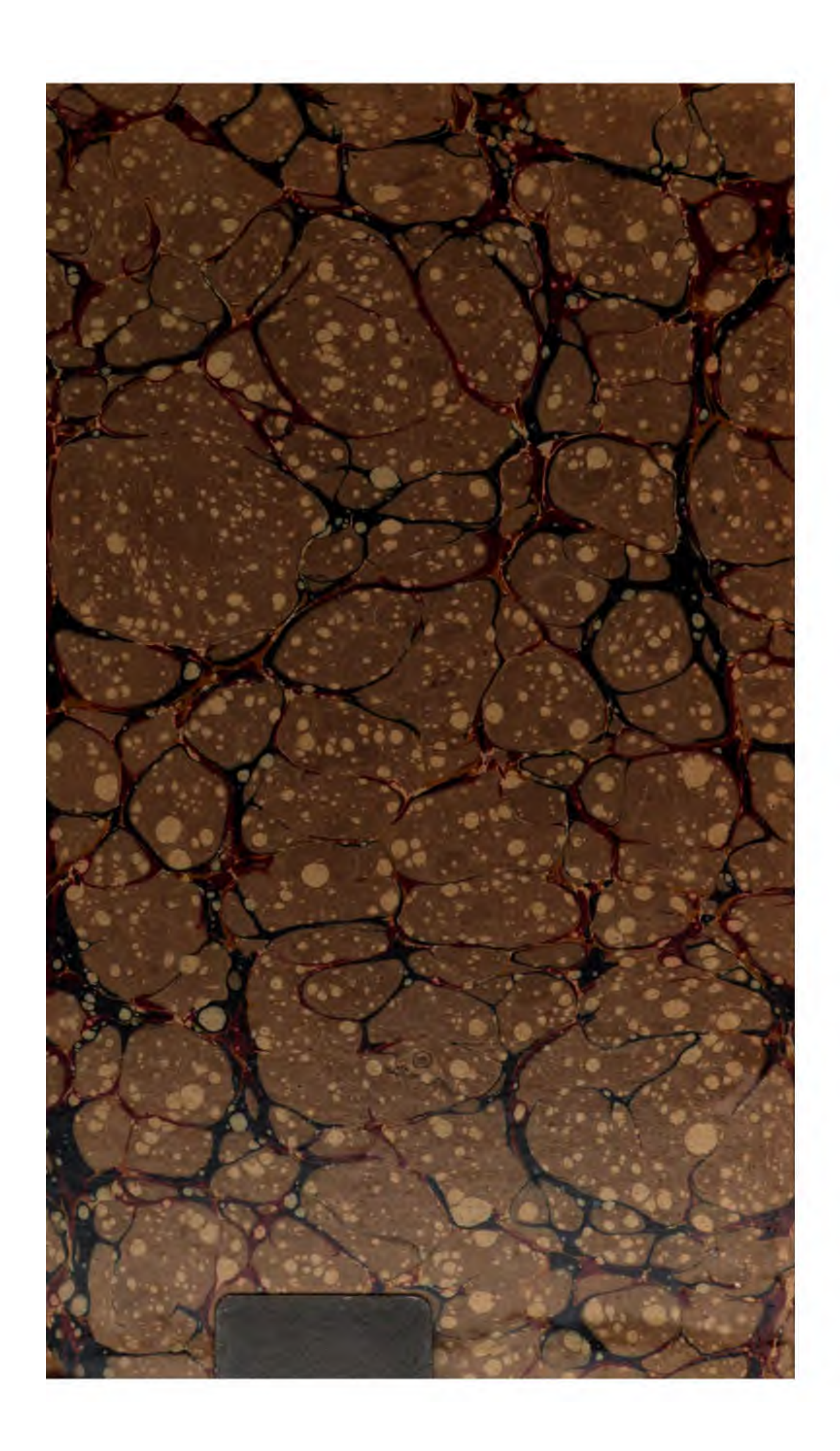
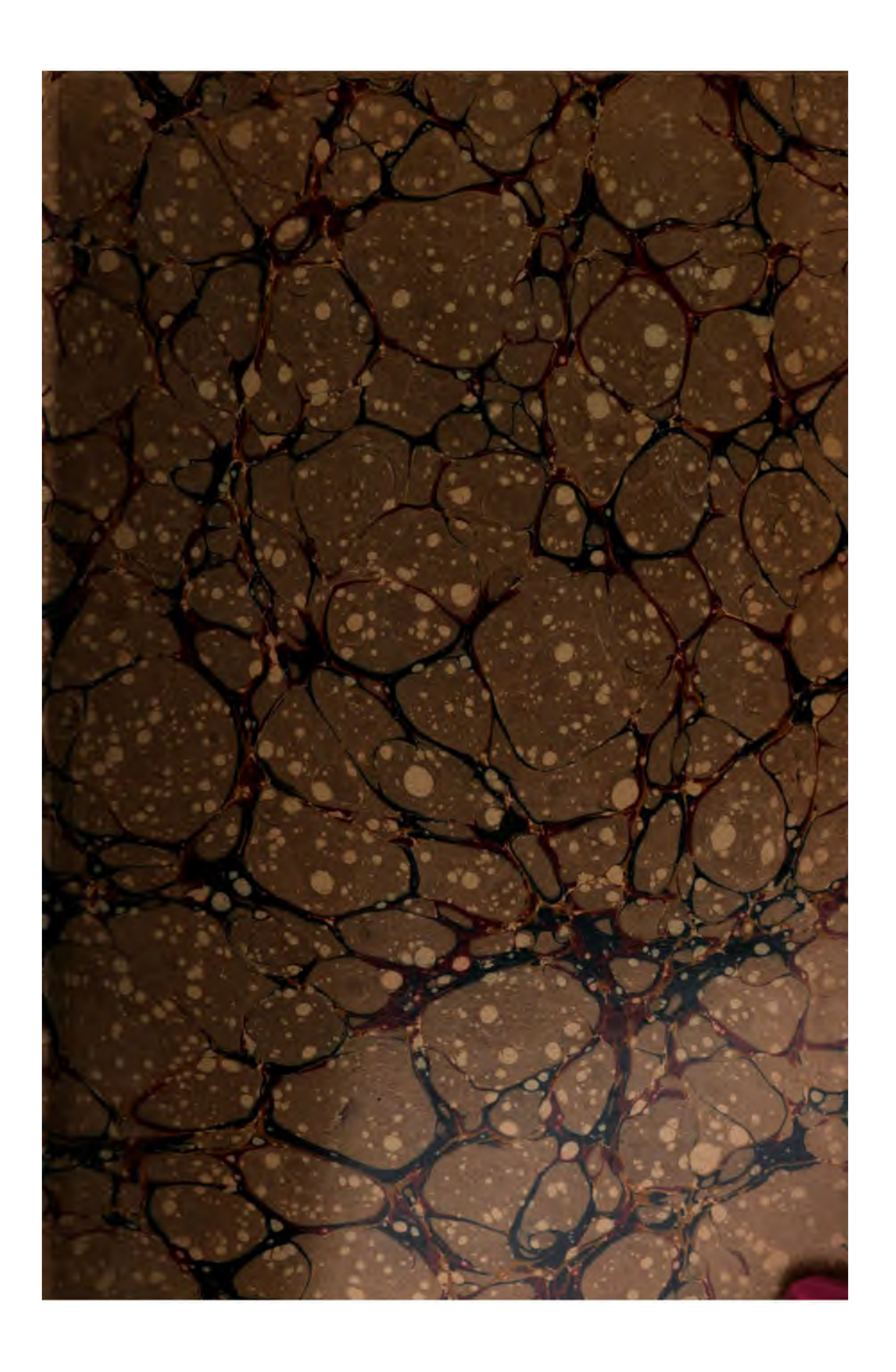





Stanford University Libraries
3 6105 001 363 105





# ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

## ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND C. RUNGE IN GÖTTINGEN.



55. BAND.

MIT VIER TAFELN UND 103 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

# Inhalt.



## Kleinere Mitteilungen.



## Büchersehau.

# Theorie der Druckkurven.

Von Dr. M. Milankovitch in Wien.

## Erstes Kapitel.

## Die Druckkurve, ihre Gleichung und ihre Eigenschaften.

### Definition der Druckkurve.

1. Es stelle $ABCD$ (Fig. 2, S. 5) einen Teil eines festen Tragkörpers dar, der sich unter dem Einflusse äußerer Kräfte — Lasten und Stützenwiderstände — und des eigenen Gewichtes im Gleichgewichte befindet.

Wir setzen voraus:

Der Tragkörper sei prismatisch, seine Erzeugenden seien senkrecht zur Bildebene, die Leitlinien $CN_1'N'B$ und $DN_1NA$ stetige Kurven (Begrenzungskurven), der Tragkörper sei homogen und sein spezifisches Gewicht sei $g$.

Die Tiefe des betrachteten Teiles des Tragkörpers, — senkrecht zur Bildebene gemessen — den wir zwischen zwei zur Bildebene parallelen Ebenen eingeschlossen denken, sei $\beta$.

Von den Lasten setzen wir voraus, daß sie alle in der Bildebene wirken, über die Begrenzungskurven kontinuierlich verteilt sind und sich von Punkt zu Punkt stetig ändern.

Anmerkung 1. Ist die Belastung des Tragkörpers keine stetige, so kann derselbe in solche Teile getrennt werden, für welche die gemachten Voraussetzungen gelten.

Denkt man sich nun einen ebenen, zur Bildebene senkrechten Fugenschnitt $NN'$ durch den Tragkörper geführt, entfernt den rechten Teil des so zerschnittenen Tragkörpers und stellt das zerstörte Gleichgewicht durch die Kraft $R$ wieder her, so nennt man die Kraft $R$ die Druckkraft des Fugenschnittes $NN'$ und ihren Angriffspunkt $E$ an dem geführten Fugenschnitte den Druckmittelpunkt des Fugenschnittes $NN'$.

Werden nun nach einem bestimmten Gesetze — nehmen wir an senkrecht zu einer gegebenen Kurve der Bildebene — unendlich viele unendlich nahe ebene Fugenschnitte durch den Tragkörper geführt

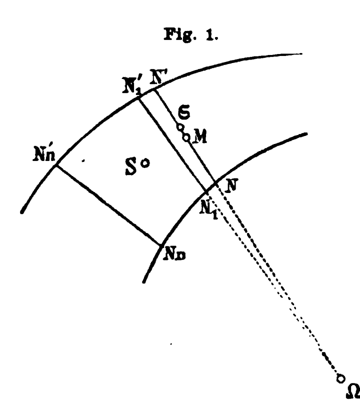
gedacht, so stellt der geometrische Ort der Druckmittelpunkte dieser Fugenschnitte die Druckkurve im Tragkörper für den gegebenen Belastungsfall und für die gewählte Art der geführten Fugenschnitte dar. Ändert sich das eine oder das andere, so ändert sich damit auch die Druckkurve.

Anmerkung 2. Bei den Stein- und Erdkonstruktionen ruft die Kraft $R$ immer einen Druck hervor und daher die Bezeichnungen: Druckkraft, Druckmittelpunkt und Druckkurve. Ruft die Kraft $R$ einen Zug hervor, so wären die Bezeichnungen: Zugkraft, Zugmittelpunkt und Zugkurve zutreffender. Um aber nicht fortwährend Doppelbezeichnungen anwenden zu müssen, so werden wir nur von Druckkräften, Druckmittelpunkten und Druckkurven sprechen und bemerken hier nur, daß die folgenden Ableitungen Gültigkeit haben auch für den Fall, wo $R$ eine Zugkraft ist.

## Allgemeine Gleichung der Druckkurve.

2. *Einleitung.* Wie schon gesagt worden ist und was aus der Definition der Druckkurve durch einfache Überlegungen gefolgert werden kann[1]), ist die Druckkurve abhängig von der Art, wie die Fugenschnitte geführt werden. Als Charakteristik für die Führung der Fugenschnitte diene eine Kurve, zu welcher senkrecht die Fugenschnitte geführt werden. Für horizontale Fugenschnitte geht diese Kurve in eine vertikale Gerade über, für vertikale Fugenschnitte in eine horizontale Gerade. Bei Gewölben, wo die Fugenschnitte senkrecht zur Gewölbsachse gelegt werden sollen, wird diese Kurve mit der Gewölbsachse selbst zusammenfallen. Die Evolute dieser Kurve hat die Eigenschaft, daß sich in ihr je zwei unendlich nahe benachbarte Fugenschnitte schneiden.

Fig. 1.




Für die vollständige Erfassung des Wesens der Druckkurven erscheint es uns notwendig, noch folgende neue Begriffe einzuführen.

Seien $NN'$ und $N_n N_n'$ (Fig. 1) zwei beliebige Fugenschnitte des Tragkörpers. Der Schwerpunkt des zwischen denselben eingeschlossenen Tragkörperteiles $NN'N_n'N_n$ sei $S$.

Rückt nun der Fugenschnitt $N_n N_n'$ in unendliche Nähe zu $NN'$, so nähert sich auch $S$ einer Grenzlage $\mathfrak{S}$ und diese Grenzlage nennen wir den Schwerpunkt der Fuge $NN'$.

1) Siehe Föppl, Theorie der Gewölbe § 7.

Die Lage von $\mathfrak{S}$ wird wie folgt bestimmt:

Stellt $N_1N_1'$ den zu $NN'$ unendlich nahen Nachbar-Fugenschnitt, der sich mit $NN'$ in $\Omega$ schneidet, $M$ den Mittelpunkt der Länge $NN'$ dar und bezeichnet man

$$\overline{NN'} = \delta \qquad \left(\overline{NM} = \frac{\delta}{2}\right) \qquad \overline{\Omega M} = \varrho,$$

so kann $\mathfrak{S}$ aufgefaßt werden als der Schwerpunkt des unendlich kleinen Viereckes $NN'N_1'N_1$, welches als die Differenz der unendlich kleinen Dreiecke $\Omega N'N_1'$ und $\Omega NN_1$ betrachtet werden kann, deren Flächen wir mit $df_1$ und $df_2$ bezeichnen. Es ist klar, daß die Schwerpunkte dieser Dreiecke um $\frac{2}{3}(\varrho + \frac{\delta}{2})$ bezw. um $\frac{2}{3}(\varrho - \frac{\delta}{2})$ von $\Omega$ entfernt sind und da die Differenz ihrer statischen Momente bezüglich $\Omega$ gleich dem statischen Momente des unendlich kleinen Viereckes $NN'N_1'N_1$ bezüglich $\Omega$ sein muß, so ist:

$$(df_1 - df_2)\overline{\Omega\mathfrak{S}} = \tfrac{2}{3}\left(\varrho + \frac{\delta}{2}\right)df_1 - \tfrac{2}{3}\left(\varrho - \frac{\delta}{2}\right)df_2.$$

Man hat ferner

$$df_1 : df_2 = \left(\varrho + \frac{\delta}{2}\right)^2 : \left(\varrho - \frac{\delta}{2}\right)^2,$$

und es folgt aus diesen zwei Gleichungen:

$$\overline{\Omega\mathfrak{S}} = \varrho + \frac{1}{12}\frac{\delta^2}{\varrho}$$

$$\overline{M\mathfrak{S}} = \frac{1}{12}\frac{\delta^2}{\varrho}.$$

Der Schwerpunkt der Fuge hat also im allgemeinen eine endliche Entfernung von der Fugenmitte und nur für die Fälle wo $\varrho = 0$, d. h. die Fugenschnitte zueinander parallel gezogen werden, oder wo $\delta = 0$, d. h. der Tragkörper unendlich dünn ist, fällt der Schwerpunkt der Fuge mit der Fugenmitte zusammen.

3. *Bezeichnungen.* Fixieren wir in der Bildebene, jetzt auch Kraftebene, ein orthogonales Koordinatensystem (Fig. 2, Seite 5), dessen Ursprung beliebig gewählt sei und dessen positive Ordinatenrichtung mit der Richtung der Schwerkraft zusammenfalle. Es bezeichne dann:

$x$, $y$ die Koordinaten des Druckmittelpunktes $E$ des beliebig gewählten Fugenschnittes $NN'$,

$\varphi$ den Winkel, den der Fugenschnitt $NN'$ mit der Vertikalen einschließt (gemessen wie in der Figur).

Wird $\varphi$ als veränderlich angenommen, so sind auch $x$ und $y$ und die folgenden mit $\varphi$ in Zusammenhang stehenden Größen veränderlich:

$R$ die Druckkraft des Fugenschnittes $NN'$,
$V$ die Vertikalkomponente von $R$,
$H$ die Horizontalkomponente von $R$,
$\delta$ die Länge $NN'$,
$M$ der Mittelpunkt des Fugenschnittes $NN'$ $(\overline{NM} = \frac{\delta}{2})$,
$\xi$ die Entfernung des Druckmittelpunktes $E$ von der Mitte des Fugenschnittes $NN'$ $(\xi = \overline{ME})$,
$\mathfrak{S}$ der Schwerpunkt der Fuge $NN'$,
$p$ die spezifische Druckbelastung der oberen Begrenzungslinien im Punkte $N'$,
$\varepsilon$ der Winkel, den diese Kraftrichtung mit der Vertikalen einschließt (gemessen wie in der Figur),
$q$ die spezifische Druckbelastung der unteren Begrenzungslinie im Punkte $N$,
$\eta$ der Winkel, den diese Kraftrichtung mit der Vertikalen einschließt (gemessen wie in der Figur).

Den früheren Voraussetzungen zufolge sind $p$, $\varepsilon$, $q$, $\eta$ stetige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $\varphi$.

Sei $N_1N_1'$ der in unendlicher Nähe zu $NN'$ geführte benachbarte Fugenschnitt, der sich mit dem letzteren im Punkte $\Omega$ schneidet und ferner:

$\varrho$ die Länge $\overline{M\Omega}$,
$d\varphi$ der zwischen den Fugenschnitten $NN'$ und $N_1N_1'$ eingeschlossene unendlich kleine Winkel $N'\Omega N_1'$,
$E_1$ der Druckmittelpunkt des Fugenschnittes $N_1N_1'$

$$\overline{E_1F} = dx \qquad \overline{FE} = dy,$$

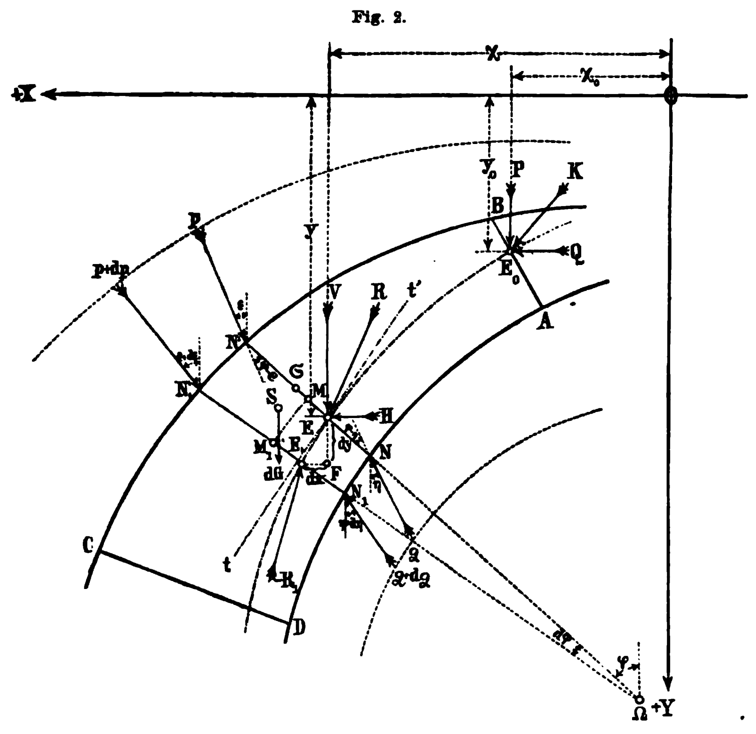
$R_1$ die Druckkraft des Fugenschnittes $N_1N_1'$,
$M_1$ der Mittelpunkt des Fugenschnittes $N_1N_1'$,
$de$ das Bogendifferential $N'N_1'$,
$du$ das Bogendifferential $MM_1$,
$di$ das Bogendifferential $NN_1$.

4 *Gleichung der Druckkurve.* Denken wir uns nun den links von $N_1N_1'$ liegenden Teil des Tragkörpers entfernt, so stellt die Kraft $-R_1$ angreifend im Punkte $E_1$ das gestörte Gleichgewicht wieder her. An dem unendlich kleinen Elemente $NN'N_1'N_1$ des Tragkörpers halten sich somit folgende Kräfte im Gleichgewicht:

1. die Druckkraft $R$ des Fugenschnittes $NN'$ angreifend im Punkte $E$, welche wir in die Komponenten $V$ und $H$ zerlegen,
2. die negativ genommene Druckkraft $R_1$ des Fugenschnittes $N_1N_1'$ angreifend im Punkte $E_1$,

3. das Gewicht $dG$ des Tragkörperelementes $NN'N_1'N_1$, welches wegen der unendlichen Annäherung von $N_1 N_1'$ an $NN'$ und gemäß den früheren Ableitungen im Schwerpunkte $\mathfrak{S}$ der Fuge $NN'$ wirkend anzunehmen ist,
4. die Belastung des Begrenzungselementes $N'N_1'$, die wegen der unendlichen Kleinheit desselben gleich $pde$ und im Punkte $N'$ angreifend zu nehmen ist,
5. die Belastung des Begrenzungselementes $NN_1$ gleich $qdi$ und angreifend im Punkte $N$.

Fig. 2.




Die ersten zwei dieser Kräfte sind im allgemeinen endlich, die übrigen drei dagegen verschwinden mit $dx$ und sind von derselben Kleinheitsordnung wie $dx$ und $dy$.

Die Summe der statischen Momente dieser fünf Kräfte bezüglich eines beliebigen Punktes der Kraftebene muß wegen des Gleichgewichtes gleich Null sein. Wählt man somit den Punkt $E_1$ zum Momentenpunkt und bezeichnet die Momente der Kräfte $dG$, $p \cdot de$, $q \cdot di$ bezüglich dieses Punktes mit $M_g$, $M_e$, $M_i$ (positiv, wenn im Sinne des Uhrzeigers drehend), so besteht die Gleichung:

$$(1) \qquad Vdx - Hdy + M_g + M_e + M_i = 0.$$

In dieser Gleichung sind alle fünf Glieder von derselben Kleinheitsordnung. Bei den ersten zwei Gliedern ist die Kraft endlich, der Arm unendlich klein, bei den übrigen Gliedern ist die Kraft unendlich klein, der Arm dagegen endlich, und alle unendlich kleinen Größen sind von derselben Kleinheitsordnung.

Wegen der unendlichen Annäherung des Punktes $E_1$ an den Punkt $E$ und der endlichen Entfernung der Kräfte $dG$, $p \cdot de$ und $q \cdot di$ von diesen Punkten sind die Entfernungen dieser Kräfte vom Punkte $E_1$ ihren Entfernungen vom Punkt $E$ gleichzusetzen.

Es ist dann, wie leicht einzusehen:

$$M_g = -dG(\overline{\mathfrak{S}M} + \mathfrak{x}) \sin\varphi,$$

wo

$$dG = g\beta \cdot \delta \cdot \varrho \cdot d\varphi.$$

Werden die Fugenschnitte zueinander parallel geführt, so ist $\varrho = \infty$, $\varrho d\varphi$ dagegen gleich der unendlich kleinen Entfernung der beiden Fugenschnitte zu setzen.

Es ist, wie im Punkt 2 abgeleitet wurde:

$$\overline{\mathfrak{S}M} = \tfrac{1}{12}\frac{\delta^2}{\varrho},$$

so daß:

$$M_g = -g \cdot \beta \cdot \delta(\tfrac{1}{12}\frac{\delta^2}{\varrho} + \mathfrak{x}) \sin\varphi \cdot \varrho d\varphi. \tag{2}$$

Es ist ferner

$$M_e = -(p de)\overline{N'E} \sin(\varphi - \varepsilon) = -p(\frac{\delta}{2} + \mathfrak{x}) \sin(\varphi - \varepsilon) de, \tag{3}$$

$$M_i = -(q di)\overline{NE} \sin(\varphi - \eta) = -q(\frac{\delta}{2} - \mathfrak{x}) \sin(\varphi - \eta) di. \tag{4}$$

Die Substitution der Gleichungen (2), (3), (4) in (1) liefert:

$$\begin{aligned} &V dx - H dy - g\beta\delta\varrho(\tfrac{1}{12}\frac{\delta^2}{\varrho} + \mathfrak{x}) \sin\varphi d\varphi - p(\frac{\delta}{2} + \mathfrak{x}) \sin(\varphi - \varepsilon) de - \\ &\quad - q(\frac{\delta}{2} - \mathfrak{x}) \sin(\varphi - \eta) di = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Ist für einen Fugenschnitt $AB$ der Druckmittelpunkt $E_0$ — dessen Koordinaten $x_0$ und $y_0$ sind — und die Druckkraft $K$ — dessen orthogonale Komponenten $P$ und $Q$ sind — gegeben, d. h. ist für

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0, \quad V = P \quad \text{und} \quad H = Q, \end{cases} \tag{6}$$

so ist, wie leicht einzusehen:

$$(7)\qquad V = P + g\beta\int_{x_0}^{x}\delta\cdot\varrho d\varphi + \int_{x_0}^{x} p\cos\varepsilon de - \int_{x_0}^{x} q\cos\eta di,$$

$$(8)\qquad H = Q - \int_{x_0}^{x} p\sin\varepsilon de + \int_{x_0}^{x} q\sin\eta di.$$

Ist die Form des Tragkörpers, die Art der Belastung und der Führung der Fugenschnitte mathematisch angegeben, so lassen sich alle in den Gleichungen (5), (7) und (8) vorkommenden Veränderlichen durch $\varphi$ und $\xi$ ausdrücken. Die Substitution der Gleichungen (7) und (8) in die Gleichung (5) und zweimalige Differentiation nach $\varphi$ liefert eine Differentialgleichung zwischen $\varphi$ und $\xi$ allein, und dies ist die Differentialgleichung der Druckkurve, welche auch auf die Koordinaten $x$ und $y$ transformiert werden kann.

Ist dieselbe integrierbar, so dienen die drei Beziehungen (6) zur Bestimmung der drei Integrationskonstanten.

Aus Gleichung (5) folgt:

$$(9)\qquad \begin{aligned}\frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H}\Big\{ & g\beta\delta\varrho\Big(\frac{1}{12}\frac{\delta^2}{\varrho} + \xi\Big)\sin\varphi\frac{d\varphi}{dx} + p\Big(\frac{\delta}{2} + \xi\Big)\sin(\varphi - \varepsilon)\frac{de}{dx} + \\ & + q\Big(\frac{\delta}{2} - \xi\Big)\sin(\varphi - \eta)\frac{di}{dx}\Big\}.\end{aligned}$$

Bezeichnet

$\psi$ den Neigungswinkel der Druckkraft $R$ zur $X$-Achse,
$\alpha$ den Neigungswinkel der Tangente $tt'$ an die Druckkurve im Punkte $E$ zur $X$-Achse, so ist offenbar:

$$(10)\qquad \frac{V}{H} = \operatorname{tang}\psi \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha.$$

Aus den Gleichungen (9) und (10) folgt, daß im allgemeinen

$$\psi \gtrless \alpha,$$

d. h. die Druckkraft schneidet die Druckkurve.

### Gewölbe-Druckkurven.

5. Die Gewölbe tragen nur eine obere Belastung, welche als vertikal wirkend angenommen wird. Es ist hier also

$$q = 0 \qquad \varepsilon = 0.$$

Außerdem führt man die Fugenschnitte senkrecht zur Gewölbsachse, entsprechend der Art der Ausführung, und um die Gesetze der

Elastizitätslehre anwenden zu können. Die Gewölbsachse ist auch der geometrische Ort der Fugenmittelpunkte. Deshalb ist hier

$\varrho$ gleichbedeutend mit dem Krümmungsradius der Gewölbsachse,
$\varphi$ gleich dem Neigungswinkel der Tangente der Gewölbsachse (im Punkte $M$) zur $X$-Achse,
$d\sigma$ gleich dem Bogendifferential der Gewölbsachse, so daß

$$\varrho \cdot d\varphi = d\sigma.$$

Die Gleichungen (9), (7) und (8) gehen deshalb für diesen Fall über in:

$$(11) \qquad \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H}\left\{g\beta\delta\left(\frac{\delta^2}{12\varrho} + \xi\right)\sin\varphi\frac{d\sigma}{dx} + p\left(\frac{\delta}{2} + \xi\right)\sin\varphi\frac{d\sigma}{dx}\right\},$$

$$(12) \qquad V = P + g\beta\int_{x_0}^{x}\delta\, d\sigma + \int_{x_0}^{x} p\, d\sigma,$$

$$(13) \qquad H = Q.$$

Gleichung (13) besagt, daß die Horizontalkomponente der Druckkraft für alle Fugenschnitte eine und dieselbe ist.

Nach der Substitution der Gleichungen (12) und (13) in die Gleichung (11) genügt eine einmalige Differentiation, um die Integralzeichen zu eliminieren. Die Differentialgleichung der Gewölbe-Druckkurve wird somit von der zweiten Ordnung sein. Dieselbe enthält schon eine Konstante $Q$. Ihr vollständiges Integral enthält demnach drei Konstanten und stellt — wofern diese nicht bestimmt sind — ein System von unendlich vielen Druckkurven dar. Die Bestimmung des partikulären Integrals, welches die in Wirklichkeit auftretende Druckkurve darstellt, kann bei Gewölben nicht auf rein statischem Wege erfolgen. Wir werden uns deshalb mit dieser Frage nicht befassen, zumal für die in dieser Abhandlung behandelten Fragen die Bestimmung der in Wirklichkeit auftretenden Druckkurve nicht notwendig ist.

[illegible] Gewölbe gleichen Widerstandes. Unter einem Gewölbe gleichen Widerstandes versteht man ein Gewölbe, welches so geformt ist, daß im gegebenen Belastungsfall:

1. die Gleichung der Gewölbsachse ein partikulares Integral der Differentialgleichung der Druckkurve ist,
2. die Stärke $\delta$ der Fugenschnitte proportional ist der zu denselben senkrechten Komponente $N$ der Druckkraft $R$.

Wenn die Bedingung 1 erfüllt, so fällt eine der Druckkurven mit der Gewölbsachse zusammen, wird diese als die in Wirklichkeit auftretende angenommen, [illegible] was übrigens aus der neuen Theorie der

Gewölbe folgt und bei Gewölben mit Gelenken ohne Zweifel der Fall ist —, so greift die Druckkraft in jedem Querschnitt zentrisch an. Die Verteilung der Normalspannung ist also in jedem Querschnitt eine gleichmäßige. Ist die Forderung 2 erfüllt, so sind die Normalspannungen in allen Querschnitten einander gleich. Das Gewölbe weist dann überall denselben Widerstand gegen Normalspannungen auf.

Die Forderung 1 wird analytisch ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\xi = 0,$$

und indem man $x$ und $y$ auch als die Koordinaten des Punktes $M$ der Gewölbsachse auffaßt. Es ist deshalb:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha \quad \varphi = \alpha \quad d\sigma = ds = \frac{dx}{\cos\varphi}.$$

Die Gleichung (11) geht dann über in:

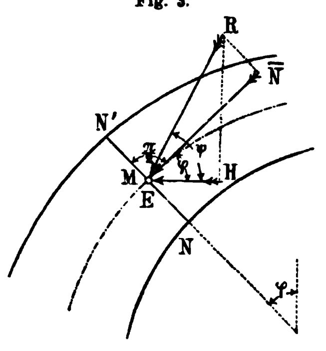
$$\frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H}\left\{\tfrac{1}{12}g\beta\frac{\delta^3}{\varrho}\operatorname{tang}\varphi + \tfrac{1}{2}p\delta\sin\varphi\frac{de}{dx}\right\}. \tag{14}$$

Die Gleichungen (12) und (13) bleiben ungeändert.

Es ist noch $\delta$ derart zu bestimmen, daß es der Forderung 2 entspricht. Wird die rechte Seite der Gleichung (14), welche als eine Funktion von $x$, $y$ und $\delta$ darstellbar ist, mit $F(x, y, \delta)$ bezeichnet, so ist bei Berücksichtigung der Gleichung (10)

$$\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\varphi = F(x, y, \delta). \tag{15}$$

Fig. 3.




Die zu dem Fugenschnitt $NN'$ normale Komponente $\overline{N}$ der Druckkraft $R$ ist, wie aus Fig. 3 zu ersehen:

$$\overline{N} = R\cos(\psi - \varphi),$$

und da

$$R = \frac{H}{\cos\psi},$$

so wird

$$\overline{N} = H\frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos\psi}. \tag{16}$$

Die Forderung 2 wird analytisch ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\delta = k \cdot \overline{N},$$

wo $k$ eine Konstante bedeutet. Es ist demnach:

$$\delta = k \cdot H\frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos\psi} = k \cdot H\{\cos\varphi + \sin\varphi\operatorname{tang}\psi\}$$

$$= k \cdot H\{\cos\varphi + \sin\varphi\,[\operatorname{tang}\varphi + F(x, y, \delta)]\},$$

so daß

$$\delta = kH\left\{\frac{1}{\cos\varphi} + \sin\varphi \cdot F(x, y, \delta)\right\}. \tag{17}$$

Die Gleichungen (14), (17), (12) und (13) führen auf zwei Differentialgleichungen zwischen den Variablen $x$, $y$, $\delta$. Ihre Integration liefert die Gleichung der Achse des Gewölbes gleichen Widerstandes und das Gesetz, nach welchem der Fugenschnitt $\delta$ variiert.

Für den Fall, wo das Gewölbe nicht überschüttet ist und nur sein Eigengewicht zu tragen hat, gehen die vier Gleichungen über in:

$$
(18) \quad \begin{cases} \dfrac{V}{H} - \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{H}\dfrac{1}{12} \cdot g\beta\dfrac{\delta^3}{\varrho}\operatorname{tang}\varphi = F_1(x, y, \delta) \\ \delta = RH\left\{\dfrac{1}{\cos\varphi} + \sin\varphi F_1(x, y, \delta)\right\} \\ V = P + g\beta\displaystyle\int_{x_0}^{x}\delta \cdot ds \qquad H = Q. \end{cases}
$$

Selbst für diesen einfachen Fall ist an eine Integration der vorstehenden Gleichungen nicht zu denken. Dieselben sind jedoch für uns wichtig, weil wir im zweiten Kapitel die Lösung des von anderen Autoren versuchten Problems der Gewölbe gleichen Wiederstandes besprechen wollen.

### Stützlinien und Kettenlinien.

7. Hat der Tragkörper nur vertikale Lasten zu tragen und werden die zur Erzeugung der Druckkurve geführten Fugenschnitte auch vertikal angenommen, wird also gesetzt:

$$\varphi = 0 \qquad s = 0 \qquad \eta = 0,$$

so geht die allgemeine Gleichung (9) über in

$$(19) \qquad \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (10) ist deshalb

$$(20) \qquad \psi = \alpha,$$

d. h. die Druckkraft berührt die Druckkurve, welche wir in diesem Falle Stützlinie nennen wollen.

Da alle Lasten vertikal wirken, so braucht nicht zwischen der oberen und unteren Belastung und dem Eigengewichte des Tragkörpers unterschieden zu werden. Es bezeichne daher $\omega = f(x)$ die spezifische Belastung der Horizontalprojektion des Tragkörpers und $\omega$ sei als Funktion von $x$ gegeben. Es ist dann:

$$(21) \qquad V = P + \int_{x_0}^{x}\omega dx, \qquad H = Q,$$

deshalb

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{Q}\left\{P + \int_{x_0}^{x} \omega\, dx\right\}. \tag{22}$$

Die Differentiation der vorstehenden Gleichung nach $x$ liefert:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\omega}{Q}. \tag{23}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Stützlinie.

Die Integration der Gleichung (22) liefert, wenn man berücksichtigt, daß für $x = x_0$ $y = y_0$,

$$y = y_0 + \frac{1}{Q}\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} w\, dx + \frac{P}{Q}(x - x_0). \tag{24}$$

Dies ist die Gleichung der Stützlinie.

8. Für eine unbelastete Strecke, wo also

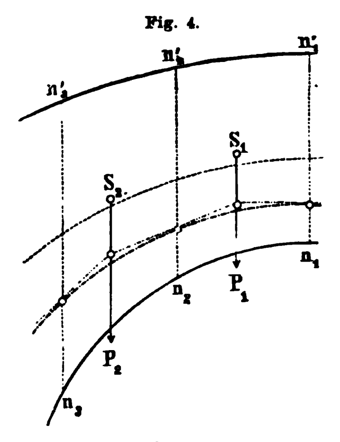
$$w = 0,$$

lautet die Gleichung der Stützlinie

$$y = y_0 + \frac{P}{Q}(x - x_0). \tag{25}$$

Die Stützlinie ist hier also eine Gerade. Wird demnach die kontinuierliche Belastung des Tragkörpers, die nach dem durch die Figur $n_1 n_2 n_3 \ldots n_1' n_2' n_3' \ldots$ veranschaulichten Gesetze über den Tragkörper verteilt ist, durch die vertikalen Schnitte $n_1 n_1'$, $n_2 n_2'$, $n_3 n_3' \ldots$ in Lamellen geteilt und durch das System der Einzellasten $P_1$, $P_2 \ldots$ ersetzt, welche in den Schwerpunkten $S_1$, $S_2 \ldots$ dieser Lamellen wirken und den Gewichten der Lamellen gleich sind, so wird die Stützlinie für diesen zweiten Fall der Belastung in ein Polygon (Stützpolygon) übergehen, dessen Eckpunkte in den Richtungslinien der Lasten $P_1, P_2 \ldots$ liegen. In den einzelnen Schnitten $n_1 n_1', n_2 n_2' \ldots$ wird das Stützpolygon die Stützlinie für die ursprüngliche Art der Belastung berühren, weil sich an diesen Stellen durch die Teilung der kontinuierlichen Last in Lamellen weder der Druckmittelpunkt noch die Druckkraft geändert hat. Das Stützpolygon ist also der ursprünglichen Stützlinie umgeschrieben.

Fig. 4.



... dünne, absolut biegsame Kette ... möglich, wenn die Druckkurve ... also die Gleichung der Kettenlinie ... der Gleichung (9) zu setzen:

$$\xi = 0;$$

$$\vartheta = 0,$$

$$\ldots = d\sigma = ds,$$

$$\ldots - \frac{dy}{dx} = 0.$$

... obwohl sie unendlich dünn ist — schwer ...

... der Kette an der Stelle $x$, $y$, so ist

$$\ldots = \int_{x_0}^{x} p \cos \varepsilon \, ds - \int_{x_0}^{x} q \cos \eta \, ds$$

$$\ldots \sin \varepsilon \, ds + \int_{x_0}^{x} q \sin \eta \, ds.$$

... (27) und (28) bestimmen die Gleichung der ... Lasten vertikal angenommen, so sind die ... und die Stützlinie einander gleich. ... Stützlinie aufgefaßt werden als labile Gleich... dünnen Kette, deren spezifische Belastung ... derselben dargestellt ist durch:

$$w = f(x).$$

... „Stützlinie" nur für den speziellen Fall ... Lasten und Fugenschnitte vertikal sind, ist ... Sind doch in der technischen Mechanik ... Wasserdruck, für Erddruck usw. eingeführt, ... vertikal wirken. In diesen Fällen muß aber ... biegsam und unendlich dünn angenommen ... diese Stützlinien auch ihrer mechanischen ... von den Kettenlinien unterscheiden. Wir ... derselben.

... Stützlinie, wie wir sie hier entwickelt haben, ... der Druckmittelpunkte vertikaler Fugen-

schnitte eines Tragkörpers, welcher nur vertikale Lasten trägt, ist auch in A. Ritter, Ingenieur-Mechanik 1899, § 119 entwickelt worden. Wenn dann in demselben Buche von Stützlinien für Erddruck, für Wasserdruck usw. die Rede ist, so entsprechen diese Stützlinien der vorher aufgestellten Definition der Stützlinie nicht.

## Zweites Kapitel.

### Die in den verschiedenen bestehenden Theorien der Druckkurven auftretenden Irrtümer.

11. Das dritte Kapitel wird einige Anwendungen der im ersten Kapitel entwickelten Theorie bringen. Wenn dieselbe Anspruch auf Würdigung erheben kann, so ist es hauptsächlich deshalb, weil sie einige irrtümliche Anschauungen, die in der Fachliteratur über die Eigenschaften der Druckkurven vorhanden sind, aufzuklären und zu beseitigen vermag.

Der Ausdruck „irrtümliche Anschauungen“ dürfte vielleicht übertrieben erscheinen. Um nun dem Vorurteil des Lesers vorzubeugen, daß wir in diesem kritischen Teile unserer Abhandlung kleinlich und mit übertriebener Pedanterie vorgehen werden, wollen wir zuerst auseinandersetzen, was wir unter Irrtum verstehen.

In der angewandten Mechanik ist nicht jene mathematische Schärfe erforderlich wie in der reinen Mechanik. Um die Probleme der angewandten Mechanik in der mathematischen Sprache ausdrücken und um dieselben mit Hilfe der Mathematik aufklären und lösen zu können, müssen hinsichtlich des Materiales, der Art der Ausführung usw. Voraussetzungen gemacht werden, welche nicht vollkommen der Wirklichkeit entsprechen. Dies muß geschehen, will man nicht auf die Hilfe der Mathematik verzichten.

Die Zuverlässigkeit der Lösung des so auf das Gebiet der Mathematik übertragenen Problems ist demgemäß der Zulässigkeit der gemachten Voraussetzungen angemessen. Je weniger diese Voraussetzungen der Wirklichkeit entsprechen, umso weniger Vertrauen verdient die Lösung des gestellten Problems, welche dann nur eine annähernde ist. Deshalb ist es zulässig, bei dem mathematischen Teile der Behandlung des Problems nicht mit absoluter mathematischer Schärfe vorzugehen und Vernachlässigungen erscheinen berechtigt, wenn man sich ihrer bewußt ist und wenn sie im Einklang stehen mit der Unvollständigkeit der gemachten Voraussetzungen und mit der praktischen Bedeutung des Problems. Deshalb sind bewußte Vernachlässigungen in der mathematischen Behandlung des Problems nicht zu den Irrtümern zu zählen.

Direkte Irrtümer entstehen unserer Ansicht nach

erstens: wenn man bei der Übertragung des Problems auf das mathematische Gebiet nicht alle Umstände richtig und mit der Wirklichkeit zusammenhängend erfaßt hat, d. h. wenn die mathematische Stilisierung des Problems unrichtig ist,

zweitens: wenn die mathematische Lösung des richtig stilisierten Problems unbewußt fehlerhaft ist. Diese Art der Irrtümer, die also rein theoretischer Natur sind und in der fehlerhaften Anwendung der Theorie bestehen, sind, unserer Ansicht nach, als schwerwiegende zu betrachten, ohne Rücksicht darauf, ob der gemachte Fehler die praktische Anwendbarkeit der Lösung des Problems in Frage stellt oder nicht. Deshalb glauben wir die praktische Zulässigkeit dieser Fehler nicht untersuchen zu müssen, denn diese kann bei einem unbewußten Fehler nur die Folge des blinden Zufalls sein; und dieselbe als Rechtfertigung für den begangenen Fehler zu betrachten, hieße die Wissenschaft profanieren; außerdem bewegen sich unsere Untersuchungen auf rein theoretischem Gebiete und berühren nicht ihre praktische Anwendung.

12. Alle in den verschiedenen Theorien der Gewölbe auftretenden Irrtümer, auf die wir hier verweisen wollen, können auf zwei verschiedene Fehler in der mathematischen Behandlung des Problems zurückgeführt werden:

erstens: das Gewicht $dG$ des unendlich dünnen Elementes $NN'N_1'N_1$ des Tragkörpers (Fig. 2, Seite 5) wird in der Mitte $M$ der Fuge $NN'$ wirkend angenommen und nicht im Schwerpunkt $\mathfrak{S}$ der Fuge, wie dies nach unseren Auseinandersetzungen im Punkte 2 zu geschehen hat,

zweitens: das statische Moment $M_g$ dieses Gewichtes bezüglich des Punktes $E_1$ der Druckkurve, mitunter auch die statischen Momente $M_e$, $M_i$ der Belastungen der Begrenzungselemente $N'N_1'$ und $NN_1$ bezüglich desselben Punktes, werden als Größen zweiter Kleinheitsordnung angenommen, was nach unseren Ableitungen im Punkte 4 falsch ist.

Die erste dieser Annahmen ist kein Fehler, wenn die Fugenschnitte parallel zu einander geführt werden, d. h. wenn $\varrho = \infty$, oder wenn die Fugenbreite $\delta$ im Verhältnis zu $\varrho$ als verschwindend klein angenommen werden kann. Dies trifft z. B. bei Ketten zu, doch darf diese Voraussetzung in keinem Buche, das Anspruch auf wissenschaftliche Strenge erheben will, verschwiegen werden.

Die zweite Annahme ist nur dann kein Fehler, wenn alle Lasten vertikal sind und die Fugenschnitte auch vertikal geführt werden, oder wenn der Tragkörper in eine unendlich dünne absolut biegsame Kette

übergeht. Wenn man diesen Fehler begeht, d. h. in der Gleichung (1) des ersten Kapitels setzt:

$$M_g = M_e = M_i = 0,$$

so folgt daraus

$$\frac{V}{H} = \frac{dy}{dx}$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichung (10)

$$\psi = \alpha,$$

was besagt, daß die Druckkraft die Druckkurve berührt. In diesen falschen Schluß, der auf die größten Absurditäten führen kann, klingen fast alle Irrtümer der Theorie der Druckkurven aus.

13. Die Erscheinungen dieser Irrtümer in allen Einzelheiten zu verfolgen, hieße einen historischen Überblick über die schon über 70 Jahre alte Theorie der Druckkurven geben, was aber weit über den Rahmen dieser Abhandlung hinausginge.[1]) Wir werden deshalb nur die wichtigsten Momente dieser merkwürdigen Erscheinung besprechen und nur jene Werke in Betracht ziehen, in welchen diese Irrtümer am deutlichsten hervortreten und von welchen als rein theoretischen Werken die wissenschaftliche Strenge gefordert werden muß.

Hagen behandelte in einer der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlung[2]) das Problem des Gewölbes gleichen Widerstandes, welches wir im Punkte 6 ausführlich behandelt haben. Im mathematischen Teile der Behandlung dieses Problems nimmt Hagen als selbstverständlich an, daß die Druckkraft die Druckkurve berührt.[3]) Dies ist nur dann richtig, wenn das Gewölbe unendlich dünn ist und mit einer Kette verglichen werden kann. Da aber das Problem der Kette gleichen Widerstandes schon im Jahre 1826 vollständig gelöst worden ist, so kann der Abhandlung von Hagen entweder Mangel an wissenschaftlicher Strenge oder Mangel an Originalität vorgeworfen werden. In der umgearbeiteten und er-

1) Über einige Irrtümer, die vor dem Jahre 1857 begangen worden sind und insofern sie als Irrtümer erkannt worden sind, siehe Scheffler: Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig 1857.

2) Hagen: Über Form und Stärke der gewölbten Bogen. Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin (Mathematische Abhandlungen) 1844.

3) Bei Anwendung der von uns gewählten Bezeichnungen heißt es dort (S. 63): „Der Winkel $\psi$, den die Druckkraft mit der Horizontalen einschließt, bezeichnet schon die Richtung der an den Punkt $E$ der Druckkurve gezogenen Tangente.“

weiterten zweiten Auflage dieser Abhandlung wiederholen sich dieselben Fehler.[1])

**Résal** unternahm es, die Differentialgleichung der Druckkurve aufzustellen[2]), beging aber dabei den groben Fehler, daß er ausdrücklich behauptete, das Glied $Mg$ der Gleichung (1) (Punkt 4) sei eine Größe zweiter Kleinheitsordnung und somit zu vernachlässigen.[3]) Nachdem es ihm infolge dieses Irrtums nicht gelungen ist, die Gleichung der Druckkurve des kreisförmigen Gewölbes von konstanter Stärke abzuleiten, schließt er daraus, daß die Gleichungen der Druckkurven auf höhere Transzendenten führen.[4])

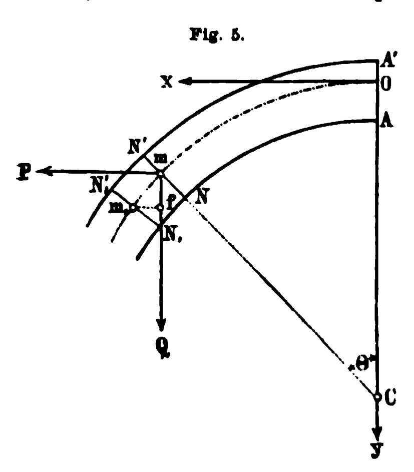
Einen so ausgesprochenen Fehler, wie den soeben angeführten, wird man schwerlich anderswo finden, doch kehren dieselben Fehler in der Fachliteratur immer wieder, sind aber durch die daraus abgeleiteten Folgerungen mehr oder weniger verdeckt. Selbst so einfache Beziehungen, wie die im Punkte 8 abgeleiteten, sind nicht immer richtig erfaßt worden. Wir verweisen diesbezüglich auf eine Stelle in

1) **Hagen**: Über Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin 1862. Wenn wir unsere Bezeichnungen beibehalten, so finden sich dort die Gleichungen (S. 42 ff. und S. 50 ff.)

$$\frac{V}{H} = \operatorname{tang}\varphi, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi.$$

2) **Résal**: Traité de mécanique générale. Paris 1873—1889 (Tome 6, § 238).

Fig. 5.




3) Die Ableitung von **Résal** ist die folgende: Soient $NN'$, $N_1N_1'$ deux joints consécutifs, $mm_1$ les points correspondants d'une courbe des pressions, $O$ l'intersection de cette courbe avec la direction $A'Ay$ du joint de la clef, $Ox$ l'horizontale de ce point, $f$ la projection de $m_1$ sur la direction de $Q$. — Conservons d'ailleurs les notations précédentes; on a $m_1f = dx$, $mf = dy$. La pression exercée sur $NN'$ est la résultante de $P$ et du poids $Q$ de $NN'AA'$ ces deux forces étant censées appliquées en $m$. — Pour trouver la position $m_1$ il suffit d'exprimer que la somme des moments de $P$ et $Q$ et du poids de $NN'N_1N_1'$ par rapport à ce point est nulle. Or *le moment de ce dernier poids étant du second ordre*, on a simplement:

$$Pdy = Qdx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}.$$

4) Siehe die Fußnote auf S. 20.

Föppls Theorie der Gewölbe.[1]) Auch in einem ganz modernen Werke[2]) können Fehler in der analytischen Behandlung der Druckkurven nachgewiesen werden.

Wir glauben, daß die angeführten Belege genügen, um unsere Behauptung zu rechtfertigen, daß in der Fachliteratur die Beziehung der Druckkraft zur Druckkurve nicht vollständig ergründet war.

14. Es soll noch hervorgehoben werden, daß die fehlerhafte Annahme, daß die Druckkraft die Druckkurve berühre, nicht von dem Begründer der Theorie der Druckkurven Moseley herrührt, der in dieser Frage klar gesehen hat[3]), und es hat auch später nicht an Stimmen gefehlt, die auf die Irrtümlichkeit dieser Annahme hingewiesen haben. Hauptsächlich war es Scheffler, der — offenbar beeinflußt von dem Werk Moseleys, welches er ins Deutsche übersetzte — die Irrtümlichkeit dieser Annahme zu beweisen suchte.[4]) Wenn trotzdem diese Irrtümer aus der Theorie der Druckkurven nicht verschwunden sind und noch heute wiederkehren, so hat diese Erscheinung, unserer Ansicht nach, folgende Erklärung: Scheffler und alle, welche seine Einwendungen wiederholt haben[5]), haben doch nicht das Wesen des in Rede stehenden Irrtums vollständig klar erfaßt und weisen nur auf das Absurde der gemachten Annahme hin. Der

1) Föppl: Theorie der Gewölbe. Leipzig 1881. S. 10. — „Bei der analytischen Behandlung der Gewölbe nimmt man gewöhnlich an, das Gewölbe bestehe aus unendlich vielen unendlich dünnen Wölbsteinen. Die Druckkurve geht dadurch in eine stetig gekrümmte Linie über. Die einer endlichen Fugeneinteilung zugehörige, der vorigen entsprechende Drucklinie ist ein derselben eingeschriebenes Polygon." — Hier steckt ein doppelter Fehler. Das Polygon ist ein umgeschriebenes und zwar nur dann, wenn vertikale Fugenschnitte vorausgesetzt werden.

2) Résal: Stabilité des constructions. Paris 1901. — Dort heißt es, unter Beibehaltung unserer Bezeichnungen und obwohl die Fugenschnitte nicht parallel zueinander geführt werden (S. 549 ff.): „La condition de coïncidence de la courbe des pressions et de la fibre moyenne nous fournit la relation:

$$\frac{V}{dy} = \frac{H}{dx}.$$

3) Siehe z. B. H. Moseley: Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur, übers. v. H. Scheffler. Braunschweig 1845. — In diesem Werke wird hervorgehoben, daß die Druckkraft die Druckkurve (line of resistance) schneidet und der Begriff der Enveloppe der Druckkraftrichtungen (line of pressure) wird eingeführt.

4) Scheffler: Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig 1857.

5) z. B. Herrmann bei der Bearbeitung der Ingenieur- und Maschinenmechanik von Weisbach; Föppl in seinen Vorlesungen über technische Mechanik.

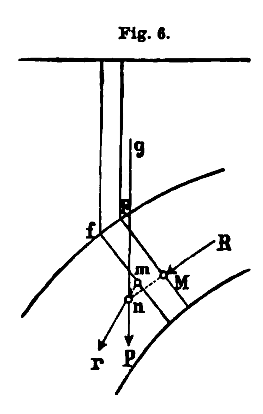
Schefflersche Beweis, daß die Druckkraft die Druckkurve schneidet, drückt sich in der Behauptung aus, daß die Druckkurve (er nennt sie Stützlinie) nicht mit der Enveloppe der Druckkräfte-Richtungen (welche er Kettenlinie nennt) zusammenfällt[1]), was übrigens schon Moseley klar ausgesprochen hat. Diesen Beweis liefert Scheffler nur für den Fall, wo das Gewölbe überschüttet ist, und man ist fast verleitet zu glauben, daß er bei einem unüberschütteten Gewölbe, insbesondere bei einem solchen, welches nach der Druckkurve gekrümmt ist, die Richtigkeit der Annahme, daß die Druckkraft die Druckkurve berühre, schweigend zugibt. Daß man seine Ableitung in diesem Sinne verstanden hat, zeigt die Wiedergabe des Schefflerschen Beweises in der von Herrmann umgearbeiteten Ingenieur- und Maschinenmechanik von Weisbach[2]), wo das Gewölbe notwendig überschüttet vorausgesetzt wird, damit der Beweis geliefert werden kann. Scheffler hat auch die von uns im Punkte 13 als irrtümlich bezeichnete Behauptung von Hagen nicht bestritten, obwohl er dessen Abhandlung einer eingehenden Kritik unterzogen hat.

Die korrekteste von den bestehenden Theorien der Druckkurven ist wohl die von Dupuit[3]), welche sich aber auf ganz spezielle Fälle beschränkt. Die von Dupuit abgeleitete Differentialgleichung der

---

1) Scheffler: Theorie der Gewölbe. S. 216: Stellt man sich das auf die Fuge $EF$ folgende Element $EFfe$ des Gewölbbogens *mit seiner Belastung* vor, und ist $gp$ die durch den Schwerpunkt dieses Elementes vom Gewichte $p$ gezogene Vertikale, welche doch nicht gerade durch den Punkt $M$ zu gehen braucht, ferner $n$ der Durchschnittspunkt dieser Vertikalen mit der Richtung $RM$ der gegen die Fuge $EF$ wirkenden Pressung $R$, endlich $rn$ die von $RM$ unendlich wenig verschiedene Resultante der beiden Kräfte $R$ und $p$, welche die Fuge $ef$ in dem Punkte $m$ durchschneiden mag; so werden $M$ und $m$ zwei aufeinanderfolgende Punkte der in eine stetige Kurve übergehenden Stützlinie $Mm \ldots$ sein; dagegen wird der den Punkten $M$ und $m$ entsprechende Anfangspunkt des in eine stetige Kettenlinie übergehenden Seilpolygons der Punkt $n$ sein, welcher keineswegs zwischen $M$ und $m$ fällt und von beiden einen *endlichen* Abstand hat. Demnach wird die stetige Stützlinie nicht allein eine von der Kettenlinie *endlich* verschiedene Form haben, sondern die korrespondierenden Punkte der letzteren werden auch um *endliche* Abstände aus den betreffenden Fugenschnitten herausrücken.

Fig. 6.




2) Vergleiche Weisbach, Ingenieur- und Maschinenmechanik, 5. Auflage, bearbeitet von Herrmann, Statik der Bauwerke, S. 102.

3) Dupuit: Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie. 1870.

Druckkurve entspricht dem speziellen Fall eines Gewölbes, welches nur sein Eigengewicht trägt, und ist auf allgemeinere Fälle nicht anzuwenden. Ohne infinitesimale Betrachtungen über den Schwerpunkt des unendlich dünnen Tragkörperteiles war der Kern der ganzen Frage: die *mathematischen* Eigenschaften der Druckkurven, welche allein die Frage vollständig beleuchten können, nicht zu erfassen. Deshalb kehrten die Fehler in der Theorie der Druckkurven immer wieder.

## Drittes Kapitel.

## Anwendungen und Beispiele.

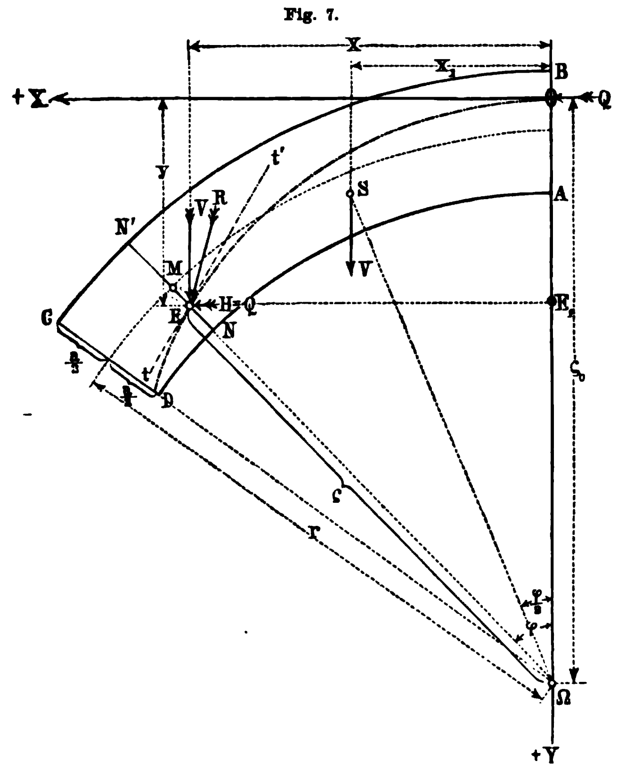
### Druckkurve im unbelasteten Kreisgewölbe von konstanter Stärke.

15. Wir wollen hier die Gleichung der Druckkurve des unbelasteten Kreisgewölbes von konstanter Gewölbstärke ableiten. Zu diesem Behufe bezeichne:

$r$ den Radius der Bogenachse,

$a$ die konstante Gewölbstärke.

Fig. 7.




Der Ursprung des Koordinatensystems sei in den Druckmittelpunkt $O$ der Scheitelfuge $AB$ gelegt, dessen Entfernung vom Zentrum $\Omega$ der Bogenachse wir mit $\varrho_0$ bezeichnen. Sonst sollen die Bezeichnungen wie im Punkte 3 beibehalten werden und es sei angenommen: $\beta = 1$, $g = 1$.

Wegen der Symmetrie des Gewölbes wird die Druckkraft der Scheitelfuge $AB$ nur die horizontale Kraft $Q$ sein, so daß für $x = 0$:

$$y = 0 \qquad V = P = 0 \qquad H = Q.$$

Man hat also in die Gleichungen (11), (12) und (13) des Punktes 5 einzusetzen:

$$g = 1 \quad \beta = 1 \quad \delta = a \quad \varrho = r \quad p = 0 \quad d\sigma = r d\varphi \quad P = 0,$$

welche dann übergehen in:

(1) $$\frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} ar\left(\frac{1}{12}\frac{a^2}{r} + \xi\right) \sin\varphi \frac{d\varphi}{dx},$$

(2) $$V = ar \int_0^\varphi d\varphi = \operatorname{arc}\varphi,$$

(3) $$H = Q.$$

Geht man zu Polarkoordinaten über und wählt den Mittelpunkt $\Omega$ der Bogenachse zum Pol, die $(-Y)$-Achse zur Polachse und bezeichnet die Polarkoordinaten des Punktes $E$ durch:

$$\overline{\Omega E} = \varrho \qquad \sphericalangle\, O\Omega E = \varphi,$$

so ist:

$$y = \varrho_0 - \varrho\cos\varphi \qquad x = \varrho\sin\varphi,$$

(4) $$dy = -\cos\varphi\, d\varrho + \varrho\sin\varphi\, d\varphi,$$

(5) $$dx = \sin\varphi\, d\varrho + \varrho\cos\varphi\, d\varphi.$$

Auch hat man:

$$\xi = r - \varrho.$$

Werden die Gleichungen (2), (3), (4), (5) und (6) in die Gleichung (1) eingesetzt, so gelangt man zu der Gleichung:

(7) $$\varrho(ar\varphi\cos\varphi\, d\varphi + ar\sin\varphi\, d\varphi - Q\sin\varphi\, d\varphi) + (ar\varphi\sin\varphi + Q\cos\varphi)\, d\varrho = \\ = \tfrac{1}{12} a(a^2 + 12r^2)\sin\varphi\, d\varphi.$$

Diese Differentialgleichung ist eine exakte[1]); beiderseits stehen vollständige Differentiale, und ihre Integration liefert:

(8) $$\varrho(ar\varphi\sin\varphi + Q\cos\varphi) = -\tfrac{1}{12} a(a^2 + 12r^2)\cos\varphi + C$$

---

1) Die von Résal fehlerhaft abgeleitete Differentialgleichung der Druckkurve lautet, wenn wir unsere Bezeichnungen anwenden (Résal: Traité de mécanique générale, Tome 6, § 238)

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{ar\varphi\cos\varphi - Q\sin\varphi}{ar\varphi\sin\varphi + Q\cos\varphi}.$$

Dann heißt es weiter:

„Si l'on remarque que

$$ar\varphi\cos\varphi - Q\sin\varphi = \frac{d}{d\varphi}(ar\varphi\sin\varphi + Q\cos\varphi) - ar\sin\varphi$$

für $\varphi = 0$ ist $\varrho = \varrho_0$, so daß:

$$\varrho_0 Q = -\tfrac{1}{12}a(a^2 + 12r^2) + C, \tag{9}$$

$$\varrho(ar\varphi \sin\varphi + Q\cos\varphi) = \varrho_0 Q + \tfrac{1}{12}a(a^2 + 12r^2)(1 - \cos\varphi) =$$
$$= \varrho_0 Q + \tfrac{1}{6}a(a^2 + 12r^2)\sin^2\frac{\varphi}{2}\,.$$

Es lautet demnach die Polargleichung der Druckkurve:

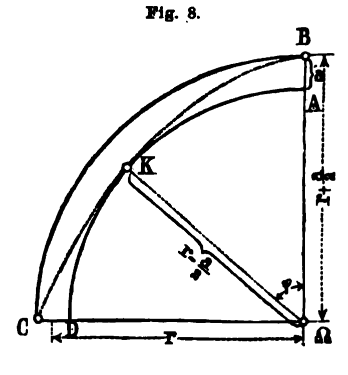
$$\varrho = \frac{\varrho_0 Q + \frac{1}{6}a(a^2 + 12r^2)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{Q\cos\varphi + ar\varphi\sin\varphi}\,. \tag{10}$$

16. Die gewonnene Gleichung der Druckkurve kann man benutzen, um die *mathematische Stärke* des behandelten Gewölbes zu bestimmen. Unter mathematischer Stärke versteht man jene minimale Stärke, bei welcher das Gewölbe noch stabil sein kann, d. h. bei welcher gerade noch eine Druckkurve ganz innerhalb des Gewölbequerschnittes verläuft.

A. Ritter[2]), Pilgrim[3]) und andere haben sich mit dieser Frage befaßt, deren Lösung wir hier als Anwendung der entwickelten Theorie anführen, um zu zeigen, daß die Frage ohne Schwierigkeit direkt gelöst werden kann.

Wir werden die mathematische Stärke eines Halbkreisgewölbes bestimmen und bemerken, daß die mathematische Stärke eines Segmentgewölbes nach demselben Vorgang bestimmt wird.

Fig. 8.




Nach den Untersuchungen der beiden genannten Autoren geht die der mathematischen Stärke entsprechende Druckkurve durch die äußeren Punkte $B$ und $C$ der Scheitel- und Kämpferfuge, und da sie die einzige sein soll, die ganz innerhalb des Gewölbequerschnittes verläuft, so hat man dem Gewölbe jene Stärke $a$ zu geben, daß die Druckkurve den Intradoskreis berührt. Ist $K$ der Berührungspunkt, so nennt man den Winkel $A\Omega K$ den *Bruchwinkel.*

la formule précédente peut se mettre sous la forme suivante:

$$\log_n \frac{\varrho}{\varrho_0}(ar\varphi\sin\varphi + Q\cos\varphi) = ar\int\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{ar\varphi\sin\varphi + Q\cos\varphi}\,.$$

Comme cette intégrale paraît irréductible, on voit que les courbes des pressions seront généralement transcendantes dont le tracé, si facile par la géometrie, présentera des complications sérieuses en ayant égard à leurs équations dont la considération devient pour ainsi dire complètement inutile".

2) A. Ritter, Lehrbuch der Ingenieurmechanik. Leipzig 1899.

3) Pilgrim, Theorie der kreisförmigen symmetrischen Tonnengewölbe von konstanter Dicke, die nur ihr eigenes Gewicht tragen. Stuttgart 1877.

Um also für diesen Fall die Stärke $a$ und den Bruchwinkel $A\Omega K$ zu bestimmen, wird man folgendermaßen vorgehen:

Die Gleichung der Druckkurve ist nach früherem

(10) $$\varrho = \frac{\varrho_0 Q + \frac{1}{6} a(a^2 + 12 r^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{Q \cos \varphi + a r \varphi \sin \varphi},$$

und da die Druckkurve durch die Punkte $B$ und $C$ gehen soll, so wird für $\varphi = 0$

(11) $$\varrho = r + \frac{a}{2}, \qquad \text{d. h.} \qquad \varrho_0 = r + \frac{a}{2},$$

für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

(12) $$\varrho = r + \frac{a}{2}, \qquad \text{d. h.} \qquad Q = \frac{3\pi a r(a + 2r) - a(a^2 + 12r^2)}{3a + 12r}.$$

Die Werte für $\varrho_0$ und $Q$ aus (11) und (12) in (10) eingesetzt:

$$\varrho = \frac{3\pi r(a + 2r)^2 - (a + 2r)(a^2 + 12r^2) \cos \varphi}{6\pi r(a + 2r) \cos \varphi - 2(a^2 + 12r^2) \cos \varphi + 12 r(a + 2r) \varphi \sin \varphi}.$$

Setzt man:

(13) $$\frac{a}{r} = n,$$

so ist

$$\varrho = \frac{r}{2}(n + 2) \frac{3\pi(n + 2) - (n^2 + 12) \cos \varphi}{3\pi (n + 2) \cos \varphi - (n^2 + 12) \cos \varphi + 6(n^2 + 2) \varphi \sin \varphi}.$$

Setzt man außerdem:

(14) $$3\pi (n + 2) - (n^2 + 12) \cos \varphi = Z,$$

(15) $$3\pi (n + 2) \cos \varphi - (n^2 + 12) \cos \varphi + 6 (n^2 + 2) \varphi \sin \varphi = N,$$

so ist:

(16) $$\varrho = \frac{r}{2}(n + 2) \frac{Z}{N}.$$

Die mathematische Stärke $a$ ist derart zu bestimmen, daß das Minimum von $\varrho$ gleich ist dem Radius des Intradoskreises, d. h.

(17) $$\text{für } \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = 0 \qquad \text{soll} \qquad \varrho = r - \frac{a}{2} = -\frac{r}{2}(n - 2)$$

sein. Diese zwei Gleichungen bestimmen die mathematische Stärke des Gewölbes:

$$a = nr$$

und den Bruchwinkel $\varphi$.

Die beiden Gleichungen (17) lauten mit Rücksicht auf (16)

$$(18)\quad \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = \frac{r}{2}(n+2)\frac{N\frac{\partial Z}{\partial \varphi} - Z\frac{\partial N}{\partial \varphi}}{N^2} = 0 \quad \text{oder} \quad N\frac{\partial Z}{\partial \varphi} - Z\frac{\partial N}{\partial \varphi} = 0,$$

$$(19)\quad \varrho = -\frac{r}{2}(n-2) = \frac{r}{2}(n+2)\frac{Z}{N} \quad \text{oder} \quad -(n-2)N = (n+2)Z.$$

Die Gleichungen (18) und (19) können ersetzt werden durch die Gleichungen:

$$(n+2)\frac{\partial Z}{\partial \varphi} + (n-2)\frac{\partial N}{\partial \varphi} = 0,$$

$$(n+2)Z + (n-2)N = 0.$$

Durch Einsetzung der Werte für $Z$ und $N$ aus (14) und (15) gelangt man zu den Gleichungen:

$$(20)\quad 3\pi(n+2)^2 - (2n^3 - 3\pi n^2 + 24n + 12\pi)\cos\varphi + 6(n^2-4)\varphi\sin\varphi = 0,$$

$$(21)\quad 6(n^2-4)\sin\varphi + (2n^3 - 3\pi n^2 + 24n + 12\pi)\sin\varphi + 6(n^2-4)\varphi\cos\varphi = 0.$$

Wird die Gleichung (20) mit $\sin\varphi$, Gleichung (21) mit $\cos\varphi$ multipliziert und werden beide Gleichungen addiert, so folgt:

$$\pi(n+2)\sin\varphi + (n-2)\sin 2\varphi + 2(n-2)\varphi = 0,$$

woraus:

$$(22)\qquad n = 2\frac{2\varphi + \sin 2\varphi - \pi\sin\varphi}{2\varphi + \sin 2\varphi + \pi\sin\varphi}.$$

Aus der Gleichung (21) folgt:

$$(23)\qquad 2n\frac{n^2+12}{n^2-4} - 3(\pi - 2) + 6\varphi\operatorname{cotg}\varphi = 0.$$

Substituiert man den Wert für $n$ aus (22) in die Gleichung (23), so bekommt man eine Gleichung mit der einen Unbekannten $\varphi$, woraus man bestimmt:

$$\varphi = 54^\circ 29'.$$ [1]

Dann folgt aus (22)

$$n = \frac{a}{r} = 0{,}1075.$$

## Beispiele.

17. Man konstruiere ein unbelastetes Gewölbe, welches den Forderungen genügt: 1. eine seiner Stützlinien falle mit der Gewölbsachse zusammen, 2. die Breite $\delta$ der vertikal zu führenden Fugenschnitte sei

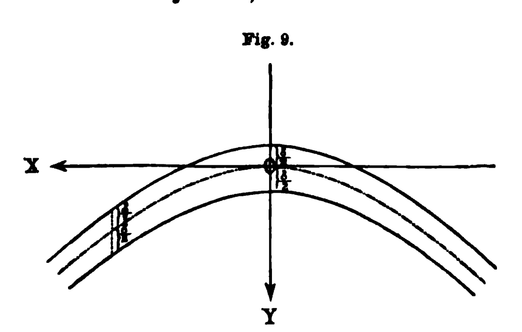
1) Ritter gibt an $\varphi = 54^\circ 10'$, Pilgrim gibt an $\varphi = 54^\circ 27'$. Die Werte für $n$ stimmen bei beiden Autoren mit den unserigen überein.

proportional der zu denselben senkrecht gerichteten Komponente $N$ der Druckkraft $R$.

Wählt man die Scheitelmitte des Gewölbes zum Ursprung des Koordinatensystems, so ist für $x = 0$

$$y = 0, \qquad P = 0, \qquad H = Q$$

Fig. 9.




und mit Rücksicht auf die Gleichungen (19) und (21) des Punktes 7 ist:

$$\frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = 0, \qquad V = \int_{x_0}^{x} \delta\, dx,$$

$$H = Q = N,$$

also

$$\delta = kN = k \cdot Q,$$

wo $k$ eine Konstante bedeutet. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$k \int_{x_0}^{x} dx = kx = \frac{dy}{dx}.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert, wenn man berücksichtigt, daß für $x = 0$, $y = 0$:

$$y = kx^2.$$

Die Gewölbsachse ist also eine Parabel. Die Begrenzungskurven sind kongruente Parabeln, welche gegen die Gewölbsachse vertikal verschoben sind (Asymptotische Parabeln).

Fig. 10.

18. Es stellte $ABCD$ das Profil einer Talsperre dar. Deren hintere Begrenzungslinie $AD$ ist eine vertikale Gerade. Man bestimme die vordere Begrenzungslinie $BN'C$ derart, daß bei gefülltem Becken und Belastung der Krone durch die Last $K$ die Druckkurve durch die linksseitigen Drittelpunkte (Kernpunkte) der horizontal zu führenden Fugenschnitte hindurchgehe.

Legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt $A$. Ist dann:

$$x = f(y)$$

die Gleichung der Druckkurve, so ist

$$x' = \tfrac{3}{2} f(y)$$

die Gleichung der vorderen Begrenzungslinie.

Das spezifische Gewicht des Talsperre-Materiales sei $g$; das spezifische Gewicht des Wassers und die Tiefe $\beta$ des betrachteten Teiles der Talsperre gleich eins. Der spezifische horizontalgerichtete Wasserdruck im Punkte $N$ ist gleich $y$. Es ist also in den Gleichungen (5), (7) und (8) des Punktes 4 zu setzen:

$$\beta = 1, \quad \vartheta = \tfrac{3}{2}x, \quad \varrho = \infty, \quad \varrho d\varphi = dy, \quad \xi = \tfrac{3}{4}x - x = -\tfrac{1}{4}x,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad p = 0, \quad q = y, \qquad \eta = \frac{\pi}{2}, \quad di = dy, \quad y_0 = 0$$

Diese Gleichungen lauten dann:

$$Vdx - Hdy + \tfrac{3}{8}gx^2dy = 0.$$

$$V = P + \tfrac{3}{2}g\int_0^y xdy,$$

$$H = Q + \int_0^y ydy = Q + \tfrac{1}{2}y^2.$$

Werden die Werte für $V$ und $H$ aus den zwei letzten Gleichungen in die vorhergehende eingesetzt und wird diese nach $x$ differentiiert, so gelangt man zur Differentialgleichung der Druckkurve:

$$(8Q - 3gx^2 + 4y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 8y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 18gx\frac{dy}{dx} = 0.$$

Es gelang uns nicht, das vollständige Integral dieser Gleichung zu bestimmen. Eines ihrer partikularen Integrale und zwar für die Werte:

$$x_0 = 0, \qquad P = 0, \qquad Q = 0$$

lautet:

$$y = \tfrac{3}{2}\sqrt{g}x.$$

Es lautet also die Gleichung der vorderen Begrenzungslinie:

$$y = \sqrt{g}x.$$

19. Die soeben gewonnene partikulare Lösung der behandelten Aufgabe zeigt folgende Eigentümlichkeiten:

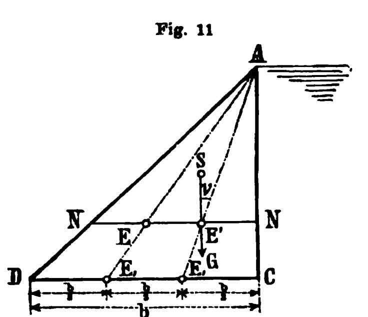
Das Profil der Talsperre ist in diesem Falle ein rechtwinkliges Dreieck $ADC$, für welches:

$$\operatorname{tang} \sphericalangle CAD = \frac{1}{\sqrt{g}}.$$

Die Druckkurve ist bei gefülltem Becken die Gerade $AE_1$, wo $E_1$ im linken Drittelpunkte der Basis $DC$ liegt.

Ist das Becken nicht gefüllt, so daß die Talsperre nur ihrem Eigengewichte unterworfen ist, so geht die Druckkraft $G$ des beliebigen Fugenschnittes $NN'$, d. h. das Gewicht des Dreieckes $NN'A$ durch den rechten Drittelpunkt $E'$ dieses Fugenschnittes. In diesem Falle ist also die Gerade $AE_1'$ die Druckkurve, wobei $E_1'$ im rechten Drittelpunkte der Basis $DC$ liegt.

Fig. 11




Der Winkel $\nu$, den die Druckkraft $G$ eines beliebigen Fugenschnittes mit der Druckkurve einschließt, ist in diesem Falle konstant und gleich:

$$\nu = \sphericalangle\, CAE_1'.$$

Dieser Winkel kann $\left(\text{unter der Einschränkung } -\frac{\pi}{2} < \nu < \frac{\pi}{2}\right)$ mit der Vergrößerung der Basis $CD$ beliebig groß gemacht werden, was deutlich zeigt, wie fehlerhaft die Annahme ist, daß die Druckkraft die Druckkurve berühre.

20. Hat der Tragkörper solch eine Form, daß der Schwerpunkt des zwischen zwei beliebigen Fugenschnitten eingeschlossenen Teiles und die Mittelpunkte der Belastungen desselben bestimmt werden können, so läßt sich die Gleichung der Druckkurve direkt aufstellen und die Aufstellung ihrer Differentialgleichung kann umgangen werden.

So könnte die Gleichung der Druckkurve des im Punkte 15 behandelten Gewölbes auch wie folgt aufgestellt werden:

Ist (Fig. 7, S. 19) $S$ der Schwerpunkt von $ABN'N$ ($x_1$ dessen Abszisse), in welchem Punkte man sich das Gewicht $V$ von $ABN'N$ wirkend denken kann, so folgt wegen des Gleichgewichtes des Tragkörperteiles $ABN'N$ die Momentengleichung bezüglich $E$:

$$V(x - x_1) - Q \cdot y = 0.$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist

$$\overline{\Omega S} = \frac{1}{6}\,\frac{a^2 + 12r^2}{r} \cdot \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi},$$

und es ist deshalb

$$x_1 = \Omega S \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{6}\,\frac{a^2 + 12r^2}{r}\,\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\varphi}.$$

Nach den Ableitungen im Punkte 15 ist noch

$$V = ar\varphi, \quad x = \varrho \sin\varphi, \quad y = \varrho_0 - \varrho \cos\varphi.$$

Werden diese Werte in die erste Gleichung eingesetzt, so bekommt man die Gleichung der Druckkurve:

$$\varrho = \frac{\varrho_0 Q + \frac{1}{6} a (a^2 + 12 r^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{Q \cos\varphi + ar\varphi \sin\varphi}$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung im Punkte 15.

---

# Zur Invalidenversicherung.

Von J. V. Pexider in München.

## Inhaltsverzeichnis.

## Vorwort.

Die Versicherung gegen Erwerbsunfähigkeit hat heutzutage eine hohe volkswirtschaftliche Bedeutung erlangt, die sich im Laufe der Jahre aus sozialpolitischen Rücksichten voraussichtlich noch steigern wird, wozu insbesondere diejenigen Fälle wesentlich beitragen dürften, in denen Kollektivversicherungen in Betracht kommen, wie solche beispielsweise für die sämtlichen Angestellten großer, stabiler Unternehmungen privater Natur abgeschlossen werden.

Erst während der letzten Jahrzehnte hat sich ein Teil der großen Versicherungsanstalten entschlossen, auch diesem Versicherungszweige die ihm gebührende Aufmerksamkeit zu schenken und Versicherungen gegen Invalidität einzugehen, wobei jedoch viele beschränkende Bedingungen und Maßnahmen der Aufnahme solcher Versicherungsarten auferlegt wurden[1]). Hierzu führte wohl an erster Stelle die Schwierigkeit, die sich in der richtigen Beurteilung der „Versicherungsfähigen" und „Nichtversicherungsfähigen" ergibt, indem den Praktikern zu einer *allgemeinen* Invalidenversicherung die statistischen Grundlagen fehlen, und man theoretisch nicht zu entscheiden vermag, ob die Erscheinung der Invalidität ganz allgemein oder nur für spezielle Berufe dem Gesetze der großen Zahlen folge oder überhaupt nicht[2]). Dennoch kann

1) Eine Orientierung über Deutschlands Anstalten enthält Max Gereckes Abhandlung „L'assurance contre l'invalidité dans les Sociétés allemandes d'assurances sur la vie", erschienen in den Documents du Troisième Congrès International d'Actuaires, à Paris 1900 (publ. 1901) p. 54—68.

2) Hierzu siehe E. Blaschke, Documents du Troisième Congrès International d'Actuaires à Paris 1900, p. 1072 u. ff.

ein Teil der Lösung, die wissenschaftlichen Grundlagen, unter der Annahme der Konstanz der Invaliditätswahrscheinlichkeiten geleistet werden.

Für den Beruf der Eisenbahnangestellten hatte man langjährige Erfahrungen gesammelt, um einen Einblick in die Invaliditätsverhältnisse der Eisenbahner zu gewinnen, Erfahrungen, deren Resultat die gut verläßlichen Tafeln der Invaliditäts- und Invalidensterbens-Wahrscheinlichkeiten des Bureaupersonals des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen von Behm und Zimmermann bilden, welche von Dr. Bentzien noch durch spätere statistische Beobachtungen an diesem Beamtenkörper ergänzt worden sind[1]). Auf Grund dieser Tafeln ist für die Fundamentalgrößen der Invalidenversicherung ein vorbildliches Beispiel berechnet worden. Auf andere, selbst verwandte Zweige kann man zwar solche Tafeln nicht ohne Bedenken in Anwendung bringen, man kann aber, in Ermangelung eines genügenden statistischen Materials den Erfahrungen folgend, diese Werte mit Koeffizienten versehen, die den einzelnen, verschiedenen Berufsklassen entsprechend approximativ zu wählen sind, und so schrittweise die ursprünglich unvollkommen angenommenen Grundlagen, die nur als die ersten Umrisse der geforderten Lösung angesehen werden dürfen, verbessern und dem wahren Gange der Ereignisse genauer anpassen lassen. Man kennt übrigens auch andere Methoden, die geeignet sind demselben Zwecke zu dienen; die von den Versicherungstechnikern abgeleiteten Formeln behalten jedoch in allen diesen Fällen ihre volle Gültigkeit.

In den folgenden Entwicklungen, die dem systematischen Aufbau der mathematischen Grundlagen der Invalidenversicherung gewidmet sind, werden vorerst nur diejenigen Erlebensfälle betrachtet, die man unter die Bezeichnung „Versicherung einfacher Leben“ einreihen kann, und in denen es sich um die einmaligen Prämien mit ganzjähriger Auszahlung handelt. Was die Literatur anbelangt, so sei inbetreff der darin als bekannt vorausgesetzten Formeln nebst den bekannten älteren Autoren auf das Lehrbuch der Versicherungsmathematik von Dr. W. Großmann verwiesen, betreffs der Terminologie auf die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. I. D. 4, wo sich auch die Literatur ausführlich behandelt vorfindet; die neueren Autoren werden an zugehörigen Stellen in Fußnoten angegeben.

## Das benützte Zeichensystem.

Den Grundsätzen der internationalen Bezeichnungsweise gemäß, wie selbe auf dem zweiten internationalen Kongresse der Versicherungstechniker in London 1898 festgesetzt wurden, bedeuten im folgenden:

1) Siehe z. B. in H. Meyers Beiträgen zur Pensionsversicherung, Jena 1908.

$l(x)$ die Anzahl der $x$-jährigen, lebenden Männer einer „fingierten Gesellschaft“ mit bestimmter Absterbeordnung $l(x), l(x+1), \ldots$;

$l_a(x)$ die Anzahl der $x$-jährigen, aktiven Männer (mit bestimmter Ausscheideordnung aus dem Aktivitätszustande);

$l_i(x)$ die Anzahl derjenigen Personen, welche aus einer Anfangszahl von Aktiven im Laufe der Jahre als invalid hervorgegangen sind und gegenwärtig im $x$ten Lebensjahre stehen;

$l_u(x)$ die Anzahl der auf Grund der Sterbenswahrscheinlichkeit der Invaliden jeweilig am Anfang des $x$ten Lebensjahres noch lebenden invaliden Männer (Sterbenstafel für Invalide);

$i(x+1)$ die Anzahl der im $x$ten Lebensalter aus den $l_a(x)$ Aktiven hervorgehenden, invalid werdenden Männer, die den Anfang des $(x+1)$sten Jahres erleben;

$v$ den Barwert des nach einem Jahre fälligen Kapitals 1, d. h. den Diskontierungsfaktor;

$D(x)$ die diskontierte Zahl der lebenden Männer $l(x)$ einer „fingierten Gesellschaft“;

$D_a(x)$ die diskontierte Zahl der aktiven Männer $l_a(x)$;

$D_i(x)$ die diskontierte Zahl der invalid gewordenen Männer $l_i(x)$;

$D_u(x)$ die diskontierte Zahl der Invaliden $l_u(x)$;

$D_{ai}(x)$ die diskontierte Zahl der invalid werdenden Männer $i(x)$;

$p(x)$ die Erlebenswahrscheinlichkeit eines $x$-jährigen Mannes (für ein Jahr);

$p_a(x)$ die Wahrscheinlichkeit eines $x$-jährigen Aktiven, das $(x+1)$ste Lebensalter im Aktivitätszustande zu erreichen;

$p_i(x)$ die Wahrscheinlichkeit eines $x$-jährigen Aktiven, das $(x+1)$ste Lebensalter im Invaliditätszustande zu erreichen;

$p_{a+i}(x)$ die Wahrscheinlichkeit eines $x$-jährigen Aktiven, das $(x+1)$ste Lebensalter überhaupt (als Aktiver oder Invalider) zu erleben;

$p_u(x)$ die Erlebenswahrscheinlichkeit eines $x$-jährigen Invaliden;

$q(x)$, $q_a(x)$, $q_i(x)$, $q_{a+i}(x)$ und $q_u(x)$ entsprechend die zugehörigen Sterbenswahrscheinlichkeiten und

$u(x)$ die Wahrscheinlichkeit eines $x$-jährigen Aktiven, während des $x$ten Lebensjahres invalid zu werden;

$\mathfrak{a}(x)$ den Barwert der ganzjährigen, vorschüssigen Leibrente eines $x$-jährigen Mannes, von jährlich 1;

$\mathfrak{a}_a(x)$ den Barwert der ganzjährigen, vorschüssigen Aktivenrente von jährlich 1 eines $x$-jährigen Aktiven;

$\mathfrak{a}_u(x)$ den Barwert der ganzjährigen, vorschüssigen Invalidenrente von jährlich 1 eines $x$-jährigen Invaliden;

$\mathfrak{a}_i(x)$ den Barwert der Anwartschaft auf Invalidenpension von jährlich 1 eines derzeit $x$-jährigen Aktiven.

Die übrigen benutzten Zeichen werden in den sie betreffenden Ableitungen der weiteren Untersuchung erklärt werden.

## § 1. Beziehungen zwischen den Erlebens- und Sterbens-Wahrscheinlichkeiten der Aktiven, der Invaliden und der Menschen überhaupt.

Der gegebenen Deutung des Zeichens $p_{a+i}(x)$ gemäß als Wahrscheinlichkeit eines Aktiven vom Alter $x$ den Anfang des $(x+1)^{\text{ten}}$ Jahres im Aktivitätszustande oder als Invalide zu erleben, bestimmt sich der Wert von $p_{a+i}(x)$ durch das Verhältnis

$$(\alpha) \qquad p_{a+i}(x) = \frac{l_a(x+1) + i(x+1)}{l_a(x)},$$

indem die Anzahl aller von $l_a(x)$ Aktiven nach einem Jahre am Leben gebliebenen Menschen

$$l_a(x+1) + i(x+1)$$

beträgt. Sei weiter $q_{a+i}(x)$ die Wahrscheinlichkeit eines $x$-jährigen Aktiven, während des $x^{\text{ten}}$ Lebensjahres (als Aktiver oder Invalider) zu sterben, also

$$(\beta) \qquad q_{a+i}(x) = \frac{l_a(x) - l_a(x+1) - i(x+1)}{l_a(x)};$$

dann ergeben die Identitäten $(\alpha)$ und $(\beta)$ die Beziehung

$$p_{a+i} + q_{a+i}(x) = 1,$$

wie zu erwarten war, da von den beiden Möglichkeiten, dienstfähig oder dienstunfähig das Jahr $(x+1)$ zu erleben bezw. nicht zu erleben, stets eine eintreten muß.

Die Erlebenswahrscheinlichkeit $p(x)$ eines $x$-jährigen Menschen einer „fingierten Gesellschaft" $l(x)$, von denen $l_a(x)$ Mitglieder aktiv und $l_i(x)$ Mitglieder invalid sind, und die Erlebenswahrscheinlichkeiten $p_{a+i}(x)$ und $p_u(x)$ dieser Aktiven bezw. Invaliden sind infolge dieser Festsetzung nicht voneinander unabhängig, sondern es besteht zwischen ihnen eine lineare Beziehung; sie ist eine Folge der Identität

$$(\gamma) \qquad l(x) = l_a(x) + l_i(x),$$

durch welche die Absterbeordnung der „fingierten Gesellschaft" $l(x)$ und somit auch die Erlebenswahrscheinlichkeit $p(x)$ festgelegt ist, sobald die Ausscheideordnungen der $l_a(x)$ und der $l_i(x)$ bestimmt sind. Es sei hier für die so definierte „fingierte Gesellschaft", die aus Ak-

tiven und Invaliden besteht, der Ausdruck „Menschen überhaupt" gebraucht. Aus

$$l(x+1) = l_a(x+1) + l_i(x+1)$$

ergibt sich nämlich zufolge der zwischen $l_i(x+1)$ und $l_i(x)$ bestehenden bekannten und leicht zu bestätigenden Identität

$$(\delta) \qquad l_i(x+1) = l_i(x)p_u(x) + i(x+1)$$

die Gleichung

$$(\varepsilon) \qquad l(x)p(x) = l_a(x)p_{a+i}(x) + l_i(x)p_u(x).$$

Aus dieser fundamentalen Beziehung zwischen den drei Erlebenswahrscheinlichkeiten der Menschen überhaupt, der Aktiven und der Invaliden, ergeben sich ohne weiteres durch elementare arithmetische Untersuchungen die folgenden Sätze:

1. *Sind zwei von den Erlebenswahrscheinlichkeiten* $p(x)$, $p_{a+i}(x)$ *und* $p_u(x)$ *einander gleich, so ist auch die dritte ihnen gleich.*

2. *Ist dagegen*

$$p_{a+i}(x) > p_u(x) \quad \textit{bezw.} \quad p_{a+i}(x) < p_u(x),$$

*so bestehen die Ungleichheiten*

$$p_{a+i}(x) > p(x) > p_u(x) \quad \textit{bezw.} \quad p_{a+i}(x) < p(x) < p_u(x),$$

*so daß* $p(x)$ *stets einen zwischen* $p_{a+i}(x)$ *und* $p_u(x)$ *liegenden Wert annimmt.*

Für die Sterbenswahrscheinlichkeiten

$$q(x), \quad q_{a+i}(x) \quad \text{und } q_u(x)$$

folgt aus ($\varepsilon$) die Beziehung

$$(\zeta) \qquad l(x)q(x) = l_a(x)q_{a+i}(x) + l_i(x)q_u(x)$$

und man hat demgemäß auch die Sätze:

3. *Sind zwei von den Sterbenswahrscheinlichkeiten* $q(x)$, $q_{a+i}(x)$, $q_u(x)$ *einander gleich, so ist auch die dritte ihnen gleich.*

4. *Der Wert* $q(x)$ *liegt stets zwischen den Werten* $q_{a+i}(x)$ *und* $q_u(x)$.

Die Ausscheidewahrscheinlichkeit eines $x$-jährigen Aktiven aus dem Zustande der Aktivität ist durch die Formel

$$u(x) + q_a(x) = \frac{l_a(x) - l_a(x+1)}{l_a(x)}$$

gegeben, da sich die Ereignisse, invalid zu werden oder als Aktiver zu sterben, gegenseitig ausschließen. Bezeichnet man also mit $p_a(x)$ die

Wahrscheinlichkeit eines im Aktivitätszustande, mit $p_i(x)$ die Wahrscheinlichkeit desselben im Invaliditätszustande das nächste Jahr $x+1$ zu erleben, so wird erstens

$$p_a(x) + q_a(x) + u(x) = 1$$

sein und es wird zweitens zwischen den drei verschiedenen Erlebenswahrscheinlichkeiten $p_{a+i}(x)$, $p_a(x)$, $p_i(x)$ eines $x$-jährigen Aktiven die Beziehung

$$(\eta) \qquad p_{a+i}(x) = p_a(x) + p_i(x) = p_a(x) + \frac{i(x+1)}{l_a(x)}$$

bestehen, welche auch unabhängig von obigen Relationen aufgestellt werden kann, da sich die Ereignisse, im Aktivitätszustande oder als Invalide das nächste Jahr zu erleben, ebenfalls ausschließen.

Die Wahrscheinlichkeit $p_i(x)$ ist eine Funktion von $p_u(x)$; gewöhnlich wird

$$i(x+1) = l_a(x) u(x) \left\{ 1 - \frac{q_u(x)}{2} \right\}$$

gesetzt.[1]) Es ist demnach

$$p_i(x) = u(x) \left\{ 1 - \frac{q_u(x)}{2} \right\} = \frac{1}{2} u(x) \{ 1 + p_u(x) \}$$

und

$$p_{a+i}(x) = p_a(x) + \frac{1}{2} u(x) \{ 1 + p_u(x) \}.$$

Ist nun im besonderen $p_{a+i}(x) = p_u(x)$, so besteht zwischen $p_a(x)$ und $p_u(x)$ die Beziehung

$$p_a(x) = p_u(x) - \frac{1}{2} u(x) \{ 1 + p_u(x) \}.$$

Diese Gleichung sagt aber aus, daß in einem solchen Falle die Sterbenswahrscheinlichkeit der Aktiven im Aktivitätszustande größer ist als die Sterbenswahrscheinlichkeit der Invaliden. In der Praxis dürften demnach solche Fälle nur dann eintreten, wenn es sich einerseits bei den Aktiven um einen dem Leben gefährlichen Dienst handelt oder wenn man es anderseits bei den Invaliden mit den sog. Konvenienzinvaliden zu tun hätte. Im allgemeinen wird aber $p_{a+i}(x)$ von $p_u(x)$ verschieden sein, der Unterschied beider Wahrscheinlichkeiten jedoch desto kleiner, je lebensgefährlicher der Beruf der Aktiven ist.

---

1) Siehe z. B. E. Hamza, Note sur la théorie mathématique de l'assurance contre le risque d'invalidité d'origine morbide, sénile ou accidentelle. Documents du 3ième Congrès international d'Actuaires en 1900 à Paris, publ. 1901; p. 163. — W. Grossmann, Die Versicherungsmathematik, Leipzig 1902; S. 177.

Die Beziehung ($\varepsilon$) läßt sich auch auf die Form

$$(\vartheta) \qquad p_{a+i}(x) = p(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)} \{p(x) - p_u(x)\}$$

bringen, aus der sich zufolge ($\eta$) für $p_i(x)$ der Wert

$$(\iota) \qquad p_i(x) = p(x) - p_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)} \{p(x) - p_u(x)\}$$

ergibt. Die Gestalt der Gleichungen ($\vartheta$) und ($\iota$) selbst macht es klar, daß sie bestehen bleiben, wenn man für $p$ die Sterbenswahrscheinlichkeiten $q$ einsetzt. Die beiden Formeln finden übrigens im Folgenden des öfteren ihre vollständigen Analogien.

## § 2. Einmalige Prämien der Erlebens- und Invalidenversicherung.

Bezeichnet man mit dem Index $z$ einen in betracht gezogenen Zustand eines jeden Mitgliedes ($x$) einer „fingierten Gesellschaft" mit der Ausscheideordnung $l_z(x)$, $l_z(x+1)$, $l_z(x+2)$, ... aus diesem Zustande, so ist der Barwert der von dieser Gesellschaft zu einem bestimmten Zwecke geleisteten einmaligen oder sich regelmäßig wiederholenden Einzahlungen gleich dem Barwert der behufs Erfüllung des Zweckes und gemäß jener Ausscheideordnung an die Mitglieder geleisteten Auszahlungen. Nach diesem *Prinzip der Gleichheit von Leistung und der wahrscheinlichsten Gegenleistung* berechnen sich die Nettoprämien oder die Barwerte der Versicherungsmathematik und zwar:

1. der Barwert der vorschüssigen Leibrente 1 eines $x$-jährigen Menschen durch die Formel

$$(1) \qquad \mathfrak{a}(x) = \frac{\sum D(x)}{D(x)},$$

2. der Barwert der vorschüssigen Aktivenrente 1 eines $x$-jährigen Aktiven, zahlbar während der Dauer der Aktivität, mittels der Formel

$$(1\,\mathrm{a}) \qquad \mathfrak{a}_a(x) = \frac{\sum D_a(x)}{D_a(x)},$$

3. der Barwert der vorschüssigen Invalidenrente 1 eines $x$-jährigen Invaliden

$$(1\,\mathrm{u}) \qquad \mathfrak{a}_u(x) = \frac{\sum D_u(x)}{D_u(x)},$$

4. der Barwert der um $n$ Jahre aufgeschobenen vorschüssigen Leibrente 1 eines $x$-jährigen Menschen

$$(2) \qquad {}_{n/}\mathfrak{a}(x) = \frac{\sum D(x+n)}{D(x)} = \frac{D(x+n)}{D(x)} \mathfrak{a}(x+n),$$

5. der Barwert der um $n$ Jahre aufgeschobenen vorschüssigen Aktivenrente 1 eines Aktiven vom Alter $x$

$$(2a) \qquad {}_{n/}\ddot{a}_a(x) = \frac{\sum D_a(x+n)}{D_a(x)} = \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\ddot{a}_a(x+n),$$

6. der Barwert der um $n$ Jahre aufgeschobenen vorschüssigen Invalidenpension 1 eines $x$-jährigen Invaliden

$$(2u) \qquad {}_{n/}\ddot{a}_u(x) = \frac{\sum D_u(x+n)}{D_u(x)} = \frac{D_u(x+n)}{D_u(x)}\ddot{a}_u(x+n),$$

7. der Barwert der $n$ Jahre dauernden temporären vorschüssigen Leibrente von $(x)$

$$(3) \qquad {}_{/n}\ddot{a}(x) = \frac{\sum D(x) - \sum D(x+n)}{D(x)} = \ddot{a}(x) - {}_{n/}\ddot{a}(x),$$

8. der Barwert der $n$ Jahre dauernden temporären vorschüssigen Aktivenrente 1 eines $x$-jährigen Ativen

$$(3a) \qquad {}_{/n}\ddot{a}_a(x) = \frac{\sum D_a(x) - \sum D_a(x+n)}{D_a(x)} = \ddot{a}_a(x) - {}_{n/}\ddot{a}_a(x),$$

9. der Barwert der $n$ Jahre dauernden temporären vorschüssigen Invalidenrente 1 eines $x$-jährigen Invaliden

$$(3u) \qquad {}_{/n}\ddot{a}_u(x) = \frac{\sum D_u(x) - \sum D_u(x+n)}{D_u(x)} = \ddot{a}_u(x) - {}_{n/}\ddot{a}_u(x),$$

10. der Barwert der Anwartschaft eines Aktiven auf vorschüssige Invalidenpension von jährlich 1 durch die Formel von Kaan

$$(4) \qquad \ddot{a}_i(x) = \frac{\sum D_{ai}(x+1)\,\ddot{a}_u(x+1)}{D_a(x)}$$

oder durch die Formel von Karup

$$(4') \qquad \ddot{a}_i(x) = \frac{\sum D_i(x)}{D_a(x)} - \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\ddot{a}_u(x),$$

welche im Grunde identisch ist mit derjenigen von Kaan[1]),

11. der Barwert der Anwartschaft eines Aktiven auf vorschüssige Invalidenpension 1 nach $n$ *Karenz*jahren

$$(5) \qquad {}_{n//}\ddot{a}_i(x) = \frac{\sum D_{ai}(x+n+1)\,\ddot{a}_u(x+n+1)}{D_a(x)} = \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\ddot{a}_i(x+n)$$

1) Siehe z. B. Grossmann S. 184—188.

oder analog der Karupschen Formel (4')

$$(5')\quad {}_{n//}\mathfrak{a}_i(x) = \frac{\sum D_i(x+n)}{D_a(x)} - \frac{D_i(x+n)}{D_a(x)}\mathfrak{a}_u(x+n) = \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\mathfrak{a}_i(x+n).$$

Bezeichnet man den Barwert einer nachschüssigen Rente von jährlich 1 von $(x)$, zahlbar während der Dauer des Zustandes $s$, mit $a_s(x)$, so wird

$$a_s(x) = {}_{1/}\mathfrak{a}_s(x).$$

## § 3. Temporäre Rentenansprüche.

### A. Barwert der temporären Anwartschaft auf Invalidenpension.

Es sei der Barwert der „temporären Anwartschaft auf Invalidenpension" gesucht, d. h. die einmalige Prämie für eine Versicherung, zufolge welcher ein $x$-jähriger Aktiver den Anspruch auf eine lebenslängliche, vorschüssige, das erste Mal zu Anfang des seiner Invaliderklärung folgenden Jahres zahlbare Invalidenpension von jährlich 1 erhält, falls er während der $n$ ersten Versicherungsjahre invalid wird. In einem solchen Falle fallen offenbar in dem Summenausdruck (4) die letzten Glieder, von dem $(n+1)$-ten angefangen, fort, und man erhält als Barwert eines solchen Anspruches

$$(3\,\mathrm{i})\quad {}_{/n}\mathfrak{a}_i(x) = \mathfrak{a}_i(x) - {}_{n//}\mathfrak{a}_i(x) = \mathfrak{a}_i(x) - \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\mathfrak{a}_i(x+n),$$

welche Formel ein Analogon zu (3), (3a) und (3u) bildet.

### B. Barwert der Anwartschaft auf temporäre Invalidenpension.

1. Methode.

Bei einer Versicherung eines $x$-jährigen Aktiven zum Bezuge einer vorschüssigen Invalidenpension 1, zu der er nur die ersten $n$ Versicherungsjahre berechtigt ist, d. h. einer vorschüssigen Rente 1, die zahlbar ist, falls der Versicherte spätestens im $(n-1)$-ten Versicherungsjahre invalid wird und zwar das erste Mal zu Anfang des seiner Invaliderklärung folgenden Jahres, das letzte Mal zu Beginn des $n$-ten Versicherungsjahres zur Auszahlung gelangt, entstehen dem Versicherungsfond für $l_a(x)$ versicherte Aktive folgende Verpflichtungen:

Zu Anfang des $(x+1)$-ten bezw. $(x+2)$-ten, ... $(x+n-1)$-ten Jahres im Betrage von

$$i(x+1)_{/n-1}\mathfrak{a}_u(x+1) = i(x+1)\left\{\mathfrak{a}_u(x+1) - \frac{\sum D_u(x+n)}{D_u(x+1)}\right\}$$

bezw.

$$i(x+2)_{/_{n-2}}\eth_u(x+2) = i(x+2)\left\{\eth_u(x+2) - \frac{\sum D_u(x+n)}{D_u(x+2)}\right\}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$i(x+n-1)_{/_1}\eth_u(x+n-1) = i(x+n-1)\left\{\eth_u(x+n-1) - \frac{\sum D_u(x+n)}{D_u(x+n-1)}\right\}$$

Einheiten. Der Barwert der Leistungen des Fonds und also auch die Gegenleistung der $l_a(x)$ Versicherten bestimmt sich durch

$$l_a(x)_{//_n}\eth_i(x) = \sum_{k=1}^{n-1} i(x+k)v^k\eth_u(x+k) - \sum D_u(x+n)\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{i(x+k)v^k}{D_u(x+k)},$$

woraus die einmalige Prämie

$$_{//_n}\eth_i(x) = \eth_i(x) - \frac{D_a(x+n-1)}{D_a(x)}\eth_i(x+n-1) - \frac{\mu}{l_a(x)}$$

(6) $$= \eth_i(x) - {}_{n-1//}\eth_i(x) - \frac{\mu}{l_a(x)}$$

erhalten wird, unter $\mu$ den Ausdruck

(8) $$\mu = \frac{\sum D_u(x+n)}{v^x}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{i(x+k)}{l_u(x+k)}$$

verstanden. Das Summenprodukt $\mu$ läßt sich jedoch auf Grund einfacher Transformationen in bekannte Barwerte überführen.

Durch allmähliche Anwendung der Beziehung ($\delta$) auf die Anzahlen $l_i(x+2)$, $l_i(x+3)$, . . . erhält man schließlich aus ($\delta$) die Beziehung

$$l_i(x+n) + l_i(x)\cdot\frac{l_u(x+n)}{l_u(x)} - i(x+n) = l_u(x+n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{i(x+k)}{l_u(x+k)},$$

aus welcher nach Multiplikation mit

$$\eth_u(x+n)v^n = \frac{\sum D_u(x+n)}{l_u(x+n)v^x}$$

die Beziehung

(8) $$\mu = \eth_u(x+n)v^n\{l_i(x+n) - i(x+n)\} - l_i(x)\,{}_{n/}\eth_u(x)$$

folgt.

Mit Rücksicht darauf kann für den Barwert $_{//_n}\eth_i(x)$ statt des Ausdruckes (6) der mit ihm identische Wert

(9) $$_{//_n}\eth_i(x) = \eth_i(x) - {}_{n-1//}\eth_i(x)$$
$$- \frac{v^n}{l_a(x)}\eth_u(x+n)\{l_i(x+n) - i(x+n)\} + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\,{}_{n/}\eth_u(x)$$

gesetzt werden. Dieser Ausdruck wird im weiteren noch formal vereinfacht werden. Vorerst sei jedoch auf die „logische Ableitung“ der Formel (9) eingegangen.

Damit alle $l(x)$ Lebenden des Alters $x$ eine vorschüssige Invalidenpension von 1 ihr Leben lang im Invaliditätsfalle beziehen, haben die Dienstfähigen unter ihnen von der Anzahl $l_a(x)$ dem Versicherungsfond den Betrag

$$l_a(x)\ \mathfrak{a}_i(x)$$

und die $l_i(x)$ Invaliden den Betrag

$$l_i(x)\ \mathfrak{a}_u(x)$$

zu überweisen, also zusammen eine Einzahlung von

$$l_a(x)\ \mathfrak{a}_i(x) + l_i(x)\ \mathfrak{a}_u(x)$$

Einheiten zu machen. Die Gegenleistung des Fonds kann aber so gefunden werden, daß man zuerst denjenigen Teil der Zahlungen feststellt, welche dem Fond bis zu Anfang des $(x+n-1)$-sten Jahres (einschl.) erwachsen werden, und dann den Restbestand bestimmt.

1. Durch die Versicherung aller Aktiven auf Invalidenpension bis zu Anfang des $(x+n-1)$-sten Jahres (einschl.) werden dem Fond Zahlungen entstehen, die einer Versicherung von $l_a(x)$ Aktiven auf temporäre Invalidenpension mit der Dauer von $n$ Jahren gleichkommen und deren Barwert

$$l_a(x)_{//_n}\ \mathfrak{a}_i(x)$$

beträgt. Die Versicherung der $l_i(x)$ Invaliden wird bis zu Anfang des $(x+n-1)$-sten Jahres (einschl.) den Fond den Betrag

$$l_i(x)_{/_n}\ \mathfrak{a}_u(x)$$

kosten. Der für den ersten Teil der Versicherung erforderliche Gesamtbetrag macht also

$$l_a(x)_{//_n}\mathfrak{a}_i(x) + l_i(x)_{/_n}\ \mathfrak{a}_u(x)$$

Einheiten aus.

2. Der zweite Teil der Versicherung bürdet dem Fond von Anfang des $(x+n)$-ten Jahres ab die folgenden Verpflichtungen auf:

Indem die $l_a(x)$ Aktiven auch vom Beginn des $(x+n)$-ten Lebensjahres im Invalidisierungsfalle eine Pension von jährlich 1 erhalten sollen, werden dem Fond Zahlungen entstehen, die dem Barwert der um $n-1$ Jahre aufgeschobenen Anwartschaft auf Invalidenpension gleichkommen, d. h. Auslagen in der Höhe

$$l_a(x)_{n-1//}\mathfrak{a}_i(x).$$

Es bleiben noch die sämtlichen Invaliden des Alters $x+n$ ungedeckt, ausgenommen die $i(x+n)$ Invaliden, die zu Anfang des Jahres $x+n$ neu hinzugekommen sind und die bereits durch die Versicherung ${}_{n-1//}\partial_i(x)$ vom Anfang des Jahres $x+n$ ab gedeckt sind. Es verbleibt also noch die Leistung für die übrigen

$$l_i(x+n) - i(x+n)$$

Invaliden, für welche zu Anfang des $(x+n)$-ten Jahres der Betrag

$$\{l_i(x+n) - i(x+n)\}\ \partial_u(x+n)$$

zurückgestellt werden muß. Der zweite Teil der Versicherung wird demnach den Fond den Betrag

$$l_a(x)\,{}_{n-1//}\partial_i(x) + \partial_u(x+n)\,\{l_i(x+n) - i(x+n)\}\,v^n$$

kosten. Addiert man nun die Werte der beiden Teilleistungen, so erhält man den gegenwärtigen Wert der Gesamtausgaben des Fonds, welcher der Leistung der sich versichernden $l_a(x)$ Aktiven und $l_i(x)$ Invaliden gleichkommen muß. Demzufolge besteht die Gleichung

$$l_a(x)\,\partial_i(x) + l_i(x)\,\partial_u(x) = l_a(x)_{//n}\,\partial_i(x) + l_i(x)_{/n}\partial_u(x) + l_a(x)\,{}_{n-1//}\partial_i(x)$$
$$+\,\partial_u(x+n)\,v^n\,\{l_i(x+n) - i(x+n)\},$$

aus welcher sich nach Benutzung der Gleichung (3a) der unter (9) verzeichnete Ausdruck ergibt.

Es werde nun der Ausdruck (8) auf einfachere Formen gebracht. Mit Hilfe der Beziehung ($\delta$) erhält man für das erste Glied rechterhand in Formel (8) den Wert

$$\partial_u(x+n)v^n\,l_i(x+n-1)\,p_n(x+n-1)$$

und vermittels der Gleichung (2u) die einander gleichen Ausdrücke

$$l_i(x+n-1)\,\frac{l_u(x)}{l_u(x+n-1)}\,{}_{n/}\partial_u(x) = l_i(x+n-1)\,{}_{1/}\partial_u(x+n-1)v^{n-1},$$

sodaß sich für $\mu$ selbst die Formeln

$$(8') \qquad \mu = {}_{n/}\partial_u(x)\left\{l_i(x+n-1)\,\frac{l_u(x)}{l_u(x+n-1)} - l_i(x)\right\}$$

$$(8'') \qquad \mu = l_i(x+n-1)v^{n-1}\,{}_{1/}\partial_u(x+n-1) - l_i(x)\,{}_{n/}\partial_u(x)$$

ergeben und somit auch der Barwert ${}_{//n}\partial_i(x)$ in den Ausdrücken

$$(9') \qquad {}_{//n}\partial_i(x) = \partial_i(x) - {}_{n-1//}\partial_i(x) - {}_{n/}\partial_u(x)\left\{l_i(x+n-1)\cdot\frac{l_u(x)}{l_u(x+n-1)} - l_i(x)\right\}\frac{1}{l_a(x)}$$

und

$$_{//n}\mathfrak{a}_i(x) = \mathfrak{a}_i(x) - {}_{n-1//}\mathfrak{a}_i(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\,{}_{n/}\mathfrak{a}_u(x) - \frac{D_i(x+n-1)}{D_a(x)}\,a_u(x+n-1)$$

seine Darstellung findet.

2. Methode.

Folgt man zur Aufstellung des Barwertes $_{//n}\mathfrak{a}_i(x)$ der Methode von Karup, so erhält man offenbar die Beziehung

$$l_a(x)_{//n}\mathfrak{a}_i(x) = \sum_{k=1}^{n-1} l_i(x+k)v^k - \frac{l_i(x)}{l_u(x)}\sum_{k=1}^{n-1} l_u(x+k)v^k,$$

aus der sich nach einfachen Umformungen mittels (4′), (5′) und (2u) die Beziehung

$$(9^*)\qquad {}_{//n}\mathfrak{a}_i(x) = \mathfrak{a}_i(x) - {}_{n//}\mathfrak{a}_i(x) + {}_{n/}\mathfrak{a}_u(x)\left\{\frac{l_i(x)}{l_a(x)} - \frac{l_u(x)}{l_a(x)}\cdot\frac{l_i(x+n)}{l_u(x+n)}\right\}$$

oder zufolge (2u) auch

$$(9^{**})\qquad {}_{//n}\mathfrak{a}_i(x) = \mathfrak{a}_i(x) - {}_{n//}\mathfrak{a}_i(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\,{}_{n/}\mathfrak{a}_u(x) - \frac{D_i(x+n)}{D_a(x)}\,\mathfrak{a}_u(x+n)$$

ergibt, welche beide Gleichungen von (9′) bezw. (9″) nur formal verschieden sind.

Benützt man schließlich zur Darstellung des Wertes $_{//n}\mathfrak{a}_i(x)$ des Barwertes $_{/n}\mathfrak{a}_i(x)$, so ergibt die Formel (9*):

$$_{//n}\mathfrak{a}_i(x) = {}_{/n}\mathfrak{a}_i(x) - \mathfrak{a}_u(x+n)\left\{\frac{D_i(x+n)}{D_a(x)} - \frac{D_u(x+n)}{D_u(x)}\cdot\frac{D_i(x)}{D_a(x)}\right\}.$$

## § 4. Leibrente eines Aktiven.

### A. Barwert der Leibrente eines Aktiven.

Soll ein Aktiver vom Alter $x$ eine vorschüssige, sein Leben lang zahlbare Jahresrente 1, deren einmalige Prämie mit

$$\mathfrak{a}_{a+i}(x)$$

bezeichnet werden möge, beziehen, so ergibt sich nach dem Fundamentalprinzip, daß

$$(10)\qquad D_a(x)\,\mathfrak{a}_{a+i}(x) = \sum D_a(x) + \sum D_i(x) - \frac{l_i(x)}{l_u(x)}\sum D_u(x)$$

sein muß. Daraus erschließt man einerseits zufolge (1a), (1u) und (4') für den gesuchten Barwert die Formel

$$(11) \qquad \mathfrak{d}_{a+i}(x) = \mathfrak{d}_a(x) + \mathfrak{d}_i(x),$$

andererseits mit Rücksicht auf (1) und (1u) die Beziehung

$$l_a(x)\mathfrak{d}_{a+i}(x) = l(x)\,\mathfrak{d}(x) - l_i(x)\,\mathfrak{d}_u(x)$$

oder[1])

$$(11') \qquad \mathfrak{d}_{a+i}(x) = \mathfrak{d}(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\{\mathfrak{d}(x) - \mathfrak{d}_u(x)\}.$$

*Spezieller Fall.* Wird die Erlebenswahrscheinlichkeit $p_{a+i}(x)$ der Aktiven gleich derjenigen der Invaliden vorausgesetzt, so wird

$$\mathfrak{d}(x) = \mathfrak{d}_u(x)$$

sein und dann folgt aus (11'), daß

$$\mathfrak{d}_{a+i}(x) = \mathfrak{d}(x) = \mathfrak{d}_u(x)$$

ist, d. h. in einem solchen Falle sind die Barwerte der Leibrente eines Aktiven, der Leibrente eines Menschen überhaupt und der Leibrente eines Invaliden einander gleich — ein Ergebnis, welches die in diesem Falle der Voraussetzung wegen geltende Identität

$$p_{a+i}(x) = p(x) = p_u(x)$$

im voraus erkennen läßt. Die Formel (11) übergeht in diesem Falle dementsprechend in

$$\mathfrak{d}(x) = \mathfrak{d}_a(x) + \mathfrak{d}_i(x).$$

*Bemerkung.* Man kann mittels (11) den Barwert $\mathfrak{d}_i(x)$ allgemein durch die Differenz

$$(12) \qquad \mathfrak{d}_i(x) = \mathfrak{d}_{a+i}(x) - \mathfrak{d}_a(x)$$

darstellen; diese Gleichung sagt aus:

*Der Barwert der Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf Invalidenpension ist gleich dem Barwert der Leibrente eines Aktiven, vermindert um den Barwert der Aktivenrente.*

### B. Barwert der aufgeschobenen Aktiven-Leibrente.

Soll der Bezug der vorschüssigen Leibrente eines Aktiven erst nach $n$ Jahren beginnen, d. h. zum ersten mal zu Anfang seines $(x+n)$-ten Lebensjahres fällig sein, ob er inzwischen Invalide geworden ist oder

1) Vgl. Hamza, a. a. O. S. 167.

nicht, so fallen in den Summen des Ausdruckes (10) je die $n$ ersten Glieder fort, und man erhält demnach aus

$$D_a(x)\,{}_{n/}\mathrm{a}_{a+i}(x) = \sum D_a(x+n) + \sum D_i(x+n) - \frac{D_i(x)}{D_u(x)} \sum D_u(x+n)$$

für den Barwert einer vorschüssigen um $n$ Jahre aufgeschobenen Leibrente eines Aktiven einerseits analog zu (11) die Formel

$$(13) \qquad {}_{n/}\mathrm{a}_{a+i}(x) = {}_{n/}\mathrm{a}_a(x) + {}_{n//}\mathrm{a}_i(x) + {}_{n/}\mathrm{a}_u(x)\,\frac{l_u(x)}{l_a(x)}\left\{\frac{l_i(x+n)}{l_u(x+n)} - \frac{l_i(x)}{l_u(x)}\right\},$$

anderseits analog zu (11′) die Beziehung

$$(13') \qquad {}_{n/}\mathrm{a}_{a+i}(x) = {}_{n/}\mathrm{a}(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\{{}_{n/}\mathrm{a}(x) - {}_{n/}\mathrm{a}_u(x)\},$$

oder schließlich, um den der tatsächlichen Berechnung angepaßten Ausdruck zu erhalten, die Formel

$$(13'') \qquad {}_{n/}\mathrm{a}_{a+i}(x) =$$

$$= \frac{1}{D_a(x)}\left[D_a(x+n)\,\mathrm{a}_{a+i}(x+n) + \mathrm{a}_u(x+n)\left\{D_i(x+n) - D_i(x)\cdot\frac{D_a(x+n)}{D_u(x)}\right\}\right]$$

*Besonderer Fall.* Wird wieder $p(x) = p_u(x)$ vorausgesetzt, so ergibt (13′) die Beziehung

$${}_{n/}\mathrm{a}_{a+i}(x) = {}_{n/}\mathrm{a}(x) = {}_{n/}\mathrm{a}_u(x)$$

und (13) die andere

$$(13s) \qquad {}_{n/}\mathrm{a}_a(x) + {}_{n//}\mathrm{a}_i(x) = {}_{n/}\mathrm{a}(x)\,\frac{l(x)}{l_a(x)}\left\{1 - \frac{l_i(x+n)}{l_u(x+n)}\right\}$$

### C. Barwert der Aktiven-Leibrente mit $n$ Karenzjahren.

Um den gegenwärtigen Wert der Versicherung eines $x$-jährigen Aktiven auf lebenslängliche Rente von 1, zu der er aber nur dann berechtigt ist, wenn er nach $n$ Jahren noch aktiv ist, und welche zum erstenmale zu Anfang seines $(x+n)$-ten Lebensjahres zur Auszahlung gelangt, zu bestimmen, hat man offenbar analog (11) den Ansatz zu machen

$${}_{n//}\mathrm{a}_{a+i}(x) = {}_{n/}\mathrm{a}_a(x) + {}_{n//}\mathrm{a}_i(x)$$

$$(2a+i) \qquad = \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\,\mathrm{a}_{a+i}(x+n).$$

Diese Beziehung zwischen $\mathrm{a}_{a+i}(x)$ und ${}_{n//}\mathrm{a}_{a+i}(x)$ entspricht vollständig der unter (2) angeführten, die gültig ist für die Barwerte $\mathrm{a}(x)$ und ${}_{n/}\mathrm{a}(x)$. (Dementsprechend ist selbe mit $(2a+i)$ bezeichnet worden.)

**D. Barwert der temporären Aktiven-Leibrente.**

Versichern sich $l_a(x)$ Aktive des Alters $x$ auf eine vorschüssige, die ersten $n$ Jahre zahlbare Rente von jährlich 1, so entstehen dem Fond zu Anfang eines jeden Versicherungsjahres Ausgaben, deren Höhe dem früheren zufolge zu Anfang des $(\varkappa + 1)$-sten Versicherungsjahres

$$l_a(x+\varkappa) + l_i(x+\varkappa) - l_i(x)\frac{l_u(x+\varkappa)}{l_u(x)}$$

Einheiten ausmacht, so beträgt der Barwert aller während der $n$ Versicherungsjahre zu leistenden Auszahlungen die Summe

$$\sum_{\varkappa=0}^{n-1} v^{\varkappa}\left\{l_a(x+\varkappa) + l_i(x+\varkappa) - l_i(x)\frac{l_u(x+\varkappa)}{l_u(x)}\right\},$$

der die Gegenleistung

$$l_a(x)\,{}_{/n}\text{ä}_{a+i}(x)$$

der Aktiven gegenüber steht. Es ist somit

$$(14)\qquad {}_{/n}\text{ä}_{a+i}(x) = {}_{/n}\text{ä}_{a}(x) + {}_{//n}\text{ä}_{i}(x)$$

oder auch

$$(14')\qquad {}_{/n}\text{ä}_{a+i}(x) = {}_{/n}\text{ä}(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\{{}_{/n}\text{ä}(x) - {}_{/n}\text{ä}_{u}(x)\},$$

entsprechend den Formeln (11) und (11′), in welche sie für $n = \omega + 1 - x$ übergehen, unter $\omega$ das höchste in den Tafeln vorkommende Alter verstanden.

*Besonderer Fall.* Ist wieder $p(x) = p_u(x)$, so ergeben (14) und (14′) die Beziehungen

$${}_{/n}\text{ä}_{a+i}(x) = {}_{/n}\text{ä}(x) = {}_{/n}\text{ä}_{u}(x)$$

und

$$(14\text{s})\qquad {}_{/n}\text{ä}(x) = {}_{/n}\text{ä}_{a}(x) + {}_{//n}\text{ä}_{i}(x).$$

## § 5. Unbedingte Pensionierung nach einer bestimmten Anzahl von Dienstjahren.

(Barwert des Anspruches auf Invaliden- und Alterspension.)

Will ein Aktiver des Alters $x$ außer dem Anspruch auf Invalidenpension noch den Anspruch besitzen, nach einer bestimmten Anzahl von Dienstjahren, etwa $n$, unbedingt pensioniert zu werden, d. h. von seinem $(x + n)$-ten Lebensjahre ab, je zu Beginn des Jahres eine lebenslängliche Rente von 1 zu beziehen, ungeachtet dessen, ob er inzwischen

für invalid erklärt wurde oder nicht, so soll der Barwert dieses zusammengesetzten Anspruches mit

$$\mathfrak{a}_{i+\overline{a}|_{n}}(x)$$

bezeichnet werden. Nach dem Fundamentalprinzip ergibt sich nun, daß

$$(15)\qquad \mathfrak{a}_{i+\overline{a}|_{n}}(x) = \frac{\sum D_{ai}(x+1)\,\mathfrak{a}_u(x+1) + \sum D_a(x+n)}{D_a(x)}$$

sein muß, oder kurz

$$(16)\qquad \mathfrak{a}_{i+\overline{a}|_{n}}(x) = \mathfrak{a}_i(x) + {}_{n/}\mathfrak{a}_a(x).$$

Diese Formel zeigt, daß der Anspruch aus zwei Teilen besteht, die der Aktive auch einzeln eingehen kann.

Es möge für diesen zusammengesetzten Anspruch noch eine andere Formel hergeleitet werden. Will man nämlich wissen, welche Verpflichtungen dem Fond bis zum Anfang des $(x+n-1)$-sten Jahres (einschl.) erwachsen werden und wie groß die späteren Verpflichtungen sind, so genügt es auf der rechten Seite der Gleichung (16) von dem ersten Gliede den Barwert ${}_{n-1//}\mathfrak{a}_i(x)$ abzuziehen, zu dem zweiten Gliede aber zu addieren. Der erste Teil der Verpflichtungen wird also durch den Betrag

$$\mathfrak{a}_i(x) - {}_{n-1//}\mathfrak{a}_i(x),$$

der zweite Teil durch

$${}_{n-1//}\mathfrak{a}_i(x) + {}_{n/}\mathfrak{a}_a(x)$$

Einheiten gedeckt. Dieser zweite Ausdruck läßt aber eine einfache Umformung zu. Bedient man sich nämlich zur Darstellung der Prämie ${}_{n-1//}\mathfrak{a}_i(x)$ der Formel (5), so erhält man für die obere Teilsumme den Ausdruck

$$\frac{1}{D_a(x)}\left\{\sum D_i(x+n-1) - D_i(x+n-1)\,\mathfrak{a}_u(x+n-1) + \sum D_a(x+n)\right\},$$

d. h.

$${}_{n-1//}\mathfrak{a}_i(x) + {}_{n/}\mathfrak{a}_a(x) = \frac{l(x)}{l_a(x)}\,{}_{n/}\mathfrak{a}(x) - \frac{D_i(x+n-1)}{D_a(x)}\,a_u(x+n-1).$$

Addiert man nun wieder die beiden Teilsummen zueinander, so erhält man die Formel

$$\mathfrak{a}_{i+\overline{a}|_{n}}(x) = \mathfrak{a}_i(x) - {}_{n-1//}\mathfrak{a}_i(x) + \frac{l(x)}{l_a(x)}\cdot{}_{n/}\mathfrak{a}(x) - \frac{D_i(x+n-1)}{D_a(x)}\,a_u(x+n-1),$$

welche nach Einführung des Barwertes ${}_{//n}\mathfrak{a}_i(x)$ mittels der Formel (9″) die übersichtlichere Form

$$(16')\qquad \mathfrak{a}_{i+\overline{a}|_{n}}(x) = {}_{//n}\mathfrak{a}_i(x) + {}_{n/}\mathfrak{a}(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\left\{{}_{n/}\mathfrak{a}(x) - {}_{n/}\mathfrak{a}_u(x)\right\}$$

annimmt, oder kurz

$$ä_{i+\overline{a}|}(x) = {}_{/\!/n}ä_i(x) + {}_{n/}ä(x) + r_n(x),$$

unter $r_n(x)$ den Ausdruck

$$r_n(x) = \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\left\{{}_{n/}ä(x) - {}_{n/}ä_u(x)\right\} \tag{17}$$

verstanden. Mit Worten:

*Der Barwert des kombinierten Anspruches eines Aktiven auf Invalidenpension und nach n Dienstjahren auf unbedingte Pensionierung ist gleich der Summe aus dem Barwerte der Anwartschaft auf vorschüssige temporäre Invalidenpension von der Dauer n und aus dem Barwerte des Anspruches auf eine um n Jahre aufgeschobene Leibrente eines Menschen überhaupt, vergrößert um den Restbetrag $r_n(x)$, der als Korrektion dafür erforderlich ist, daß man bei der Versicherung des Aktiven durch den Anspruch eines Menschen überhaupt auf aufgeschobene Leibrente von seiner Eigenschaft, dienstfähig zu sein, absah.*

Der Sinn des Korrektionsbetrages ist also der, daß die Versicherung durch ${}_{n/}ä(x)$ den Aktiven in eine Kategorie von Menschen schiebt, deren Erlebenswahrscheinlichkeit $p(x)$ verschieden ist von der der Aktiven $p_{a+i}(x)$, den besonderen Fall $p(x) = p_u(x)$ ausgenommen.

Aus den Gleichungen (13′) und (16) folgt weiter, daß

$$ä_{i+\overline{a}|}(x) = {}_{/\!/n}ä_i(x) + {}_{n/}ä_{a+i}(x) \tag{16′′}$$

ist, oder mit Worten:

*Der Barwert des kombinierten Anspruches eines Aktiven auf Invalidenpension und eine um n Jahre aufgeschobene, unbedingt zahlbare vorschüssige Alterspension von jährlich 1 ist gleich dem Barwerte des n Jahre dauernden Anspruches auf temporäre Invalidenpension, vergrößert um die um n Jahre aufgeschobene Aktiven-Leibrente.*

*Besonderer Fall.* Ist $p(x) = p_u(x)$, so ergeben die Gleichungen (16′) und (16) die Beziehungen

$$ä_{i+\overline{a}|}(x) = {}_{/\!/n}ä_i(x) + {}_{n/}ä(x)$$

$$ä_i(x) = {}_{n/}ä(x) - {}_{n/}ä_a(x) + {}_{/\!/n}ä_i(x)$$

und mit Hilfe von (13)

$$ä_i(x) = {}_{/\!/n}ä_i(x) + {}_{n/}ä_i(x) + {}_{n/}ä(x)\left\{\frac{l(x)}{l_a(x)}\cdot\frac{l_i(x+n)}{l(x+n)} - \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\right\}, \tag{17}$$

welche Gleichung auch eine Folge von (9*) ist, wenn man darin $n-1$ für $n$ einsetzt und die Bedingung $p(x) = p_u(x)$ durchführt.

## § 6. Beziehungen zwischen den Fundamentalgrößen der Invalidenversicherung.

### A. Beziehungen zwischen den Barwerten der temporären Rentenansprüche.

Eliminiert man aus den Gleichungen (14) und (14′) den Barwert der temporären Aktiven-Leibrente, so erhält man die lineare Beziehung

$$(18) \qquad l(x)_{/n}\mathfrak{d}(x) = l_a(x)\left\{{}_{/n}\mathfrak{d}_a(x) + {}_{//n}\mathfrak{d}_i(x)\right\} + l_i(x)_{/n}\mathfrak{d}_u(x),$$

an welche die vier Barwerte ${}_{/n}\mathfrak{d}(x)$, ${}_{/n}\mathfrak{d}_a(x)$, ${}_{/n}\mathfrak{d}_u(x)$ und ${}_{//n}\mathfrak{d}_i(x)$ gebunden erscheinen.

Man kann die Beziehung auch auf „logische Art" ableiten, indem man zuerst den Betrag, der zur Deckung der $l(x)$ Menschen ohne Unterschied auf ihre Dienstfähigkeit oder Dienstunfähigkeit erforderlich ist, feststellt (linke Seite von (18)) und dann die Einzelbeträge, die zur Deckung der $l_a(x)$ Aktiven unter ihnen und der $l_i(x)$ Invaliden notwendig sind (rechte Seite von (18)). Da nun der erstere Betrag dem letzteren Gesamtbetrag gleich sein muß, so gilt die Beziehung (18).

Mit Rücksicht auf die Gleichung (14) kann man (18) die Form

$$(19) \qquad l(x)_{/n}\mathfrak{d}(x) = l_a(x)_{/n}\mathfrak{d}_{a+i}(x) + l_i(x)_{/n}\mathfrak{d}_u(x)$$

geben, in welcher Form sie ebenfalls durch Induktion abgeleitet werden kann. Außerdem ergibt (18) für den Barwert einer temporären Anwartschaft auf Invalidenpension die Formel[1])

$$(20) \qquad {}_{//n}\mathfrak{d}_i(x) = {}_{/n}\mathfrak{d}(x) - {}_{/n}\mathfrak{d}_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\left\{{}_{/n}\mathfrak{d}(x) - {}_{/n}\mathfrak{d}_u(x)\right\}$$

und (14′) für denselben Barwert die evidente Formel

$$(20') \qquad {}_{//n}\mathfrak{d}_i(x) = {}_{/n}\mathfrak{d}_{a+i}(x) - {}_{/n}\mathfrak{d}_a(x).$$

### B. Beziehungen zwischen den Barwerten der vorschüssigen Renten.

Wenn man in der Beziehung (18) die Dauer $n$ bis zum höchsten in der Absterbeordnung der fingierten Gesellschaft $l(x)$ vorkommenden Alter ausdehnt, also

$$n = \omega + 1 - x$$

setzt, so erhält man eine lineare Beziehung[2])

$$(21) \qquad l(x)\,\mathfrak{d}(x) = l_a(x)\left\{\mathfrak{d}_a(x) + \mathfrak{d}_i(x)\right\} + l_i(x)\,\mathfrak{d}_u(x)$$

---

1) Vergleiche: F. Möller, Eine Besprechung der Invaliditätsversicherung. Assekuranz-Jahrbuch, Jahrg. XVIII, Wien 1897, und Hamza, a. a. O. p. 171.

2) Vergleiche: Ch. Moser, Untersuchungen und Materialien zur Beurteilung der sechs Entwürfe für eine Hülfskasse des Personals der eidg. Verwaltungen.

zwischen den vier Fundamentalwerten $\mathfrak{d}(x)$, $\mathfrak{d}_a(x)$, $\mathfrak{d}_u(x)$ und $\mathfrak{d}_i(x)$ und analog aus (19) die Beziehung

(22) $$l(x)\,\mathfrak{d}(x) = l_a(x)\,\mathfrak{d}_{a+i}(x) + l_i(x)\,\mathfrak{d}_u(x)$$

zwischen den Barwerten $\mathfrak{d}(x)$, $\mathfrak{d}_{a+i}(x)$ und $\mathfrak{d}_u(x)$.

Die Gleichungen (21) und (22) ergeben für die Barwerte $\mathfrak{d}_i(x)$ und $\mathfrak{d}_{a+i}(x)$ die Formeln

(23) $$\mathfrak{d}_i(x) = \mathfrak{d}(x) - \mathfrak{d}_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\{\mathfrak{d}(x) - \mathfrak{d}_u(x)\}$$

und

(24) $$\mathfrak{d}_{a+i}(x) = \frac{l(x)}{l_a(x)}\mathfrak{d}(x) - \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\mathfrak{d}_u(x).$$

Die letztere ist zur tatsächlichen Berechnung der Aktiven-Leibrente besonders geeignet. Die Formel (23) bildet zu der Gleichung ($\iota$) ein vollständiges Analogon, sowie es die Formel (11′) zur Gleichung ($\vartheta$) war. Es sei noch bemerkt, daß der Barwert $\mathfrak{d}_i(x)$ auch auf andere Weise als durch (4) oder (23) angesetzt zu werden pflegt.[1] Handelt es sich aber darum, welche Art man zu theoretischen Ausführungen am passendsten zu wählen hat, so ergibt die in § 6 A durchgeführte logische Ableitung der Formel für diesen Barwert, daß die Definition von $\mathfrak{d}_i(x)$ mittels der Formel (23), also auch (4), die zweckmäßigste ist und bei einer Aufstellung von Beziehungen zwischen den Fundamentalgrößen $\mathfrak{d}(x)$, $\mathfrak{d}_a(x)$, ... dem Fundamentalprinzip gemäß *einzig* zur Anwendung kommen kann.

**C. Beziehungen zwischen den Barwerten der aufgeschobenen Renten.**

Zwischen den vier Barwerten

$$_{n/}\mathfrak{d}(x),\quad {}_{n/}\mathfrak{d}_a(x),\quad {}_{n/}\mathfrak{d}_u(x)\quad \text{und}\quad {}_{n//}\mathfrak{d}_i(x)$$

besteht eine lineare Beziehung. Man erhält selbe durch Elimination des Barwertes für aufgeschobene Leibrente eines Aktiven aus den Gleichungen (13) und (13′), nämlich

(25) $$l(x)\,{}_{n/}\mathfrak{d}(x) = l_a(x)\left\{{}_{n/}\mathfrak{d}_a(x) + {}_{n//}\mathfrak{d}_i(x)\right\} + l_i(x+n)\frac{l_u(x)}{l_u(x+n)}\cdot{}_{n/}\mathfrak{d}_u(x)$$

Man kann jedoch diese Beziehung auch aus der Gleichung (21) mit Hilfe der Formeln (2), (2a), (2u) und (5) folgern.

---

Bern 1901; E. Hamza, a. a. O. p. 166; H. Meyer, Zur Berechnung der Anwartschaft auf Invalidenpension. Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Band III, Berlin 1903, S. 534—539; und betreffs einer Streitfrage: Zeitschrift für die gesamte Versicherungsmathematik, Band III, S. 228 (J. Eggenberger), S. 534 (H. Meyer), Band IV, (1904), S. 129 (J. Eggenberger) und S. 131 (H. Meyer).

1) Siehe z. B. H. Meyer, Beiträge zur Pensionsversicherung, Jena 1903.

Der Gleichung (13′) kann man aber auch die Form

$$(26)\qquad l(x)\,{}_{n|}\mathfrak{a}(x) = l_a(x)\,{}_{n|}\mathfrak{a}_{a+i}(x) + l_i(x)\,{}_{n|}\mathfrak{a}_u(x)$$

geben, welche ein Analogon zu (19) und (22) bildet. Die Beziehungen (19), (22) und (26) selbst bilden ein Analogon der Grundbeziehung ($\varepsilon$). Es ist also stets

$$l(x)\,\varphi(x) = l_a(x)\,\varphi_{a+i}(x) + l_i(x)\,\varphi_u(x),$$

unter $\varphi$ die Funktionen $p$, $q$, $\mathfrak{a}$, ${}_{|n}\mathfrak{a}$, ${}_{n|}\mathfrak{a}$ verstanden.

Es sei noch erwähnt, daß wenn man von der Gleichung (25) die Identität

$$l(x+n)v^n = l_a(x+n)v^n + l_i(x+n)v^n$$

abzieht, man die Beziehung

$$(25')\qquad l(x)\,{}_{n+1|}\mathfrak{a}(x) = l_a(x)\left\{{}_{n+1|}\mathfrak{a}(x) + {}_{n||}\mathfrak{a}_i(x)\right\} + l_i(x+n)\cdot\frac{l_u(x)}{l_u(x+n)}\,{}_{n+1|}\mathfrak{a}_u(x)$$

erhält. Es läßt sich aus (25) oder (25′) der Barwert ${}_{n||}\mathfrak{a}_i(x)$ berechnen, die ihn darstellenden Formeln sind aber zu tatsächlichen Berechnungen nicht einfach genug. Denn aus (25) folgt z. B.

$$(27)\qquad {}_{n||}\mathfrak{a}_i(x) = {}_{n|}\mathfrak{a}(x) - {}_{n|}\mathfrak{a}_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\left\{{}_{n|}\mathfrak{a}(x) - \frac{l_u(x)}{l_i(x)}\cdot\frac{l_i(x+n)}{l_u(x+n)}\cdot{}_{n|}\mathfrak{a}_u(x)\right\};$$

man kann aber von dieser Formel aus zu dem Barwert der im § 7A zu behandelnden Versicherung sehr einfach gelangen.

**D) Beziehung zwischen den Leibrentenwerten eines Aktiven.**

Addiert man zueinander die Gleichungen (19) und (26), berücksichtigt ferner die Gleichungen (3), (3a), (3u) und benutzt dann für die Summengleichung die Beziehung (22), so erhält man die Gleichung

$$\mathfrak{a}_{a+i}(x) = {}_{|n}\mathfrak{a}_{a+i}(x) + {}_{n|}\mathfrak{a}_{a+i}(x),$$

welche wohl auch auf „logische Art“ aufgestellt werden kann und aus der sich die Beziehung

$$(3a+i)\qquad {}_{|n}\mathfrak{a}_{a+i}(x) = \mathfrak{a}_{a+i}(x) - {}_{n|}\mathfrak{a}_{a+i}(x)$$

ergibt. Diese bildet ein vollständiges Analogon zu (3) und möge daher mit (3a + i) bezeichnet werden.

## § 7. Aufgeschobene temporäre Rentenansprüche.

### A. Barwert der Anwartschaft auf aufgeschobene Invalidenpension.

Bevor zu den kombinierten Rentenansprüchen, die zugleich aufgeschoben und temporär sind, übergangen wird, sei vorerst der Barwert der aufgeschobenen Invalidenpension kurz abgeleitet.

Es sei unter

$$_{n/}\mathfrak{d}_i(x)$$

der Wert derjenigen Versicherung verstanden, den ein $x$-jähriger Aktiver zu zahlen hat, wenn er im Invaliditätsfalle nach einer Wartezeit von $n$ Jahren eine jährliche Invalidenpension von 1 beziehen will, ob er nun nach oder vor Ablauf dieser $n$ Jahre invalid geworden ist, und die also frühestens zu Anfang seines $(x+n)$ten Lebensjahres zahlbar wird, falls er bereits invalide ist. Demzufolge ist

$$_{n/}\mathfrak{d}_i(x) = {}_{n//}\mathfrak{d}_i(x) + \frac{1}{l_a(x)} \sum_{k=1}^{n} i(x+k) v^k \, {}_{n-k/}\mathfrak{d}_u(x+k)$$

oder, wenn man sich der schon in § 3B benutzten Gleichung

$$\frac{l_i(x+n)}{l_u(x+n)} - \frac{l_i(x)}{l_u(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i(x+k)}{l_u(x+k)}$$

und der Formel (2u) bedient,

$$(28) \qquad _{n/}\mathfrak{d}_i(x) = {}_{n//}\mathfrak{d}_i(x) + {}_{n/}\mathfrak{d}_u(x) \frac{l_u(x)}{l_a(x)} \left\{ \frac{l_i(x+n)}{l_u(x+n)} - \frac{l_i(x)}{l_u(x)} \right\},$$

welche in Verbindung mit (27) die den Formeln (20) und (23) analoge Formel

$$(29) \qquad _{n/}\mathfrak{d}_i(x) = {}_{n/}\mathfrak{d}(x) - {}_{n/}\mathfrak{d}_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)} \left\{ {}_{n/}\mathfrak{d}(x) - {}_{n/}\mathfrak{d}_u(x) \right\}$$

hervorbringt[1]). Außerdem steht dieser Barwert mit dem Barwert $_{n/}\mathfrak{d}_{a+i}(x)$ in einfacher Verbindung; es findet nämlich zufolge (13′) die Beziehung

$$(30) \qquad _{n/}\mathfrak{d}_i(x) = {}_{n/}\mathfrak{d}_{a+i}(x) - {}_{n/}\mathfrak{d}_a(x)$$

statt.

In der Form

$$(29^*) \qquad l(x)\, {}_{n/}\mathfrak{d}(x) = l_a(x) \left\{ {}_{n/}\mathfrak{d}_a(x) + {}_{n/}\mathfrak{d}_i(x) \right\} + l_i(x)\, {}_{n/}\mathfrak{d}_u(x)$$

bildet die Gleichung (29) ein Analogon zu den Beziehungen (19) und (21) und kann auch direkt auf „logische Art“ abgeleitet werden.

1) Vgl. **Hamza**, a. a. O., p. 171.

Auch zwischen den drei Barwerten $\mathfrak{d}_i(x)$, ${}_{//n}\mathfrak{d}_i(x)$ und ${}_{n/}\mathfrak{d}_i(x)$ besteht eine einfache Beziehung; man erhält selbe durch Elimination des Barwertes ${}_{n//}\mathfrak{d}_i(x)$ aus den Gleichungen (9*) und (28). Sie lautet

$$(30^*) \qquad {}_{//n}\mathfrak{d}_i(x) = \mathfrak{d}_i(x) - {}_{n/}\mathfrak{d}_i(x).$$

### B. Barwert der temporären Anwartschaft auf um $n$ Jahre aufgeschobene Invalidenpension.

Der Barwert der um $n$ Jahre aufgeschobenen und $t$ Jahre hindurch dauernden temporären vorschüssigen Rente eines $x$-jährigen Mannes, zahlbar während des Zustandes $z$, ist bekanntlich durch die Formel

$$(31) \qquad \begin{aligned} {}_{n/t}\mathfrak{d}_z(x) &= {}_{n/}\mathfrak{d}_z(x) - {}_{n+t/}\mathfrak{d}_z(x) \\ &= \frac{D_z(x+n)}{D_z(x)}\mathfrak{d}_z(x+n) - \frac{D_z(x+n+t)}{D_z(x)}\mathfrak{d}_z(x+n+t) \end{aligned}$$

gegeben. Im besonderen erhält man für $n = 0$ die Beziehung (3).

Es sei nun die einmalige Prämie für eine Versicherung zu bestimmen, welche ein $x$-jähriger Aktiver eingeht, um sich den Anspruch auf eine lebenslängliche, vorschüssige, vom Anfang des dem Invalidisierungsjahre folgenden Jahres ab zahlbare Invalidenpension 1 zu sichern, falls er nach $n$ Karenzjahren während der folgenden $t$ Jahre invalid erklärt werden sollte. Der Barwert dieser temporären Anwartschaft auf um $n$ Jahre aufgeschobene vorschüssige Invalidenpension berechnet sich nach dem Fundamentalprinzip aus der Beziehung

$$\begin{aligned} D_a(x)\,{}_{n/t}\mathfrak{d}_i(x) &= \sum D_{ai}(x+n+1)\,\mathfrak{d}_u(x+n+1) \\ &\quad - \sum D_{ai}(x+n+t+1)\,\mathfrak{d}_u(x+n+t+1), \end{aligned}$$

so daß

$$(32) \qquad \begin{aligned} {}_{n/t}\mathfrak{d}_i(x) &= \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\mathfrak{d}_i(x+n) - \frac{D_a(x+n+t)}{D_a(x)}\mathfrak{d}_i(x+n+t) \\ &= {}_{n//}\mathfrak{d}_i(x) - {}_{n+t//}\mathfrak{d}_i(x) \end{aligned}$$

sein wird. Diese Beziehung bildet ein Analogon der Gleichung (31) und geht für $n = 0$ in die Gleichung (3i) für $t = n$ über.

### C. Barwert der Anwartschaft auf aufgeschobene temporäre Invalidenpension.

Soll ein $x$-jähriger Aktiver auf eine um $n$ Jahre aufgeschobene Invalidenpension, welche im Invalidisierungsfalle während der folgenden $t$ Jahre vorschußweise vom Anfang des dem Invalidisierungsjahre

folgenden Jahres ab im Betrage von jährlich 1 zahlbar ist, und zwar unabhängig davon, wann er invalide geworden ist, so ist offenbar dieser Barwert durch die Differenz

$$(33) \qquad {}_{n//t}ä_i(x) = {}_{n/}ä_i(x) - {}_{n+t/}ä_i(x)$$

gegeben. Ersetzt man nun die Glieder der Differenz durch die ihnen zufolge der Formel (29) entsprechenden Ausdrücke und benutzt sodann die Gleichung (31) für $z = a$, $z = u$ und $ä_z = ä$, so erhält man die Beziehung[1])

$$(34) \qquad {}_{n//t}ä_i(x) = {}_{n/t}ä(x) - {}_{n/t}ä_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\left\{{}_{n/t}ä(x) - {}_{n/t}ä_u(x)\right\},$$

welche ein Analogon zu der Formel (20) bildet. Auf die Form

$$(35) \qquad l(x)\,{}_{n/t}ä(x) = l_a(x)\left\{{}_{n/t}ä_a(x) + {}_{n//t}ä_i(x)\right\} + l_i(x)\,{}_{n/t}ä_u(x).$$

gebracht, läßt sie sich durch Induktion aufstellen.

### D. Barwert des aufgeschobenen Anspruches auf temporäre Invalidenpension.

(Anwartschaft auf temporäre Invalidenpension mit $n$ Karenzjahren.)

Es handle sich um den Barwert des Anspruches eines $x$-jährigen Aktiven, im Invalidisierungsfalle auf eine nach einer Karenz von $n$ Jahren während der darauffolgenden $t$ Jahre hindurch vorschußweise zahlbare Invalidenpension von jährlich 1 versichert zu sein, zu deren Bezug er nur dann berechtigt ist, falls er frühestens in seinem $(x + n)$ten Lebensjahre invalid ward. Nach dem Prinzip von Gleichheit der Leistung und der wahrscheinlichsten Gegenleistung erhält man die Beziehung

$$D_a(x)\,{}_{n\sim t}ä_i(x) = \sum_{k=0}^{t-1} D_i(x+n+k) - \frac{D_i(x+n)}{D_u(x+n)}\sum_{k=0}^{t-1} D_u(x+n+k),$$

aus welcher sich zufolge (5') und (2u) der zu bestimmende Barwert, dargestellt mittels der Formel

$$(36) \qquad {}_{n\sim t}ä_i(x) = {}_{n//}ä_i(x) - {}_{n+t//}ä_i(x) + {}_{n+t/}ä_u(x)\,\frac{l_u(x)}{l_a(x)}\left\{\frac{l_i(x+n)}{l_u(x+n)} - \frac{l_i(x+n+t)}{l_a(x+n+t)}\right\}$$

---

1) Vgl. E. Hamza, p. 172.

ergibt. Der einfachste Fall $n = 0$ führt zu der Beziehung (9*) zurück. Infolge von (5) und (2u) läßt sich (36) auch auf die Form

$$(37)\quad \begin{aligned} {}_{n\sim t}\mathfrak{a}_i(x) = \frac{1}{D_a(x)}\Big[ & D_a(x+n)\,\mathfrak{a}_i(x+n) - D_a(x+n+t)\,\mathfrak{a}_i(x+n+t) \\ & + \mathfrak{a}_u(x+n+t)\left\{D_u(x+n+t)\cdot\frac{D_i(x+n)}{D_u(x+n)} - D_i(x+n+t)\right\}\Big] \end{aligned}$$

bringen, in welcher Gestalt sie sich als Formel für den betreffenden Barwert zur praktischen Berechnung am besten eignen dürfte.

Zufolge der Beziehung (32) läßt sich die Formel (36) auch so anschreiben

$$(38)\quad {}_{n\sim t}\mathfrak{a}_i(x) = {}_{n/t}\mathfrak{a}_i(x) + {}_{n+t/}\mathfrak{a}_u(x)\,\frac{l_u(x)}{l_a(x)}\left\{\frac{l_i(x+n)}{l_u(x+n)} - \frac{l_i(x+n+t)}{l_u(x+n+t)}\right\}.$$

*Bemerkung.* Für die besonderen Werte $n = 0$ bzw. $t = \omega + 1 - x - n = T$ ergeben die Formeln (32), (33) und (36) die Zeichenbeziehungen

$$(39)\quad \begin{aligned} {}_{0/t}\mathfrak{a}_i(x) &= {}_{/t}\mathfrak{a}_i(x) \\ {}_{0//t}\mathfrak{a}_i(x) &= {}_{//t}\mathfrak{a}_i(x) \\ {}_{0\sim t}\mathfrak{a}_i(x) &= {}_{//t}\mathfrak{a}_i(x) \end{aligned}$$

bzw.

$$(39^*)\quad \begin{aligned} {}_{n/T}\mathfrak{a}_i(x) &= {}_{n//}\mathfrak{a}_i(x) \\ {}_{n//T}\mathfrak{a}_i(x) &= {}_{n/}\mathfrak{a}_i(x) \\ {}_{n\sim T}\mathfrak{a}_i(x) &= {}_{n//}\mathfrak{a}_i(x). \end{aligned}$$

## § 8. Ansprüche auf steigende Renten.

### A. Einmalige Prämien der Erlebensversicherung.

Auf Grund der im § 2 angeführten Hauptformeln des hier behandelten Teiles der Versicherungsrechnung und gemäß des Fundamentalprinzips berechnen sich die Barwerte der steigenden Leibrenten, wie folgt:

1. Der Barwert der ganzjährigen vorschüssigen, lebenslänglich von dem Anfangsbetrage 1 um je 1 jährlich steigenden Leibrente eines $x$-jährigen Menschen

$$(40)\quad \overset{<}{\mathfrak{a}}(x) = \frac{\sum\sum D(x)}{D(x)}.$$

2. Der Barwert der vorschüssigen, lebenslänglichen, von dem Anfangsbetrag $\alpha$ um je $\delta$ Einheiten steigende Leibrente eines $x$-jährigen Menschen

$$(41)\quad \overset{\alpha<\delta}{\mathfrak{a}}(x) = (\alpha - \delta)\,\mathfrak{a}(x) + \delta\,\overset{<}{\mathfrak{a}}(x).$$

3. Der Barwert der vorschüssigen um $n$ Jahre aufgeschobenen, von dem Anfangsbetrag 1 um je 1 jährlich steigenden Leibrente eines $x$-jährigen Menschen

$$(42) \qquad {}_{n/}\overset{<}{\mathfrak{a}}(x) = \frac{D(x+n)}{D(x)}\,\overset{<}{\mathfrak{a}}(x+n).$$

4. Der Barwert der vorschüssigen um $n$ Jahre aufgeschobenen und von dem Anfangsbetrage $\alpha$ um je $\delta$ jährlich steigenden Leibrente eines $x$-jährigen Menschen

$$(43) \qquad {}_{n/}\overset{\alpha<\delta}{\mathfrak{a}}(x) = \frac{D(x+n)}{D(x)}\left\{(\alpha-\delta)\,\mathfrak{a}(x+n) + \delta\,\overset{<}{\mathfrak{a}}(x+n)\right\}$$

$$(43^*) \qquad = (\alpha-\delta)\,{}_{n/}\mathfrak{a}(x) + \delta\,{}_{n/}\overset{<}{\mathfrak{a}}(x)$$

5. Der Barwert der vorschüssigen, temporär während der ersten $t$ Jahre von dem Anfangswert 1 je um 1 jährlich steigenden und dann auf dem Betrage $t$ konstant bleibenden Leibrente eines $x$-jährigen Menschen

$$(44) \qquad \overset{t[}{\mathfrak{a}}(x) = \frac{\sum\sum D(x) - \sum\sum D(x+t)}{D(x)} = \overset{<}{\mathfrak{a}}(x) - \frac{D(x+t)}{D(x)}\,\overset{<}{\mathfrak{a}}(x+t)$$

$$(44^*) \qquad = \overset{<}{\mathfrak{a}}(x) - {}_{t/}\overset{<}{\mathfrak{a}}(x).$$

6. Der Barwert der vorschüssigen, temporär während der ersten $t$ Jahre von dem Anfangswert $\alpha$ um je $\delta$ Einheiten jährlich steigenden und dann mit dem Betrage $\alpha + (t-1)\delta$ konstant bleibenden Leibrente eines $x$-jährigen Menschen

$$(45) \qquad {}^{\alpha}\overset{t[\delta}{\mathfrak{a}}(x) = (\alpha-\delta)\,\mathfrak{a}(x) + \delta\,\overset{t[}{\mathfrak{a}}(x)$$

$$(45^*) \qquad = (\alpha-\delta)\,\mathfrak{a}(x) + \delta\left\{\overset{<}{\mathfrak{a}}(x) - {}_{t/}\overset{<}{\mathfrak{a}}(x)\right\}.$$

7. Der Barwert der vorschüssigen, lebenslänglichen, um $n$ Jahre aufgeschobenen, von dem Anfangswert 1 um je 1 jährlich während der $t$ darauffolgenden Jahre steigenden und dann mit dem Betrage $t$ konstant bleibenden Leibrente eines $x$-jährigen Menschen

$$(46) \qquad {}_{n/}\overset{t[}{\mathfrak{a}}(x) = {}_{n/}\overset{<}{\mathfrak{a}}(x) - {}_{n+t/}\overset{<}{\mathfrak{a}}(x).$$

8. Der Barwert der vorschüssigen um $n$ Jahre aufgeschobenen, von dem Anfangsbetrag $\alpha$ um je $\delta$ jährlich während der $t$ darauffolgenden Jahre steigenden und dann mit dem Betrage $\alpha + \delta(t-1)$ konstant bleibenden Leibrente von $(x)$

$$(47)\qquad {}_{n/}\overset{t[\delta}{{}^{\alpha}\mathfrak{d}}(x) = (\alpha - \delta)\,{}_{n/}\mathfrak{d}(x) + \delta\left\{{}_{n/}\overset{<}{\mathfrak{d}}(x) - {}_{n+t/}\overset{<}{\mathfrak{d}}(x)\right\}$$

$$(47^*)\qquad = (\alpha - \delta)\,{}_{n/}\mathfrak{d}(x) + \delta\,{}_{n/}\overset{t[}{\mathfrak{d}}(x)$$

$$(47^{**})\qquad = {}_{n/}\overset{\alpha<\delta}{\mathfrak{d}}(x) - \delta\,{}_{n+t/}\overset{<}{\mathfrak{d}}(x)$$

$$(47\dagger)\qquad = \frac{D(x+n)}{D(x)} \cdot \overset{t[\delta}{{}^{\alpha}\mathfrak{d}}(x+n)\,.$$

Die Formeln (40) bis (47†) gelten mutatis mutandis ebenfalls für entsprechende Barwerte eines $x$-jährigen Aktiven, wenn die vorschüssigen Renten während der Dauer der Aktivität, oder eines $x$-jährigen Invaliden, wenn die Renten während der Dauer der Invalidität ausgezahlt gedacht werden. Hängt man also dementsprechend den Buchstaben $\mathfrak{d}$ und $D$ den Index $a$ beziehungsweise $u$ an, so mögen die so entstehenden Formeln mit (40a) bis (47†a), bezw. mit (40u) bis (47†u) bezeichnet werden.

### B. Barwert der Anwartschaft auf Invalidenpension, die mit der Anzahl der Dienstjahre steigt.

Soll ein $x$-jähriger Aktiver den Anspruch auf vorschüssige, *mit jedem Jahre der Aktivität* von dem Anfangsbetrage 1 um je 1 jährlich steigende Pension, welche zum erstenmal zu Anfang des dem Invalidisierungsjahre folgenden Jahres zur Auszahlung gelangt, erwerben, so bestimmt sich der Barwert einer solchen Anwartschaft auf steigende Invalidenpension gemäß des Fundamentalprinzips durch die Formel

$$(48)\qquad \overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x) = \frac{\sum\sum D_{ai}(x+1)\,\mathfrak{d}_u(x+1)}{D_a(x)}$$

$$(48^*)\qquad = \frac{\sum\sum D_a(x)\,\mathfrak{d}_i(x)}{D_a(x)}\,.$$

Ist aber $\alpha$ der Anfangswert und $\delta$ der jährliche Zuschlag, so ist offenbar

$$\overset{\alpha<\delta}{\mathfrak{d}_i}(x) = \frac{1}{D_a(x)}\left\{(\alpha-\delta)\sum D_{ai}(x+1)\,\mathfrak{d}_u(x+1) + \delta\sum\sum D_{ai}(x+1)\,\mathfrak{d}_u(x+1)\right\}$$

oder zufolge (4) und (48)

$$(49)\qquad \overset{\alpha<\delta}{\mathfrak{d}_i}(x) = (\alpha - \delta)\,\mathfrak{d}_i(x) + \delta\,\overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x)\,.$$

Zur wirklichen Berechnung des Barwertes $\overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x)$ kann aber nebst der Formel (48) auch noch eine andere dienen; man erhält sie nach der Methode von Karup, und zwar wird

$$(48^{**})\qquad \overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x) = \frac{\sum\sum D_i(x) - \sum D_i(x)\,\mathfrak{a}_u(x)}{D_a(x)}.$$

Diese Formel wird später von Nutzen sein.

**C. Barwert der Anwartschaft auf steigende Invalidenpension mit $n$ Karenzjahren.**

Um den Barwert des Anspruches eines $x$-jährigen Aktiven auf vorschüssige, mit jedem Jahre der Aktivität, das auf die Karenz von $n$ Jahren folgt, von dem Anfangsbetrag 1 um je 1 jährlich steigende Invalidenpension zu bestimmen, hat man in der Formel (48) die ersten $n$ Summen fortzulassen, so daß

$$(50)\qquad {}_{n/\!/}\overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x) = \frac{\sum\sum D_{ai}(x+n+1)\,\mathfrak{a}_u(x+n+1)}{D_a(x)}$$

$$(50^{*})\qquad = \frac{\sum\sum D_i(x+n) - \sum D_i(x+n)\,\mathfrak{a}_u(x+n)}{D_a(x)}$$

$$(50^{**})\qquad = \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\,\overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x+n)$$

sein wird.

Der nach der Karenz von $n$ Jahren invalid gewordene, frühere $x$-jährige Aktive erhält also zu Anfang seines $(x+n+k)$-ten Jahres den Betrag von $k$ Einheiten ausbezahlt, wenn er während des $(n+k)$-ten Versicherungsjahres invalid geworden ist, und diesen erhält er dann jährlich bis zu seinem Ableben.

Soll nun wieder $\alpha$ den Anfangswert und $\delta$ die jährliche Steigerung bedeuten, so wird

$$(51)\qquad {}_{n/\!/}\overset{\alpha<\delta}{\mathfrak{a}_i}(x) = \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\left\{(\alpha-\delta)\mathfrak{a}_i(x+n) + \delta\,\overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x+n)\right\}$$

$$= (\alpha-\delta)\,{}_{n/\!/}\mathfrak{a}_i(x) + \delta\,{}_{n/\!/}\overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x)$$

Einheiten betragen.

**D. Barwert der Anwartschaft auf temporär steigende Invalidenpension.**

Um den Barwert der Anwartschaft eines $x$-jährigen Aktiven auf vorschüssige, temporär mit jedem der $t$ ersten Jahre der Aktivität von dem Anfangswert 1 um je 1 jährlich steigende Invalidenpension

zu bestimmen, hat man aus der Summenformel (48) nur die $t$ ersten Summen zu behalten, so daß sich für den gesuchten Wert der Ausdruck

$$(52) \qquad \overset{t[}{\ddot{a}}_i(x) = \frac{1}{D_a(x)}\{\sum\sum D_{ai}(x+1)\ddot{a}_u(x+1) - \sum\sum D_{ai}(x+t+1)\ddot{a}_u(x+t+1)\}$$

ergibt, oder zufolge (48) und (50) bezw. (50**) die Formeln

$$(52^*) \qquad \overset{t[}{\ddot{a}}_i(x) = \overset{<}{\ddot{a}}_i(x) - {}_{t/\!/}\overset{<}{\ddot{a}}_i(x)$$

bezw.

$$(52^{**}) \qquad = \overset{<}{\ddot{a}}_i(x) - \frac{D_a(x+t)}{D_a(x)}\overset{<}{\ddot{a}}_i(x+t).$$

Die der Methode von Karup entsprechende Formel für diesen Barwert lautet infolge von (48**)

$$(52\dagger) \qquad \overset{t[}{\ddot{a}}_i(x) = \frac{1}{D_a(x)}[\sum\sum D_i(x) - \sum\sum D_i(x+t) - \sum D_i(x)\ddot{a}_u(x) + \sum D_i(x+t)\ddot{a}_u(x+t)].$$

Soll aber die Rente mit dem Betrage $\alpha$ anfangen und jährlich während der Dauer $t$ um den Betrag $\delta$ steigen, so ist mit Bezug auf (52) bezw. (52**)

$$(53) \qquad {}^{\alpha}\overset{t[\delta}{\ddot{a}}_i(x) = (\alpha - \delta)\ddot{a}_i(x) + \delta\overset{t[}{\ddot{a}}_i(x)$$

bezw.

$$(53^*) \qquad = (\alpha - \delta)\ddot{a}_i(x) + \delta\left\{\overset{<}{\ddot{a}}_i(x) - \frac{D_a(x+t)}{D_a(x)}\overset{<}{\ddot{a}}_i(x+t)\right\}.$$

**E. Barwert der Anwartschaft auf temporär steigende Invalidenpension mit $n$ Karenzjahren.**

Um auch den Wert der Anwartschaft eines $x$-jährigen Aktiven auf vorschüssige, an eine Karenz von $n$ Jahren gebundene und mit jedem der darauffolgenden $t$ Jahre der Aktivität vom Anfangswert 1 um je 1 jährlich steigende Invalidenpension festzustellen, haben wir aus dem Summenausdrucke (48) die mittleren aufeinander folgenden $t$ Summen, von der $(n+1)$-sten angefangen, zu behalten; es ergibt sich demnach für den gesuchten Barwert der Ausdruck

$${}_{n/\!/}\overset{t[}{\ddot{a}}_i(x) = \frac{1}{D_a(x)}\{\sum\sum D_{ai}(x+n+1)\ddot{a}_u(x+n+1) - \sum\sum D_{ai}(x+n+t+1)\ddot{a}_u(x+n+t+1)\}$$

oder infolge von (50)

$$(54)\qquad {}_{n//}\overset{t[}{\mathfrak{d}}_i(x) = {}_{n//}\overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x) - {}_{n+t//}\overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x).$$

Bei einem Anfangswert $\alpha$ und jährlichem Zuschlag $\delta$ hat man alsdann

$$(55)\qquad {}_{n//}\overset{t[\delta}{{}^{\alpha}\mathfrak{d}}_i(x) = (\alpha - \delta)\,{}_{n//}\mathfrak{d}_i(x) + \delta\left\{{}_{n//}\overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x) - {}_{n+t//}\overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x)\right\}$$

bezw.

$$(55^*)\qquad = (\alpha - \delta)\,{}_{n//}\mathfrak{d}_i(x) + \delta\,{}_{n//}\overset{t[}{\mathfrak{d}}_i(x)$$

oder

$$(55^{**})\qquad = {}_{n//}\overset{\alpha<\delta}{\mathfrak{d}}_i(x) - {}_{n+t//}\overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x)$$

oder schließlich

$$(55\dagger)\qquad = \frac{D_a(x+n)}{D_a(x)}\,\overset{t[\delta}{{}^{\alpha}\mathfrak{d}}_i(x+n).$$

### F. Barwert der Anwartschaft auf aufgeschobene, steigende Invalidenpension.

Es sei noch der Wert des Anspruches auf die folgende Versicherung festgestellt. Ein $x$-jähriger Aktiver will berechtigt sein, im Invalidisierungsfalle, wann auch derselbe erfolgen mag, nach Ablauf von $n$ Jahren, von dem Augenblicke des Versicherungsabschlusses ab gerechnet, eine jährliche vorschüssige Rente von 1 zu beziehen, vom $(n+1)$-sten Versicherungsjahre ab aber (im Invalidisierungsfalle) eine Rente von 2, vom $(n+2)$-ten Versicherungsjahre jährlich 3 usw. Dann bestimmt sich der Barwert einer solchen Versicherung mit Hilfe der Formel (28) durch den Ausdruck

$${}_{n/}\overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x) = {}_{n//}\overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x) + \frac{l_u(x)}{l_a(x)}\sum_0^k {}_{n+k/}\mathfrak{d}_u(x)\left\{\frac{l_i(x+n+k)}{l_u(x+n+k)} - \frac{l_i(x)}{l_u(x)}\right\}$$

oder

$$(56)\qquad {}_{n/}\overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x) = {}_{n//}\overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x) - {}_{n/}\overset{<}{\mathfrak{d}}_u(x)\frac{l_i(x)}{l_a(x)} + \frac{\sum D_i(x+n)\,\mathfrak{d}_u(x+n)}{D_a(x)}.$$

Für $n = 0$ ist ${}_{0//}\overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x) = \overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x)$, dagegen bedeutet ${}_{0/}\overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x)$ den Barwert der Anwartschaft auf mit jedem *Versicherungs*jahre um 1 steigende Invalidenpension, und dieser möge kurz mit $\overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x)$ bezeichnet werden. Die Beziehung (56) ergibt also für $n = 0$ den Barwert

$$(57)\qquad \overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x) = \overset{<}{\mathfrak{d}}_i(x) - \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\overset{<}{\mathfrak{d}}_u(x) + \frac{\sum D_i(x)\,\mathfrak{d}_u(x)}{D_a(x)}.$$

Man kann jedoch die Formel (57) mit Hilfe der Gleichung (48**) umformen, indem man $\overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x)$ durch seinen dortselbst gegebenen Ausdruck ersetzt; man erhält so den einfachen Ausdruck

$$(57^*) \qquad \overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x) = \frac{\sum\sum D_i(x) - D_i(x)\mathfrak{a}_u(x)}{D_a(x)},$$

und auf ebensolche Art

$$(56^*) \qquad {}_{n/}\overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x) = \frac{\sum\sum D_i(x+n)}{D_a(x)} - {}_{n/}\overset{<}{\mathfrak{a}}_u(x)\frac{l_i(x)}{l_a(x)}.$$

## § 9. Beziehungen zwischen den Barwerten der Ansprüche auf steigende Renten.

### A. Beziehungen zwischen den vorschüssigen steigenden Rentenansprüchen.

Multipliziert man die Gleichung (40a) und (57*) mit $D_a(x)$, die Gleichung (40u) mit $D_i(x)$ und addiert dann dieselben, so erhält man die Beziehung

$$(58) \qquad l(x)\overset{<}{\mathfrak{a}}(x) = l_a(x)\left\{\overset{<}{\mathfrak{a}}_a(x) + \overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x)\right\} + l_i(x)\overset{<}{\mathfrak{a}}_u(x),$$

welche ein Analogon der Beziehungen (19), (21), (29*) und (35) bildet. Aus ihr berechnet sich der Wert $\overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x)$ durch die Formel

$$(59) \qquad \overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x) = \overset{<}{\mathfrak{a}}(x) - \overset{<}{\mathfrak{a}}_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\left\{\overset{<}{\mathfrak{a}}(x) - \overset{<}{\mathfrak{a}}_u(x)\right\}$$

und in dem speziellen Falle $p(x) = p_u(x)$ durch die Differenz

$$\overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x) = \overset{<}{\mathfrak{a}}(x) - \overset{<}{\mathfrak{a}}_a(x).$$

Dagegen besteht zwischen den vier Barwerten $\overset{<}{\mathfrak{a}}(x)$, $\overset{<}{\mathfrak{a}}_a(x)$, $\overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x)$ und $\overset{<}{\mathfrak{a}}_u(x)$ keine ähnliche Beziehung, sondern zwischen den drei ersten Werten und dem Barwerte $\mathfrak{a}_u(x)$ die folgende:

$$(60) \qquad \overset{<}{\mathfrak{a}}(x) = \frac{l_a(x)}{l(x)}\left\{\overset{<}{\mathfrak{a}}_a(x) + \overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x)\right\} + \frac{\sum D_i(x)\mathfrak{a}_u(x)}{D(x)},$$

aus der sich für $\overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x)$ die Formel

$$(61) \qquad \overset{<}{\mathfrak{a}}_i(x) = \overset{<}{\mathfrak{a}}(x) - \overset{<}{\mathfrak{a}}_a(x) + \frac{D_i(x)\overset{<}{\mathfrak{a}}(x) - \sum D_i(x)\mathfrak{a}_u(x)}{D_a(x)}$$

ergibt. Es sei noch bemerkt, daß man die Gleichung (58) auch durch Induktion direkt aufstellen kann.

**B. Beziehung zwischen den temporär steigenden Rentenansprüchen.**

Benutzt man nacheinander die Gleichungen (58) für $x+t$, (44), (44a), (44u), (57*) und (56†), so erhält man aus (58) die Gleichung

$$(62)\qquad \begin{aligned} D(x)\overset{t\lceil}{\ddot a}(x) = D_a(x)\left\{\overset{t\lceil}{\ddot a}_a(x) + \overset{t\lceil}{\ddot a}_i(x)\right\} + \sum D_i(x)\ddot a_u(x) \\ - \sum D_i(x+t)\ddot a_u(x+t), \end{aligned}$$

welche eine Beziehung zwischen den drei temporär steigenden Rentenansprüchen

$$\overset{t\lceil}{\ddot a}(x),\quad \overset{t\lceil}{\ddot a}_a(x),\quad \overset{t\lceil}{\ddot a}_i(x)$$

darstellt. Setzt man $t = \omega + 1 - x$ ein, so erhält man die Beziehung (60). Aus (62) berechnet sich der Wert von $\overset{t\lceil}{\ddot a}_i(x)$ als

$$(63)\quad \overset{t\lceil}{\ddot a}_i(x) = \overset{t\lceil}{\ddot a}(x) - \overset{t\lceil}{\ddot a}_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\cdot\overset{t\lceil}{\ddot a}(x) - \frac{\sum D_i(x)\ddot a_u(x) - \sum D_i(x+t)\ddot a_u(x+t)}{D_a(x)}.$$

**C. Beziehungen zwischen den aufgeschobenen, steigenden Rentenansprüchen.**

Multipliziert man die Gleichung (42a) und (56*) mit $D_a(x)$, die Gleichung (42u) mit $D_i(x)$ und addiert dieselben, so erhält man die Beziehung

$$(64)\qquad l(x)\,{}_{n/}\overset{<}{\ddot a}(x) = l_a(x)\left\{{}_{n/}\overset{<}{\ddot a}_a(x) + {}_{n/}\overset{<}{\ddot a}_i(x)\right\} + l_i(x)\,{}_{n/}\overset{<}{\ddot a}_u(x),$$

welche wieder ein Analogon der Gleichung (19) bildet.

Dagegen findet zwischen ${}_{n//}\overset{<}{\ddot a}_i(x)$ und den Barwerten ${}_{n/}\overset{<}{\ddot a}(x)$ und ${}_{n/}\ddot a_u(x)$ die folgende Gleichung statt:

$$D(x)\,{}_{n/}\overset{<}{\ddot a}(x) = D_a(x)\left\{{}_{n/}\overset{<}{\ddot a}_a(x) + {}_{n//}\overset{<}{\ddot a}_i(x)\right\} + \sum D_i(x+n)\ddot a_u(x+n),$$

aus der sich der Barwert ${}_{n//}\overset{<}{\ddot a}_i(x)$ mit

$${}_{n//}\overset{<}{\ddot a}_i(x) = {}_{n/}\overset{<}{\ddot a}(x) - {}_{n/}\overset{<}{\ddot a}_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\,{}_{n/}\overset{<}{\ddot a}(x) - \frac{\sum D_i(x+n)\ddot a_u(x+n)}{D_a(x)}.$$

berechnet.

Es sei hervorgehoben, daß in der Praxis — wie sich gezeigt hat — Beziehungen solcher Art aus mehrfachen Gründen von Nutzen sein können.

Im Juli 1906.

# Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper.

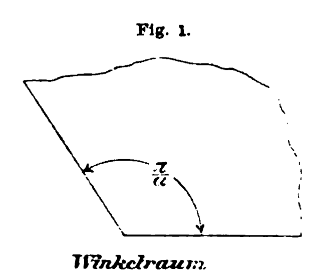
Auf Grund eines Ansatzes von A. Sommerfeld.

Von K. Wieghardt in Braunschweig.

## Einleitung.

Die Zahl der Spannungsverteilungen in elastischen Körpern, die man wirklich — d. h. zahlenmäßig — ermitteln kann, ist nicht groß, selbst wenn man sich auf ebene Probleme beschränkt, wo sich die ganze Frage auf die Lösung einer Randwertaufgabe für eine einzige Funktion (Airysche Spannungsfunktion) zurückführen läßt. In der Tat kann man gar nicht daran denken, jedes beliebige ebene Spannungsproblem, welches etwa die Technik der mathematischen Analysis darbietet, ohne weiteres zu lösen, vielmehr wird man Schritt vor Schritt von bereits gelösten Randwertaufgaben aus durch vorsichtige Verallgemeinerung weiter zu kommen suchen. Wenn sich dann dabei doch wertvolle Aufschlüsse über technische oder physikalische Fragen ergeben, um so besser. Dies ist nun bei den von uns im Folgenden gegebenen Lösungen der Fall hinsichtlich gewisser Fragen, die mit dem *Spalten und Zerreißen elastischer Körper* zusammenhängen.

Fig. 1.




*Winkelraum.*

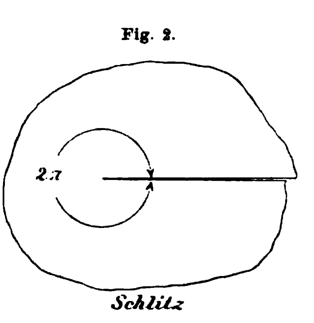
Je einfacher ein Bereich, desto leichter kann man für ihn Randwertaufgaben lösen. Einfachste Bereiche sind beispielsweise die Kreisfläche und die Halbebene, nächst einfache die mit diesen in irgendeiner mathematischen Beziehung verwandten Gebiete. Dementsprechend begegnen wir in der Literatur über $\nabla\nabla F(xy)=0$ — um diese Differentialgleichung handelt es sich bei unseren Randwertaufgaben — Ansätzen, welche die Randwertaufgaben einerseits für Ovale (italienische Autoren), anderseits für Rechtecke (Matthieu) und *Winkelräume* (Venske) von beliebiger Öffnung $\frac{\pi}{\alpha}$ (s. Fig. 1)[1]) behandeln.

Wir beschäftigen uns im Folgenden nur mit dem *Winkelraum* und zwar im ersten Teile der Abhandlung hauptsächlich mit den speziellen Fällen, in denen $\frac{1}{\alpha}$ ganzzahlig ist, wie z. B. bei der Halbebene und

1) Die krummlinige Begrenzung unserer Winkelräume ist nicht als wirklich vorhanden anzusehen; die Winkelräume gehen ins Unendliche.

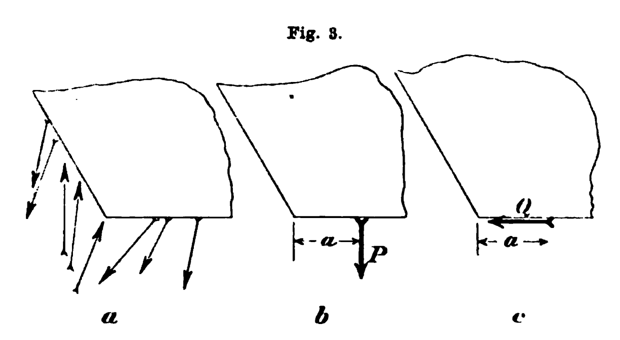
beim *Schlitz* (Fig. 2); im zweiten Teile mit dem Winkelraum von beliebiger Öffnung und mit dem einen Spezialfalle des *rechtwinkligen* Winkelraumes (von der Öffnung $\frac{3}{2}\pi$). In welchem Verhältnis unsere Entwicklungen zu den oben erwähnten und zum Teil unrichtigen Ansätzen von Venske stehen, wird an geeigneter Stelle gesagt.

Fig. 2.




Als das äußerste Ziel unserer Bemühungen können wir die Lösung folgender Aufgabe bezeichnen: An den beiden Rändern eines beliebigen Winkelraumes greifen irgendwelche Kräfte an (Fig. 3a); welche elastische Spannungen werden dadurch in unserm Winkelraum hervorgerufen, falls wir noch verlangen, daß die Spannungen im Unendlichen so stark unendlich klein wie nur eben möglich werden? Indessen leuchtet ein, daß es zur Lösung dieser Aufgabe im wesentlichen ausreicht, die Spannungsprobleme von Fig. 3b und c zu lösen, in denen die dicken Pfeile, wie im folgenden immer, „konzentrierte" Kräfte — endliche Kräfte, die an einem Punkte des Randes angreifend gedacht sind — bedeuten sollen. Denn aus diesen Lösungen kann die Lösung unserer allgemeineren Auf-

Fig. 3.




gabe offenbar durch Überlagerung gewonnen werden. Überdies stellt sich heraus, daß die Aufgaben von Fig. 3b und c mathematisch so stark miteinander verwandt sind, daß man von der Lösung der einen ohne wesentlich neue Überlegungen sofort zur Lösung der andern gelangt, so daß eine eingehendere Behandlung nur einer von beiden erforderlich scheint. Demgemäß ist nun dieses unser zentrales Problem:

*An dem einen Rande eines Winkelraumes von der beliebigen Öffnung* $\frac{\pi}{\alpha}$ *greift in der Entfernung a von der „Ecke" des Winkelraumes (dem Scheitel des Winkels) eine konzentrierte Kraft P senkrecht zu diesem Rande an; welche Spannungen werden dadurch in unserm Winkelraum*

*hervorgerufen, falls wir noch verlangen, daß die Spannungen im Unendlichen so stark wie nur irgend möglich unendlich klein werden?*

Für den Spezialfall der Halbebene $\left(\frac{\pi}{\alpha} = \pi\right)$ ist dieses Problem bekanntlich seit langem von Boussinesq[1]) gelöst; für die Spezialfälle:

$$\frac{\pi}{\alpha} = \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad \ldots$$

wird es im ersten Teile der vorliegenden Abhandlung durch einen Ansatz von A. Sommerfeld gelöst, für den allgemeinen Fall in dem zweiten Teile durch ein auf dem Sommerfeldschen Ansatze aufgebautes alternierendes Verfahren von K. Wieghardt.

Die Untersuchung der Spannungen *in der Nähe der Ecke*, die auch auf den Spezialfall des Schlitzes und seine Stellung gegenüber dem allgemeinen Problem Licht wirft, rührt ebenfalls allein von K. Wieghardt her; dasselbe gilt von den Festigkeitsbetrachtungen und im wesentlichen auch von den Überlegungen über die Eindeutigkeit der Lösungen.

## I. Über den Vorgang des Spaltens elastischer Körper.

### 1. Die Boussinesqsche Halbebene.

Bei Boussinesq handelt es sich eigentlich um den Halb*raum;* übertragen wir die betreffenden Überlegungen sinngemäß auf die Halb*ebene* und berücksichtigen ferner den Zusammenhang unseres Spannungsproblems mit der Airyschen Spannungsfunktion[2]), so ergibt sich folgende Darstellung: Die drei Spannungskomponenten $\sigma_x$, $\sigma_y$ und $\tau_{xy}$ (Fig. 4 links) müssen so durch die zweiten Differentialquotienten einer und derselben Funktion $F(xy)$ — eben der Airyschen Spannungsfunktion — bestimmt werden, daß erstens:

$$(1) \qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \; ^{3})$$

ist, daß zweitens $F$ der Differentialgleichung:

$$(2) \qquad \nabla\nabla F(xy) = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \; ^{4})$$

1) S. z. B. Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge 1882. S. 248 ff. (Neuerdings von Dr. A. Timpe ins Deutsche übersetzt; Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1907.)

2) und 3) Airy: On the strain in the interior of beams. Phil. Trans. 1863 (ersch. 1864), Bd. 153.

4) J. H. Michell: On the direct determination of stress in an elastic solid etc. Proc. Lond. Math. Soc., Bd. 31 (1900). Man vgl. auch: F. Klein u. K. Wieghardt: Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme usw. Archiv d. Math. u. Phys. III. Reihe. VIII. 1. Heft.

im ganzen Gebiete unserer Halbebene genügt, daß drittens längs des Randes $y = 0$ die Randbedingungen:

$\tau_{xy} = 0$ durchweg,

$\sigma_y = 0$ für $x < -\varepsilon$ und $x > +\varepsilon$, wo $\varepsilon$ eine beliebig kleine Größe ist,

$$(3) \qquad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_y dx = P$$

erfüllt sind und daß viertens die Spannungen in unendlicher Entfernung $R$ vom Koordinatenursprung $O$ von der Ordnung $\frac{1}{R}$ unendlich klein werden.

Die letzte, zunächst vielleicht willkürlich erscheinende Bedingung erklärt sich sofort, wenn wir überlegen, daß einerseits die Spannungen im Unendlichen so stark wie nur möglich unendlich klein werden sollten, anderseits aber immerhin so groß sein müssen, daß sie in ihrer Gesamtheit der endlichen Kraft $P$ das Gleichgewicht halten. Ist nun $\frac{1}{R^\lambda}$ die Größenordnung der einzelnen Spannung, so ist die Größenordnung der Gesamtheit gleich:

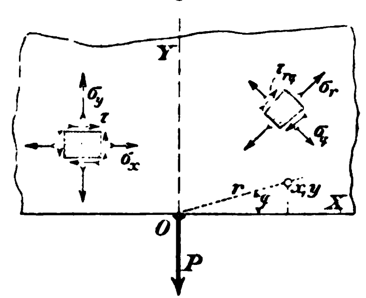
$$\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{1}{R^\lambda} \cdot R d\varphi = \frac{\pi}{\alpha} \cdot \frac{1}{R^{\lambda-1}},$$

also nur dann endlich, wenn $\lambda = 1$ ist.

Um zu erkennen, mit welcher Randwertaufgabe für $\nabla\nabla F = 0$ das Boussinesqsche Spannungsproblem identisch ist, müssen wir noch in die Randbedingungen (3) die Spannungsfunktion vermöge der Gleichung (1) einführen. Das gibt für den Rand $y = 0$ die Bedingungen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial y} = c_1 \text{ durchweg,} \\ &\frac{\partial F}{\partial x} = c_2 \text{ für } x \leqq 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial x} = c_2 + P \text{ für } x \geqq 0, \end{aligned}$$

Fig. 4.




wo $c_1$ und $c_2$ zwei willkürliche Konstante sind, die wir einfach gleich Null setzen können. Führen wir nun außer $x$ und $y$ noch Polarkoordinaten $r$ und $\varphi$ nach Fig. 4 ein, so lautet unsre Randwertaufgabe so: *Gesucht eine Funktion $F(xy)$, welche in der*

*ganzen positiven Halbebene die Differentialgleichung* $\nabla\nabla F(xy) = 0$ *befriedigt, auf der X-Achse den Bedingungen:*

$$(5)\qquad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0 \text{ durchweg},\quad \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \text{ für } \varphi = \pi,\quad \frac{\partial F}{\partial r} = P \text{ für } \varphi = 0$$

*genügt und deren zweite Differentialquotienten nach x und y sich im Unendlichen wie* $\frac{1}{R}$ *verhalten.*

Es erhebt sich sofort die Frage, ob eine etwa existierende Lösung dieser Aufgabe auch die einzig mögliche ist (abgesehen von einer belanglosen additiven Konstante). Ihre Beantwortung, sowie die Beantwortung aller überhaupt auftauchenden *Eindeutigkeitsfragen* rücken wir indessen aus Zweckmäßigkeitsgründen an den Schluß der ganzen Abhandlung. Vorläufig werde die Eindeutigkeit der Lösungen stillschweigend als bestehend angenommen.

Unsere Aufgabe wird durch folgende Spannungsfunktion gelöst:

$$(6)\qquad F(r,\varphi) = \frac{P}{\pi} r[\sin\varphi + (\pi - \varphi)\cos\varphi];$$

sie führt, wie sofort nachgerechnet werden kann, auf folgende — rein „radiale“ — Spannungsverteilung in Polarspannungskomponenten (s. Fig. 4):

$$(7)\qquad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = \frac{2P}{\pi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0, \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = 0. \end{aligned}$$

Dies ist schon nahezu die Form, in welcher wir die Lösung der Boussinesqschen Aufgabe nachher brauchen.

## 2. Der Ansatz von A. Sommerfeld.

Beim Übergange von der Boussinesqschen Halbebene zum Winkelraum von der beliebigen Öffnung $\frac{\pi}{\alpha}$ werden wir zweckmäßig statt des $\varphi r$-Polarkoordinatensystems von vorhin das $\psi\varrho$-System der Fig. 5 einführen, dessen Ursprung gegen den des vorigen um die Strecke $a$ nach links gerückt ist; außerdem behalten wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem bei und zwar das der Fig. 5.

Unserm Spannungsproblem für den allgemeinen Winkelraum ist dann folgende Randwertaufgabe für die Spannungsfunktion $F$ äquivalent: *Gesucht eine Funktion F, welche im ganzen Winkelraum die Differential-*

*gleichung* $\nabla\nabla F = 0$ *befriedigt, deren zweite nach* $x$ *und* $y$ *genommene Differentialquotienten in unendlicher Entfernung* $\varrho$ *von der Ecke so stark wie* $\frac{1}{\varrho}$ *verschwinden und welche auf den beiden Rändern des Winkelraumes den Bedingungen genügt:*

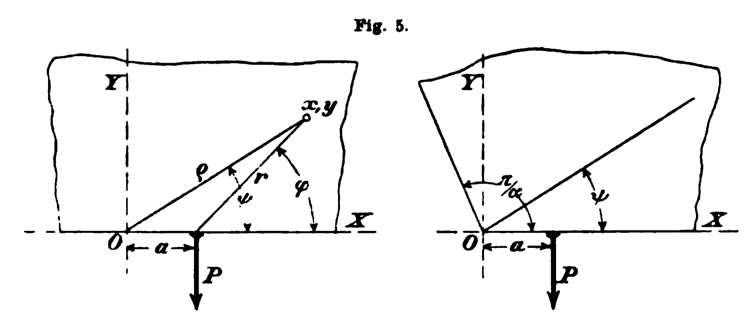
a) *auf dem Rande* $\psi = 0$:

(8) $\frac{\partial F}{\partial \psi} = 0$ *durchweg,* $\frac{\partial F}{\partial \varrho} = 0$ *für* $\varrho \leqq a$, $\frac{\partial F}{\partial \varrho} = P$ *für* $\varrho \geqq a$;

b) *auf dem Rande* $\psi = \frac{\pi}{\alpha}$:

$\frac{\partial F}{\partial \psi} = 0$ *durchweg,* $\frac{\partial F}{\partial \varrho} = 0$ *durchweg.*

Fig. 5.




Der Gedanke des Sommerfeldschen Ansatzes zur Lösung dieser Aufgabe ist nun der, sie auf eine Randwertaufgabe für die einfachere Differentialgleichung:

$$\nabla \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

dadurch zurückzuführen, daß man als unbekannte Funktion nicht die Spannungsfunktion selbst ansieht, sondern ihr $\nabla$, also:

$$(9)\quad \begin{aligned} \Phi = \nabla F &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} \\ &= \sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\varphi = \sigma_\varrho + \sigma_\psi. \end{aligned}$$

Damit ist freilich nicht ohne weiteres eine bestimmte Randwertaufgabe für diese Funktion $\Phi$ gekennzeichnet, denn wenn man auch die Randbedingungen für $\frac{\partial F}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial F}{\partial \psi}$ kennt, so kennt man von vornherein doch keineswegs die Randbedingungen für $\Phi$ $\left(\text{oder die Ableitung dieser Funktion nach der Normalen, } \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)$. Nachdem indessen Sommerfeld nach Einführung der komplexen Koordinaten:

$$(10)\qquad \xi = x + iy = \varrho e^{i\psi}, \quad \eta = x - iy = \varrho e^{-i\psi}$$

in die Gl. (7) das $\nabla F$ von Boussinesq auf die Form:

$$\Phi = \nabla F = 4\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{P}{i\pi}\left(\frac{1}{\xi - a} - \frac{1}{\eta - a}\right) \tag{11}$$

gebracht hatte, ergab sich ihm durch glückliche Verallgemeinerung das $\nabla F$ für den beliebigen Winkelraum $\pi/\alpha$ in der Form:

$$\Phi = \nabla F = -\frac{\alpha P}{i\pi}\cdot\left(\frac{\xi^{\alpha-1}}{\xi^\alpha - a^\alpha} - \frac{\eta^{\alpha-1}}{\eta^\alpha - a^\alpha}\right). \tag{12}$$

In der Tat hat diese Funktion folgende notwendigen Eigenschaften: 1. Das Verhalten im Unendlichen ist wie $\frac{1}{\varrho}$, wie es sein muß, 2. die Differentialgleichung $\nabla \Phi = 0$ ist befriedigt, denn deren allgemeines Integral ist ja bekanntlich $f(\xi) + g(\eta)$, wo $f$ und $g$ beliebige Funktionen sind, 3. die Singularität von $\Phi$ im Punkte $\xi = \eta = a$ ist von demselben Charakter wie die der Funktion $\Phi$ von (11) in demselben Punkte, denn auf der Linie $\psi = 0$ ist $\xi^{\alpha-1} = \eta^{\alpha-1}$, der Sommerfeldsche Ansatz liefert also in diesem Punkte eine konzentrierte Kraft senkrecht zum Rande; endlich sorgt der in (12) hinzugefügte Faktor $\alpha$ dafür, daß die Größe dieser Kraft wiederum gleich $P$ wird.

Aber wie steht es nun mit der Erfüllung der Randbedingungen? Allgemein liefert die Integration von (12):

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -\frac{\alpha P}{4i\pi}\cdot\left[\frac{\eta\xi^{\alpha-1}}{\xi^\alpha - a^\alpha} - \frac{1}{\alpha}\log(\eta^\alpha - a^\alpha) + \Theta(\xi)\right],$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = -\frac{\alpha P}{4i\pi}\cdot\left[-\frac{\xi\eta^{\alpha-1}}{\eta^\alpha - a^\alpha} + \frac{1}{\alpha}\log(\xi^\alpha - a^\alpha) + \Psi(\eta)\right],$$

wo $\Theta$ und $\Psi$ zwei willkürliche Funktionen sind. Diese können wir nun so bestimmen, daß auf dem *einen* der beiden Ränder, etwa $\psi = 0$, alles in Ordnung kommt; dazu haben wir nur zu setzen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \xi} &= -\frac{\alpha P}{4i\pi}\cdot\left[\frac{(\eta-\xi)\xi^{\alpha-1}}{\xi^\alpha - a^\alpha} - \frac{1}{\alpha}\cdot\log\frac{\eta^\alpha - a^\alpha}{\xi^\alpha - a^\alpha}\right],\\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= -\frac{\alpha P}{4i\pi}\cdot\left[\frac{(\eta-\xi)\eta^{\alpha-1}}{\eta^\alpha - a^\alpha} - \frac{1}{\alpha}\cdot\log\frac{\eta^\alpha - a^\alpha}{\xi^\alpha - a^\alpha}\right],\end{aligned} \tag{13}$$

denn wenn wir von der Ecke aus unsern Rand entlang gehen, so springt der Logarithmus beim Übergange über die Stelle $\xi = \eta = a$ um den Betrag $2i\pi$, und mithin gelten auf dem Rande die Gleichungen:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial \psi} = i\left[\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \eta}\right] = 0 \text{ durchweg,}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho \leqq a,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = P \quad \text{für} \quad \varrho \geqq a,$$

alle Randbedingungen (8) sind hier also erfüllt. Sollen nun aber unsere Ausdrücke (13) die Bedingungen (8) auch auf dem andern Rande erfüllen, so müßten dort wegen der allgemein gültigen Beziehungen (10) und:

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = i\left[\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial F}{\partial \eta}\right], \quad \frac{\partial F}{\partial \varrho} = \frac{1}{\varrho}\left[\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial F}{\partial \eta}\right]$$

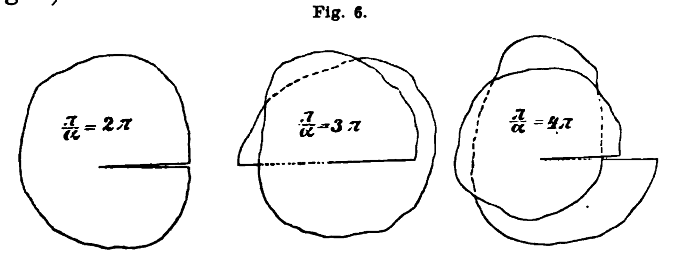
die beiden Gleichungen:

$$\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \quad \text{und} \quad \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$$

gleichzeitig befriedigt sein. Die erste ist nun zwar erfüllt, denn für unsern Rand $\psi = \frac{\pi}{\alpha}$ ist $\xi^\alpha = \eta^\alpha$, die zweite ist aber nur dann erfüllt, wenn die auf dem Rande $\psi = 0$ richtige Beziehung: $\xi = \eta$ auch auf dem Rande $\psi = \frac{\pi}{\alpha}$ erfüllt ist, d. h. wenn $\sin \frac{\pi}{\alpha}$ verschwindet.

*Mithin löst der Sommerfeldsche Ansatz unser Spannungsproblem für diejenigen Winkelräume, deren Öffnungen ganzzahlige Vielfache von $\pi$ sind* (Fig. 6).

Fig. 6.




Von diesen beansprucht unser größtes Interesse der einfache Schlitz in der unendlichen Ebene $\left(\frac{\pi}{\alpha} = 2\pi\right)$ und mit ihm wollen wir uns in den nächsten Abschnitten ausschließlich beschäftigen.

Im Hinblick auf eine ältere Veröffentlichung von O. Venske[1]) läßt sich die Frage aufwerfen, ob der Sommerfeldsche Ansatz überhaupt neu ist. Venske will nämlich die Randwertaufgabe $\nabla\nabla F = 0$ mit gegebenen $\frac{\partial F}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial F}{\partial \psi}$ ganz allgemein für jeden Winkelraum und beliebige Randbedingungen lösen. Er beruft sich dabei auf ein von Matthieu gegebenes Analogon zu den bekannten Greenschen Sätzen der Potentialtheorie und stellt demgemäß für den Winkelraum eine „zweite Greensche Funktion" auf, mit deren Hilfe die Lösung obiger Randwertaufgabe auf Quadraturen zurückgeführt wird. Bei näherem

1) O. Venske: Zur Integration der Gleichung $\nabla\nabla u = 0$ für ebene Bereiche. Nachr. v. d. Kgl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen 1901.

Zusehen findet man nun einmal, daß Venskes Greensche Funktion nicht allgemein, sondern nur für die Winkelräume richtig ist, für welche Sommerfelds Ansatz unser Spannungsproblem löst, zweitens aber — und das ist hier das Wesentliche — daß die aus dieser Greenschen Funktion erhaltene Spannungsverteilung im Unendlichen nicht das gewünschte Verhalten zeigt.

### 3. Der Schlitz; das Unendlichwerden der Spannungen in der Ecke; das Unendlichwerden von Spannungen überhaupt.

Schon eine flüchtige Betrachtung des Ausdrucks (12), in welchem jetzt $\alpha$ durch $1/2$ zu ersetzen ist, zeigt, daß die Spannungen in der Ecke ($\varrho = 0$) unendlich groß werden; es wird in der Ecke:

$$\nabla F = \frac{P}{2 i \pi} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} i \psi} - e^{\frac{1}{2} i \psi}}{\sqrt{a \varrho}}; \tag{14}$$

je nachdem wie man sich der Ecke nähert, bekommt man hieraus endliche oder unendlich große Spannungen. Nun ist freilich das Auftreten unendlich großer Spannungen in scharfen Ecken in der Elastizitätslehre nichts Ungewöhnliches — Torsionsspannungen z. B. werden unter Umständen in solchen Ecken unendlich[1]) — aber immerhin wird man jedesmal, wenn es auftritt, genau zu überlegen haben, ob und inwieweit diesem theoretischen Ergebnis etwas Wirkliches zugrunde liegen kann. Die folgenden Überlegungen werden diese allgemeinen Skrupel schärfer charakterisieren und sie gleichzeitig für den vorliegenden Fall zerstreuen.

Die aus (12) und (13) folgenden und einstweilen also mit Mißtrauen betrachteten Gleichungen:

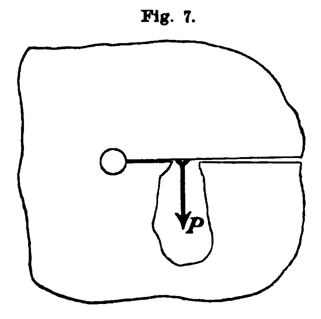
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} &= -\frac{P}{8 i \pi}\left[\frac{\xi^{-1/2}}{\xi^{1/2} - a^{1/2}} - \frac{\eta^{-1/2}}{\eta^{1/2} - a^{1/2}}\right], \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} &= -\frac{P}{8 i \pi} \cdot \frac{(\xi - \eta) \cdot \xi^{-3/2} \cdot \left[\xi^{1/2} - \frac{1}{2} a^{1/2}\right]}{(\xi^{1/2} - a^{1/2})^2}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= -\frac{P}{8 i \pi} \cdot \frac{(\xi - \eta) \cdot \eta^{-3/2} \cdot \left[\eta^{1/2} - \frac{1}{2} a^{1/2}\right]}{(\eta^{1/2} - a^{1/2})^2}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

sind jedenfalls dann völlig einwandfrei, wenn wir die Ecke selbst aus der Betrachtung ausschließen, indem wir etwa mit dem kleinen, aber

1) S. z. B. Föppl: Über die Torsion an runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. Sitzungsber. d. math.-phys. Klasse der Kgl. Bayr. Akad. d. Wiss. Bd. XXXV 1905, Heft II oder: Die Beanspruchung auf Verdrehen an einer Übergangsstelle mit scharfer Abrundung. Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1906. S. 1032.

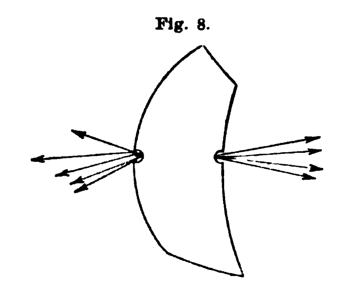
endlichen Halbmesser $\varrho'$ eine Kreisfläche um die Ecke herum aus unserm elastischen Körper fortnehmen (Fig. 7); nur stellen sie jetzt nicht mehr ohne weiteres die Lösung unseres Spannungsproblemes dar, sondern die Lösung des Spannungsproblems für den nach Fig. 7 modifizierten Schlitz bei einem äußeren Kraftangriff, der erstens aus der konzentrierten Kraft $P$ besteht, zweitens aber aus denjenigen Kräften, welche wir beim Herausschneiden der kleinen Kreisfläche längs des Umfanges des Kreises $\varrho'$ an dem elastischen Körper anbringen müssen, um das Gleichgewicht nicht zu stören. Da man nun von vornherein wird befürchten müssen, daß der Einfluß dieser letzteren Kräfte auf die Spannungen unseres modifizierten Schlitzes mit dem Einflusse der konzentrierten Kraft $P$ vergleichbar ist, ihn vielleicht gar überwiegt, so sieht es zunächst so aus, als wenn die Gleichungen (15) für unser Problem belanglos wären. Indessen ist dem nicht so. Die anzubringenden Kräfte sind nämlich, als spezifische Kräfte betrachtet, d. h. auf die Längeneinheit des Kreisumfanges ($2\pi\varrho'$) bezogen, nach (14) und (15) von der Größenordnung $\frac{1}{\sqrt{\varrho'}}$; die Resultierenden aus ihren nach irgend einer Richtung genommenen Komponenten aber sind für irgend einen Teil $2\pi\psi$ des Kreisumfanges von der Größenordnung $\frac{1}{\sqrt{\varrho'}} \cdot \varrho' \cdot \psi$, also für verschwindendes $\varrho'$ gleich Null. Es handelt sich also, kurz gesagt, um spezifische Kräfte, die zwar unendlich groß sind, aber keine Resultierende haben.

Fig. 7.




Solche Kräfte, die allgemein offenbar dadurch charakterisiert sind, daß sie von einer Größenordnung $\varrho'^{-\beta}$ sind, wo $\lim \varrho' = 0$ und $\beta < 1$ ist, können nun aber in keiner endlichen Entfernung von ihrer Angriffsstelle Spannungen erzeugen. Ist $F$ für irgend ein endliches oder unendliches Gebiet die Spannungsfunktion, welche einem derartigen Kraftangriffe (Fig. 8) entspricht, so ist am Rande überall $F$ gleich einer beliebigen, aber festen linearen Funktion von $x$ und $y$, denn überall da am Rande, wo keine Kräfte angreifen, sind $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ konstant und der Sprung, den diese Größen machen, wenn wir beim Herumgehen auf dem Rande einen der kleinen

Fig. 8.

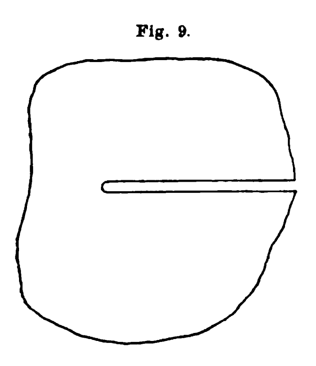


Kreise passieren, ist von der Größenordnung der Resultierenden der dort angreifenden Kräfte, also in der Grenze, wo die Halbmesser aller dieser Kreise verschwinden, gleich Null. Mithin ist $F$ auch im ganzen Bereiche gleich obiger linearen Funktion, die durch unsere unendlich großen spezifischen Kräfte erzeugten Spannungen sind also überall Null.

Hiernach dürfen wir überzeugt sein, daß die Gleichungen (15) des Sommerfeldschen Ansatzes die Spannungsverteilung, welche in unserm Schlitz durch die konzentrierte Kraft $P$ erzeugt wird, richtig darstellen. Überhaupt werden wir unendlich große Spannungen immer dann als zulässig, d. h. als durch den gegebenen Kraftangriff erzeugt ansehen, wenn sie schwächer unendlich werden als $\frac{1}{\varrho}$ für $\varrho = 0$, hingegen als unzulässig, d. h. als *nicht* durch den gegebenen Kraftangriff erzeugt, sondern vielmehr selbst die Quelle von konzentrierten Kräften bedeutend, wenn sie mindestens so stark unendlich werden wie $\frac{1}{\varrho}$ für $\varrho = 0$.

Freilich läßt sich nun noch gegen die Gleichungen (15) und überhaupt gegen unendlich große Spannungen ein anderer Einwand geltend machen. Man könnte nämlich von dem Standpunkte aus, daß dem theoretischen Auftreten einer unendlich großen Spannung an der betreffenden Stelle in Wirklichkeit ein Zerreißen, ein Bruch des Materials entsprechen müsse, einen Widerspruch darin finden, daß nach diesen Gleichungen (15) in der Ecke bei beliebig kleiner Kraft $P$ unendlich große Spannungen aufträten, während doch gewiß in Wirklichkeit nicht schon bei beliebig kleiner Kraft $P$ an der Ecke des Schlitzes ein Bruch eintrete. Darauf ließe sich nun einmal erwidern, daß es ja in Wirklichkeit eine ganz scharfe Ecke gar nicht gibt und daß in einem Schlitze mit abgerundeter Ecke (Fig. 9) die theoretischen Spannungen wahrscheinlich endlich bleiben; indessen kann man auch fragen, ob nicht vielleicht der ganze obige Standpunkt, von dem aus überhaupt nur ein Widerspruch eintritt, anfechtbar ist. Da ein elastisches Material doch nicht an einem Punkte aufreißt, sondern längs einer wenn auch kleinen Strecke, so sind vielleicht für das Eintreten eines Risses nicht die *spezifischen* Spannungen (bezw. Deformationen) maßgebend, sondern die — über kurze Strecken — *resultierenden* Spannungen (bezw. Deformationen). Erst wenn auch diese unendlich groß werden, wird man das für etwas physikalisch Unmögliches halten oder doch annehmen müssen, daß ihm in Wirklichkeit ein Materialbruch

Fig. 9.



entsprechen müsse. Im andern Falle hingegen wird man zwar das Material für stärker beansprucht halten, als wenn die spezifischen Spannungen endlich wären, aber nicht für unendlich stark beansprucht.

Haben wir uns so einmal mit unendlich großen Spannungen abgefunden, so enthält ihr Auftreten sogar erfreuliche Momente. Denn da in der Nähe der Ecke die Spannungen so unverhältnismäßig groß werden, so werden wir die ganze Spannungsverteilung (15) in der Nähe der Ecke mit guter Annäherung auf den Fall übertragen dürfen, daß unser Schlitz im Endlichen irgendwie begrenzt ist, was in Wirklichkeit natürlich immer der Fall ist. Damit ist dann unser Interesse überhaupt auf die Spannungsverteilung *in der Nähe der Ecke* konzentriert. Für die Durchführung der Rechnungen ist das äußerst angenehm, da die im allgemeinen recht verwickelten Ausdrücke (15) sich in der Nähe der Ecke bedeutend vereinfachen lassen.

4. Die Spannungen in der Nähe der Ecke; die Richtung des auftretenden Risses; das Spalten eines elastischen Körpers.

In der Ecke ist die Spannungsverteilung durch die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{P}{8 i \pi} \cdot \frac{1}{a^{1/2}} \cdot \left(\xi^{-1/2} - \eta^{-1/2}\right), \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} &= \frac{P}{8 i \pi} \cdot \frac{1}{a^{1/2}} \cdot \frac{1}{2}(\xi - \eta) \cdot \xi^{-3/2}, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= \frac{P}{8 i \pi} \cdot \frac{1}{a^{1/2}} \cdot \frac{1}{2}(\xi - \eta) \cdot \eta^{-3/2}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

gegeben, wie man leicht aus den Gleichungen (15) ableitet. Für die polaren Spannungskomponenten:

$$
\begin{aligned}
\sigma_\varrho &= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2}, \\
\varrho_\psi &= \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2}, \\
\tau_{\varrho\psi} &= -\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

ergeben sich dann mit Hilfe der Gleichungen (10) und der daraus folgenden allgemeinen Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial \varrho} &= \frac{1}{\eta}\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial F}{\partial \eta}, \\
\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} &= -\frac{1}{\eta}\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{\xi}{\eta}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} &= \frac{\xi}{\eta}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}. \\
-\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial \psi}\right) &= -i\left(\frac{\xi}{\eta}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

die allgemeinen Gleichungen:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \sigma_\varrho + \sigma_\psi &= 4\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\partial\eta}, \\ \sigma_\varrho - \sigma_\psi &= -2\left[\frac{\xi}{\eta}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}\right], \\ \tau_{\varrho\psi} &= -i\left[\frac{\xi}{\eta}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} - \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}\right]. \end{aligned}$$

Für die Spannungsverteilung in der Nähe der Ecke bekommen wir hieraus mit Berücksichtigung der Gleichungen (16) schließlich folgende Darstellung:

$$(20)\qquad \begin{aligned} \sigma_\varrho + \sigma_\psi &= -\frac{P}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{a\varrho}}\cdot\sin\tfrac{1}{2}\psi, \\ \sigma_\varrho - \sigma_\psi &= -\frac{P}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{a\varrho}}\cdot\tfrac{1}{2}\sin\psi\cos\tfrac{1}{2}\psi, \\ \tau_{\varrho\psi} &= +\frac{P}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{a\varrho}}\cdot\tfrac{1}{4}\sin\psi\sin\tfrac{1}{2}\psi. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen wollen wir nun benutzen, um, soweit das möglich scheint, diejenigen Fragen zu beantworten, welche man hinsichtlich der *Festigkeit* unseres Schlitzes gegenüber einem Kraftangriffe $P$ stellen kann. Man wird fragen: Wie groß muß, wenn die sog. Festigkeitszahlen unseres elastischen Materials bekannt sind, die Kraft $P$ mindestens sein, damit ein Materialbruch eintritt? Und weiterhin: An welcher Stelle und in welcher Richtung wird der Bruch eintreten?

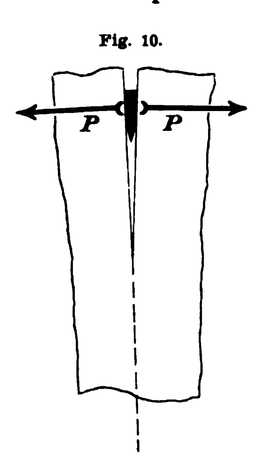
Auf die erste Frage müssen wir die Antwort schuldig bleiben, da ja in der Ecke unendliche Spannungen bei noch so kleinem $P$ auftreten, also nach den üblichen Festigkeitshypothesen bei noch so kleiner Kraft $P$ ein Bruch auftreten müßte, was in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Mit diesem Zwiespalt haben wir uns ja weiter oben abgefunden und ihn eben den üblichen Festigkeitshypothesen zur Last gelegt.

Zweifellos aber werden wir aus dem Auftreten unendlicher Spannungen an der Ecke den Schluß ziehen dürfen, daß der Bruch, wenn er überhaupt eintritt, jedenfalls an der Ecke beginnt. Im folgenden unternehmen wir nun den Versuch, auch die Frage nach der *Richtung* des eintretenden Bruches auf Grund der üblichen Festigkeitshypothesen aus den Gleichungen (20) heraus zu beantworten, indem wir uns erlauben, dort von dem unendlichen Faktor $\varrho^{-1/2}$ abzusehen und nur die dann verbleibenden Winkelfunktionen als allein maßgebend zur Entscheidung dieser Frage anzusehen.

Abgesehen von einer verwickelten, von Mohr[1]) aufgestellten Hypothese, gibt es wesentlich zwei für uns in Betracht kommende Hypothesen über die Richtung eines eintretenden Bruches von elastischem Material; eine *„Schubspannungshypothese“*, welche annimmt, die Richtung des Bruches sei identisch mit einer der beiden Richtungen der an der Bruchstelle herrschenden maximalen Schubspannungen, und eine *„Zugspannungshypothese“*, wonach die Bruchrichtung senkrecht stehen soll zu der Richtung der an der Bruchstelle herrschenden maximalen Zugspannung (wobei von vornherein vorausgesetzt ist, daß nach Lage der Dinge ein Zerdrücken nicht in Betracht kommen kann, wohl aber ein Zerreißen). Für zähe Körper wie Schmiedeeisen scheint allenfalls die Schubspannungshypothese, für spröde wie Gußeisen vielleicht mehr die Zugspannungshypothese den wirklichen Verhältnissen zu entsprechen.

Wenn wir uns fernerhin auf *negative* $P$ beschränken, so erreichen wir damit einmal, daß an der Ecke ein Zerdrücken des Materials nicht in Frage kommen kann, so daß die Zugspannungshypothese anwendbar ist und anderseits, daß wir das theoretische Abbild eines in Wirklichkeit häufig (meist allerdings an unhomogenem Material) geübten Vorganges, des *Spaltens* elastischen Materiales, bekommen. Beim Spalten treten zwar eigentlich zwei symmetrische Kräfte $P$ auf (Fig. 10), was wir aber deshalb nicht zu berücksichtigen brauchen, weil unsere Spannungsverteilung ohnehin, bei nur einer Kraft $P$, *in der Nähe der Ecke* zur Mittelachse des Spaltvorganges völlig symmetrisch ist, eine Tatsache, die aus den Gleichungen (20) sofort in die Augen springt, wenn man dort $\psi$ mit $2\pi - \psi$ vertauscht und welche übrigens im zweiten Teile der vorliegenden Abhandlung weitere Aufklärung findet.

Fig. 10.




Die Anwendung der beiden Festigkeitshypothesen auf unsern Schlitz soll nun darin bestehen, daß wir zunächst fragen: Für welchen Winkel $\psi_0$, bezw. $\psi_0'$ erreicht in der Ecke der Absolutwert der sogenannten maximalen Schubspannung, nämlich der Ausdruck:

$$\left|\sqrt{\left(\frac{\sigma_\varphi - \sigma_\psi}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi\psi}^2}\right| \tag{21}$$

1) O. Mohr: Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials? Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Berlin 1906. Wilh. Ernst & Sohn.

bezw. die sog. maximale Zugspannung, nämlich der Ausdruck:

$$\frac{\sigma_\varrho + \sigma_\psi}{2} + \left| \sqrt{\left(\frac{\sigma_\varrho - \sigma_\psi}{2}\right)^2 + \tau_{\varrho\psi}^2} \right| \tag{22}$$

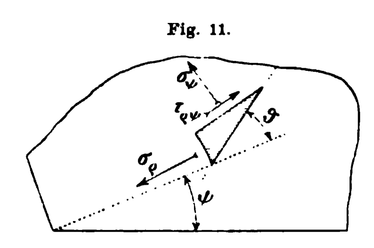
einen größten Wert? Und weiterhin: Wie sind diese beiden Größen gerichtet? Die erhaltenen Richtungen, bezw. die dazu senkrecht stehende, identifizieren wir alsdann mit den nach den beiden Festigkeitshypothesen möglichen Richtungen eines an der Ecke beginnenden Materialbruches.

Bezeichnen wir allgemein die Richtungen der sogenannten Hauptspannungen gemäß Fig. 11 mit $\psi + \vartheta$; so gilt für den Winkel $\vartheta$ die Gleichung:

$$\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2\tau_{\varrho\psi}}{\sigma_\varrho - \sigma_\psi},$$

woraus sich für $\vartheta$ mit Berücksichtigung der Gleichungen (20) die Werte:

Fig. 11.



$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{4} + k\pi,$$

$$\vartheta_2 = \pi - \frac{\psi}{4} + k'\pi$$

ergeben, wo $k$ und $k'$ beliebige ganze Zahlen sind; die möglichen Richtungen des Bruches, wie er nach der Schubspannungshypothese zu erwarten ist, sind dann die zu $\psi_0 + \vartheta_1$ und $\psi_0 + \vartheta_2$ unter $45^0$ geneigten Richtungen, während die Zugspannungshypothese als Bruchrichtung direkt eine der beiden Richtungen $\psi_0' + \vartheta_1$ oder $\psi_0' + \vartheta_2$ liefert und zwar diejenige, auf welcher die größere der beiden Hauptspannungen — eben die größte Zugspannung — senkrecht steht.

Da nun nach (20):

$$\left| \sqrt{\left(\frac{\sigma_\varrho - \sigma_\psi}{2}\right)^2 + \tau_{\varrho\psi}^2} \right| = \frac{-P}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{a\varrho}} \cdot |\sin\psi|$$

ist, so liegen bei $\psi_0 = {}^{\pi}/_{2}$ und $\psi_0 = {}^{3\pi}/_{2}$ Maxima der größten Schubspannung und dementsprechend bekommen wir als nach der Schubspannungshypothese mögliche Richtungen des beginnenden Bruches die Richtungen:

$$\psi_0 + \vartheta_1 + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},$$

wo $k$ eine beliebige ganze Zahl, d. h. also alle Richtungen:

$$\frac{2k+1}{8}\pi, \quad \text{wo } k = 0, 1, 2, \cdots$$

ist. Die Schubspannungshypothese liefert also bei unserem Schlitz nicht weniger als acht verschiedene mögliche Bruchrichtungen. *Gilt für das Material unseres Schlitzes die Schubspannungshypothese, so führt die Kenntnis der theoretischen Spannungsverteilung noch nicht dazu, mit einiger Sicherheit zu beurteilen, in welcher Richtung bei zu starker Inanspruchnahme ein Bruch zuerst eintritt und erst recht nicht, wie derselbe eventuell nachher weiterfrißt.*

Viel erfreulicher ist das Ergebnis, wenn wir die Zugspannungshypothese als zutreffend ansehen dürfen. Nach der Gl. (20) ist:

$$\frac{\sigma_\varrho+\sigma_\psi}{2}+\left|\sqrt{\left(\frac{\sigma_\varrho-\sigma_\psi}{2}\right)^2+\tau^2_{\varrho\psi}}\right| = \frac{-P}{4\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{a\varrho}}\cdot\left[2\sin\tfrac{1}{2}\psi+|\sin\psi|\right].$$

Dieser Ausdruck besitzt zwei Maxima, bei $\psi_0' = \frac{2}{3}\pi$ und $\psi_0' = \frac{4}{3}\pi$, woraus sich zunächst für die in Betracht kommenden Hauptspannungsrichtungen die Winkel $\pi/2$, $\pi$ und $3\pi/2$ ergeben. Von diesen kommen als Rißrichtungen nur diejenigen in Betracht, auf denen die größere der beiden Hauptspannungen:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_\varrho+\sigma_\psi}{2}-\left[\frac{\sigma_\varrho-\sigma_\psi}{2}\cos 2\vartheta+\tau\sin 2\vartheta\right]=\frac{\sigma_\varrho+\sigma_\psi}{2}-\frac{1}{4}\sin\psi\cos\left(2\vartheta+\frac{\psi}{2}\right),$$

wo

$$\vartheta = \vartheta_1 \quad \text{oder} \quad \vartheta_2,$$

senkrecht steht, also entweder die beiden Richtungen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ gleichzeitig oder die Richtung $\pi$ allein. Von vornherein ist wahrscheinlich daß die Richtung $\pi$ in Betracht kommen wird. In der Tat, setzen wir $\psi = \frac{2}{3}\pi$, so bekommen wir das größere $\sigma_n$, wenn wir für $\vartheta$ den Winkel $\pi/2 - \pi/6 = \pi/3$ und nicht den Winkel $\pi/3 + \pi/2$ wählen, sodaß wirklich $\psi + \vartheta = \pi$ wird.

Die Zugspannungshypothese liefert also bei unserm Schlitz eine einzige mögliche Richtung des beginnenden Risses. *Gilt für das Material unseres Schlitzes die Zugspannungshypothese, so führt die Kenntnis der theoretischen Spannungsverteilung eindeutig zu dem Schlusse, daß bei zu starker Inanspruchnahme des Materials der Schlitz in seiner eigenen Richtung aufreißt und daß ferner dieser Riß, falls er überhaupt weiterfrißt, auch nur in seiner eigenen Richtung weiterfressen kann.* (Denn nach begonnenem Risse liegen die Verhältnisse so wie vorher.)

Ferner können wir noch schließen, daß, wenn der Angriffspunkt von $P$ unverändert bleibt, der Riß nicht weiterfressen kann, falls $P$ nicht größer war, als zum Einleiten eines Risses erforderlich ist, denn nach den Gl. (20) nehmen die Spannungen mit wachsendem $a$ ab; man wird also, um ein dauerndes Spalten zu erzielen, mit dem Angriffspunkt der Kraft $P$ immer nachrücken müssen. —

Anhangsweise sei erwähnt, daß der Ansatz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{Q}{8\pi}\left[\frac{\xi^{-1/2}}{\xi^{1/2} - a^{1/2}} + \frac{\eta^{-1/2}}{\eta^{1/2} - a^{1/2}}\right] \tag{23}$$

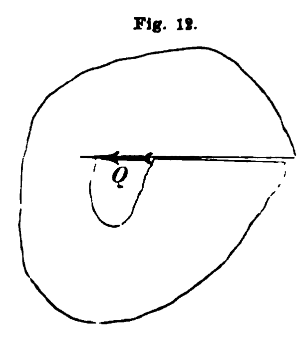


Fig. 12.

der Spannungsverteilung in unserm Schlitze entspricht, falls anstelle der Normalkraft $P$ eine tangentielle Schubkraft $Q$ angreift (Fig. 12). Die ganzen Untersuchungen lassen sich völlig analog durchführen wie in unserm Falle. Da wir ferner den Rand $\psi = 2\pi$ ebenfalls mit $P$ oder $Q$ belasten können und schließlich beliebig viele $P$ und $Q$ in verschiedenen Entfernungen $a$ von der Ecke zusammennehmen können, so können wir auch, wenigstens im Prinzip, *das allgemeine Spannungsproblem* für unsern Schlitz als gelöst ansehen.

## II. Über den Bruch eines Bachschen Versuchskörpers (bez. eines Lagerkörpers).

### 1. Problemstellung.

Im Anschlusse an einen in der Praxis vorgekommenen Bruch eines Lagerkörpers stellte Bach einige Bruchversuche mit ähnlich gestalteten Körpern (Fig. 13) an, deren Ergebnisse er in den Mitteilungen über Forschungsarbeiten schildert.[1]) Darnach trat bei genügend starker Inanspruchnahme durch Kräfte $P'$ ein Bruch ein, der in einer der beiden scharfen Ecken bei $a$ oder $a'$ begann und dann einen weiteren Verlauf nahm, der ungefähr durch die gestrichelten Linien wiederzugeben ist. Denjenigen Wert von $P'$, der gerade nötig war, um einen Bruch herbeizuführen, verglich Bach mit einer Art theoretischen kritischen Wertes von $P'$, indem er annahm, maßgebend für den Bruch sei diejenige Dehnungs-Spannung (oder auch Dehnung), welche in der scharfen Ecke senkrecht auf der Bruchrichtung stünde und diese Spannung nach einem von ihm als „üblich“ bezeichneten Verfahren ermittelte, welches auf die Annahme hinauslief, der Verlauf der zum Bruchquerschnitte senkrechten Spannungen folge über den Bruchquer-

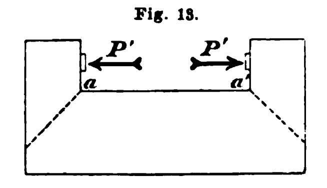


Fig. 13.

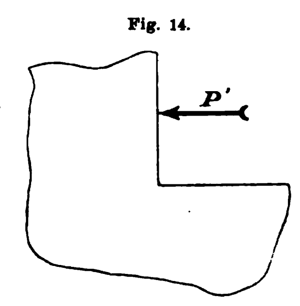
1) C. Bach: Eine Stelle an manchen Maschinenteilen, deren Beanspruchung auf Grund der üblichen Berechnung stark unterschätzt wird. Mitt. üb. Forsch. herausgeg. v. V. d. J. Heft 4, 1902.

schnitt hin einem linearen Gesetze, die neutrale Achse dieser Spannungsverteilung gehe durch den Schwerpunkt des Bruchquerschnittes (und sei senkrecht zu der durch die Kräfte $P'$ gelegten Vertikalebene). Dabei stellte sich heraus, daß diese übliche Berechnung mit der Wirklichkeit schlecht übereinstimmte, der wirkliche kritische Wert von $P'$ war etwa dreimal so klein wie der „theoretische“.

Es ist selbstverständlich, daß diese Nichtübereinstimmung nicht ohne weiteres der theoretischen Elastizitätslehre zur Last gelegt werden darf, denn durch nichts ist a priori die Annahme gerechtfertigt, daß die nach der theoretischen Elastizitätslehre in unserm Körper herrschende Spannungsverteilung über den Bruchquerschnitt hin einen linearen Verlauf der Normalspannungen liefert. Nach unseren Entwicklungen im ersten Teile dieser Abhandlung wird sich vielmehr niemand darüber wundern, daß die theoretischen Spannungen in der Ecke unendlich groß werden, während sie sonst überall endlich sind, sodaß also über irgend einen die Ecke enthaltenden Querschnitt eine nichts weniger als lineare Spannungsverteilung sich ergibt.

Es soll nun im Folgenden genauer untersucht werden, bis zu welchem Grade die theoretische Elastizitätslehre mit den Ergebnissen der Bachschen Versuche in Einklang zu bringen ist. Damit ständen wir zunächst vor dem Problem, die elastischen Differentialgleichungen für einen Bachschen Versuchskörper bei der gewählten Inanspruchnahme zu integrieren. Da dies nicht ohne weiteres gehen wird, müssen wir jedenfalls die Aufgabe vereinfachen. Wir führen anstelle des Bachschen Versuchskörpers den im Endlichen nur von zwei zueinander senkrechten Ebenen begrenzten, sonst aber unbegrenzten elastischen Körper der Fig. 14 ein, sodann aber behandeln wir das damit gekennzeichnete elastische Problem als ein *ebenes*, indem wir annehmen, in allen zur Zeichenebene parallelen Ebenen herrsche wenigstens nahezu der gleiche Spannungszustand.

Fig. 14.




Die Berechtigung zu diesen vereinfachenden Annahmen läßt sich nicht von vornherein nachweisen, sie stellt sich nachher heraus; die Spannungen in der scharfen Ecke werden unendlich groß und sind im übrigen nicht nur endlich (natürlich abgesehen von denen in der Nähe der Angriffsstelle von $P'$), sondern flauen auch mit wachsender Entfernung von der Ecke sehr stark ab. In der Nähe der Ecke jedenfalls wird also unsere Spannungsverteilung mit derjenigen im begrenzten Körper der Fig. 13 gut übereinstimmen.

Wir stehen nunmehr wieder vor der auf Seite 61 gekennzeichneten Randwertaufgabe (s. Fig. 3b).

2. Das alternierende Verfahren von K. Wieghardt.

Wie wir unter I, 2 sahen, würde der Sommerfeldsche Ansatz unser Problem vollständig lösen, wenn nicht auf dem Rande $\psi = \pi/\alpha$ die Bedingung:

(24) $$\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$$

unbefriedigt bliebe. Statt dessen haben wir:

$$\varrho \frac{\partial F}{\partial \varrho} = \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} = -\frac{\alpha P}{4 i \pi}(\eta - \xi)\left[\frac{\xi^\alpha}{\xi^\alpha - a^\alpha} + \frac{\eta^\alpha}{\eta^\alpha - a^\alpha}\right],$$

oder, wenn wir den Radiusvektor auf dem Rande $\psi = \frac{\pi}{\alpha}$ mit $\varrho'$ bezeichnen:

(25) $$\frac{\partial F}{\partial \varrho'} = \frac{\alpha}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} \cdot P \cdot \frac{\varrho'^\alpha}{\varrho'^\alpha + a^\alpha}.$$

Der Sommerfeldsche Ansatz hinterläßt also auf dem Rande $\psi = \frac{\pi}{\alpha}$ ein System störender Normalspannungen $(\sigma_n)_1$ (Fig. 15), deren Verlauf durch:

(26) $$(\sigma_n)_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho'^2} = \frac{\alpha}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} \cdot P \cdot \alpha a^\alpha \cdot \frac{\varrho'^{\alpha - 1}}{(\varrho'^\alpha + a^\alpha)^2}$$

gegeben ist; im Unendlichen verschwinden diese Spannungen wie $\left(\frac{1}{\varrho'}\right)^{1+\alpha}$, in der Ecke verhalten sie sich wie $\varrho'^{\alpha-1}$, sodaß sie im Falle einer *konvexen* Ecke dort Null, im Falle einer *konkaven* Ecke unendlich groß werden.

Statt von störenden Spannungen können wir auch von störenden konzentrierten Kräften:

(27) $$P_1 = (\sigma_n)_1 \cdot d\varrho' = \frac{\alpha}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} \cdot P \cdot a^\alpha \cdot \frac{d(\varrho'^\alpha)}{(\varrho'^\alpha + a^\alpha)^2}$$

reden und dann die Idee fassen, diese störenden Kräfte dadurch zu beseitigen, daß wir am Rande $\psi = \frac{\pi}{\alpha}$ das Kräftesystem $-P_1$ angreifen lassen und auf jede einzelne Kraft $-P_1$ den Sommerfeldschen Ansatz anwenden. Dadurch wird der Rand $\psi = \frac{\pi}{\alpha}$ von störenden Kräften frei, auf dem Rande $\psi = 0$ indessen wird nun jede einzelne Kraft $-P_1$ eine störende, auf dem Rande senkrecht stehende, nach unten positiv gerechnete Kraft $p_2$ erzeugen vom Betrage:

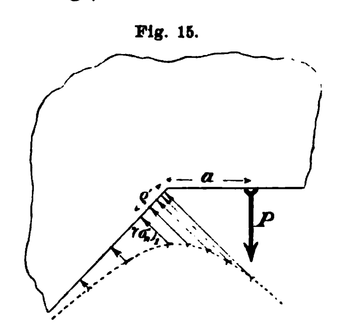
$$p_2 = -\frac{\alpha}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} \cdot \varrho'^\alpha \cdot \frac{d(\varrho'^\alpha)}{(\varrho^\alpha + \varrho'^\alpha)^2} \cdot \frac{\alpha}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha} \cdot P \cdot a^\alpha \cdot \frac{d(\varrho'^\alpha)}{(\varrho'^\alpha + a^\alpha)^2},$$

und mithin wird die Gesamtheit der Kräfte $-P_1$ an jeder Stelle $\varrho$ des Randes $\psi = 0$ eine störende konzentrierte Kraft $P_2$ zurücklassen, welche durch die Gleichung:

$$(28)\qquad P_2 = -\left(\frac{\alpha}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 \cdot P \cdot a^\alpha d(\varrho^\alpha) \cdot \int_0^\infty \frac{\varrho'^\alpha \cdot d(\varrho'^\alpha)}{(\varrho^\alpha + \varrho'^\alpha)^2 \cdot (a^\alpha + \varrho'^\alpha)^2}$$

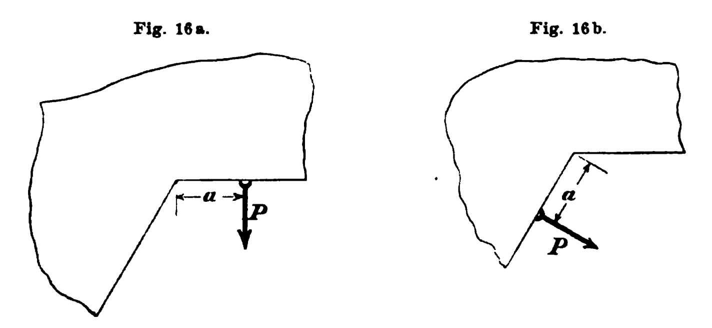
bestimmt ist. Schafft man diese störenden Kräfte wieder fort, indem man am Rande $\psi = 0$ das Kraftsystem $-P_2$ anbringt, so wird wiederum auf dem Rande $\psi = \pi/\alpha$ ein störendes Kraftsystem $P_3$ entstehen, welches man in der bezeichneten Weise wieder beseitigen kann. Hiermit ist ein *alternierendes Verfahren* gekennzeichnet, wodurch man abwechselnd den einen und den andern Rand frei von störenden Kräften bekommt und welches den Keim zur Lösung unsrer Randwertaufgabe und damit unseres elastischen Problems enthält, falls der Nachweis gelingt, daß es *konvergiert.*

Fig. 15.




Ehe wir uns der Untersuchung dieser Frage zuwenden, wird es zweckmäßig sein, den gesamten Algorithmus des alternierenden Verfahrens übersichtlich zusammenzustellen.

Fig. 16a. Fig. 16b.




Wir beginnen damit, die Gleichungen anzuschreiben, welche die dem Sommerfeldschen Ansatze entsprechenden Spannungsverteilungen in den Belastungsfällen von Fig. 16a und 16b darstellen: Zu Fig. 16a gehört das System:

$$(29\text{a})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial\xi\partial\eta} = -\dfrac{\alpha P}{4i\pi}\left[\dfrac{\xi^{\alpha-1}}{\xi^\alpha - a^\alpha} - \dfrac{\eta^{\alpha-1}}{\eta^\alpha - a^\alpha}\right], \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} = -\dfrac{\alpha P}{4i\pi}\cdot\dfrac{(\xi-\eta)\xi^{\alpha-2}[\xi^\alpha + (\alpha-1)a^\alpha]}{(\xi^\alpha - a^\alpha)^2}, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} = -\dfrac{\alpha P}{4i\pi}\cdot\dfrac{(\xi-\eta)\eta^{\alpha-2}[\eta^\alpha + (\alpha-1)a^\alpha]}{(\eta^\alpha - a^\alpha)^2}, \end{cases}$$

die Aussagen dieses Systems wollen wir unter Einführung der Abkürzung:

$$a^\alpha = c$$

in der einen Gleichung:

(29aa) $$\Omega(\xi\eta) = -\frac{\alpha P}{4i\pi}\cdot\Theta(\xi,\eta,c)$$

zusammenfassen.

Zu Fig. 16b gehört das System (auf eine genauere Ableitung kann wohl verzichtet werden):

(29b) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial\xi\partial\eta} = -\dfrac{\alpha P}{4i\pi}\cdot\left[-\dfrac{e_1\xi^{\alpha-1}}{\xi^\alpha+a^\alpha}+\dfrac{e_2\eta^{\alpha-1}}{\eta^\alpha+a^\alpha}\right], \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} = -\dfrac{\alpha P}{4i\pi}\cdot\dfrac{-(e_2\xi-e_1\eta)\cdot\xi^{\alpha-2}[\xi^\alpha-(\alpha-1)a^\alpha]}{(\xi^\alpha+a^\alpha)^2}, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} = -\dfrac{\alpha P}{4i\pi}\cdot\dfrac{-(e_2\xi-e_1\eta)\cdot\eta^{\alpha-2}[\eta^\alpha-(\alpha-1)a^\alpha]}{(\eta^\alpha+a^\alpha)^2}, \end{cases}$$

wo der Bequemlichkeit wegen

$$e_1 = e^{\frac{i\pi}{\alpha}}, \qquad e_2 = e^{-\frac{i\pi}{\alpha}}$$

gesetzt worden ist. Wiederum wollen wir die Aussagen dieses Systems in einer einzigen Gleichung zusammenfassen, nämlich:

(29bb) $$\Omega(\xi\eta) = -\frac{\alpha P}{4i\pi}\cdot\Theta'(\xi,\eta,c).$$

Jede Größe $\Omega$ nun, welche nicht von einer nur einmaligen Anwendung des **Sommerfeldschen** Ansatzes herrührt, sondern von dem bis ins Unendliche fortgesetzten alternierenden Verfahren und welche also die bei dem Kraftangriffe $P$ in unserm elastischen Winkelraum wirklich herrschende Spannungsverteilung kennzeichnet, falls das alternierende Verfahren konvergiert, ist dann durch folgende Gleichung bestimmt:

(30) $$\Omega = -\frac{\alpha P}{4i\pi}\left[\Theta(\xi\eta c)+\int_0^\infty\Theta(\xi,\eta,u)\cdot\Phi(u)du+\int_0^\infty\Theta'(\xi,\eta,u)\cdot\Psi(u)du\right],$$

wo abkürzend:

(30a) $$\begin{cases} \Phi(u) = \left(\dfrac{\alpha}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{\alpha}\right)^2\cdot f_2(u) \\ \qquad + \left(\dfrac{\alpha}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{\alpha}\right)^4\cdot f_4(u)\ldots+\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{\alpha}\right)^{2m}\cdot f_{2m}(u)+\ldots\textit{ in inf.} \\ -\Psi(u) = \left(\dfrac{\alpha}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{\alpha}\right)\cdot f_1(u) \\ \qquad + \left(\dfrac{\alpha}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{\alpha}\right)^3\cdot f_3(u)+\ldots+\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{\alpha}\right)^{2m+1} f_{2m+1}(u)+\ldots\textit{ in inf.} \end{cases}$$

gesetzt ist. Die in diesen Gleichungen auftretenden Funktionen $f$ sind ihrerseits durch die Gleichungen:

$$(30\text{b})\quad \begin{cases} f_1(v) = \dfrac{c}{(c+v)^2}, \\ f_2(v) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{u}{(u+v)^2}\cdot f_1(u)\,du, \\ f_3(v) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{u}{(u+v)^2}\cdot f_2(u)\,du, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ f_m(v) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{u}{(u+v)^2}\cdot f_{m-1}(u)\,du, \quad \text{usw.} \end{cases}$$

definiert; es ist sofort zu sehen, daß sie mit unsern konzentrierten Kräften $-P_1(\varrho')$, $-P_2(\varrho)$, $-P_3(\varrho')$ usw., die beim alternierenden Verfahren anzubringen waren, in folgender Weise zusammenhängen:

$$(30\text{c})\quad \begin{cases} -P_1(\varrho') = -\dfrac{\alpha}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{\alpha}\cdot P\cdot d(\varrho'^\alpha)\cdot f_1(\varrho'^\alpha), \\ -P_2(\varrho) = +\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{\alpha}\right)\cdot P\cdot d(\varrho^\alpha)\cdot f_2(\varrho^\alpha), \\ -P_3(\varrho') = -\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{\alpha}\right)^3\cdot P\cdot d(\varrho'^\alpha)\cdot f_3(\varrho'^\alpha), \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

Die Konvergenz des alternierenden Verfahrens wird sich uns nunmehr ergeben, wenn wir zuerst die Konvergenz der Reihenentwicklungen (30a) nachweisen und dann zeigen, daß diese jene nach sich zieht.

Eine flüchtige Betrachtung der Gleichungen (30b) lehrt zunächst, daß alle Funktionen $f$ durchweg positiv sind, wenn wir uns auf positive Werte von $v$ beschränken, was wir tun dürfen, da $v$ ja immer die Rolle eines mit $\alpha$ potenzierten Radiusvektors $\varrho$ spielt. Weiterhin sieht man sofort, daß alle Funktionen $f$ im Unendlichen verschwinden und — bis auf die Funktion $f_1$ — im Punkte $v=0$ unendlich groß werden.

Ferner läßt sich zeigen, daß die Funktionen $f$ andere Unendlichkeitsstellen als $v=0$ nicht haben können, da sie mit wachsendem $v$ stets abnehmen. Nehmen wir nämlich an, diese letzte Eigenschaft sei für die Funktion $f_{m-1}(v)$ bereits nachgewiesen, so folgt sie für die Funktion $f_m(v)$ aus der unmittelbar nach (30b) als richtig zu erkennenden Gleichung:

$$f_m(\lambda v) = \int_0^\infty \frac{u}{(u+v)^2}\cdot f_{m-1}(\lambda u)\,du;$$

ist hier $\lambda$ größer als Eins, so ist nach Voraussetzung:

$$f_{m-1}(\lambda u) < f_{m-1}(u),$$

mithin auch:

$$f_m(\lambda v) < f_m(v).$$

Nun ist aber jene Eigenschaft für die Funktion $f_1$ unmittelbar nachweisbar, also müssen sie alle anderen $f$ auch haben, und somit ist jeweils $v = 0$ die einzige Unendlichkeitsstelle. Hieraus folgt nun in Verbindung mit einer andern noch zu erweisenden Eigenschaft der Funktionen $f$, daß der Wert von

Fig. 17.

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\right)^m \cdot f_m(v)$$

für wachsendes $m$ auf Null zu konvergiert für alle Werte $v$ mit alleiniger Ausnahme des Wertes $v = 0$. In der Tat: Bilden wir das Integral über unsere Funktion $f_m(v)$ von Null bis Unendlich, das ist die schraffierte Fläche in Fig. 17, so bekommen wir nach den Gleichungen (30b) folgenden Ausdruck:

$$\int_0^\infty f_m(v)\,dv = \int_0^\infty dv \int_0^\infty \frac{u}{(u+v)^2}\cdot f_{m-1}(u)\,du$$

und daraus ergibt sich, wenn wir rechts die Reihenfolge der Integrationen vertauschen:

(31) $$\int_0^\infty f_m(v)\,dv = \int_0^\infty f_{m-1}(u)\,du,$$

d. h. *die von der Funktion $f_m(v)$ und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossene Fläche ist für alle Funktionen $f$ dieselbe.* Da sie nun für $f_1$ gewiß endlich ist, so konvergiert mithin die von der Funktion:

Fig. 18.

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\right)^m \cdot f_m(v)$$

und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossene Fläche mit wachsendem $m$ gegen Null, denn $\left(\frac{\alpha}{\pi}\sin\frac{\pi}{\alpha}\right)$ ist kleiner als Eins, der Verlauf dieser Funktion kann somit, mit Berücksichtigung ihrer schon gefundenen Eigenschaften, in der Grenze $m = \infty$ kein anderer sein als der des von

den beiden Koordinatenachsen gebildeten Hakens (Fig. 18), d. h. es ist in der Tat:

$$\lim_{(m=\infty)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha}\right)^m \cdot f_m(v) = 0$$

$$\text{für jedes} \quad v > 0.$$

Berücksichtigen wir nun die Gleichungen (30c), wonach die Funktionen $f$ mit den störenden (bez. beim alternierenden Verfahren immer zuzufügenden) konzentrierten Randkräften proportional sind, und zwar so, daß jedesmal die Funktion $f$ noch mit dem unendlich kleinen Element $d(\varrho^\alpha)$ zu multiplizieren ist, so sehen wir, daß unser alternierendes Verfahren hinsichtlich des Kleinerwerdens der störenden konzentrierten Randkräfte *überall* auch in der Ecke selbst, konvergiert; wir können sagen, es konvergiere in dieser Beziehung über den ganzen Rand hin *gleichmäßig*. Etwas anders verhält es sich, wenn wir nicht die störenden konzentrierten Kräfte betrachten, sondern die ihnen entsprechenden störenden Normalspannungen:

$$(\sigma_n)_1 = \frac{P_1}{d\varrho}, \quad (\sigma_n)_2 = \frac{P_2}{d\varrho}, \quad (\sigma_n)_3 = \frac{P_3}{d\varrho}, \ldots$$

diese sind nach (30c) proportional mit $f \cdot \varrho^{\alpha-1}$, werden also, da $f$ selbst in der Ecke unendlich wird und $\varrho^{\alpha-1}$ ebenfalls, in der Ecke unendlich, wie oft man auch das alternierende Verfahren anwenden mag. Wir sehen also: Hinsichtlich des Kleinerwerdens der störenden Normalspannungen am Rande konvergiert das alternierende Verfahren und zwar gleichmäßig, wenn man die Ecke selbst aus der Betrachtung ausschließt, in der Nähe der Ecke ist aber die Konvergenz des alternierenden Verfahrens in dieser Hinsicht *ungleichmäßig*. [Genau so verhält es sich nach den obigen Entwicklungen mit dem Kleinerwerden der Funktionen $\left(\frac{\alpha}{\pi} \sin \frac{\pi}{\alpha}\right)^m \cdot f_m(v)$.]

Fragt man nun, ob durch diesen Umstand die prinzipielle Berechtigung unseres alternierenden Verfahrens in Frage gestellt wird, so kann man nur sagen, daß davon nicht die Rede ist. Denn die störenden unendlichen Normalspannungen gehören nach dem vorhin Gesagten zu jenen, die in der Grenze selbst die Resultante Null haben, können also im Sinne der Bemerkungen von Seite 69 keinen Schaden anrichten. Wohl aber wird dadurch die praktische Brauchbarkeit des Verfahrens dann beeinträchtigt, wenn man die Spannungen in der Nähe der Ecke kennen lernen will, denn alsdann wird man, um eine relativ geringe Annäherung zu erzielen, schon relativ oft die Schritte des alternierenden Verfahrens wiederholen müssen. Wir haben nun aber überhaupt noch

zu zeigen, daß die Konvergenz unseres alternierenden Verfahrens auch hinsichtlich der Spannungen unseres elastischen Systems besteht, daß also die Gleichungen (30) wirklich die Spannungsverteilung darin überall richtig darstellen. Zu dem Zwecke ist nachzuweisen, daß die durch die Gleichungen (30) gelieferten Funktionen $\Omega$ entweder endlich sind oder, für $\varrho = 0$, schwächer unendlich werden als $1/\varrho$, denn alsdann haben sie, da sie ja ihrem Charakter nach mit Spannungen äquivalent sind, die Resultante Null, sind also unschädlich im Sinne der Bemerkungen von Seite 69. Nun können die Funktionen $\Theta$ und $\Theta'$, wie der Anblick der Gleichungssysteme 29a und b zeigt, als Funktionen von $u$ allein betrachtet, in der Ecke höchstens so stark unendlich werden wie $\frac{1}{u}$. Anderseits sind die Funktionen $\Phi$ und $\Psi$ in der Ecke gewiß schwächer unendlich als $\frac{1}{u}$, denn anderenfalls könnten die Integrale $\int\limits_0^\infty \Phi du$ und $\int\limits_0^\infty \Psi du$ nicht endlich sein, was aber nach (31) und (30a) zutrifft. Mithin sind die Integrale in (30) in der Ecke schwächer unendlich als:

$$\int \frac{\varrho^{\alpha-1}}{u} \cdot \frac{du}{u} \text{ oder als } \frac{\varrho^{\alpha-1}}{u},$$

also wegen $u = \varrho^\alpha$ schwächer unendlich als $1/\varrho$, was zu zeigen war.

### 3. Über das Verhalten der Spannungen in der Nähe der Ecke.

Es ist mißlich, daß uns das alternierende Verfahren gerade da im Stiche läßt, wo wir es am nötigsten brauchen; denn wir werden schon nach Analogie mit dem beim Schlitze Gefundenen annehmen dürfen, daß die Spannungen in der Ecke unendlich groß werden und daß damit für die Beantwortung der Frage nach der Richtung und dem Verlaufe eines Materialbruches, wie wir sie im ersten Teile der Abhandlung stellten, auch hier gerade die Verhältnisse in der Ecke und in ihrer Nähe maßgebend sind.

Aber hier scheint sich ein Ausweg zu bieten. Aller Wahrscheinlichkeit nach haben nämlich, wenigstens für die Winkelräume $\alpha < 1$, die Spannungen in der Nähe der Ecke die Form einer Funktion des Winkels $\psi$ multipliziert mit einer Potenz des Radiusvektors $\varrho$. An einem exakten Nachweise hierfür fehlt es mir freilich vorderhand: es müßte möglich sein, obige Vermutung aus dem alternierenden Verfahren heraus oder sonstwie durch strenge Schlüsse als richtig zu erkennen. Aber abgesehen davon, daß die Vermutung für den Schlitz und über-

haupt alle ganzzahligen $\frac{1}{\alpha}$ zutrifft, spricht noch ein anderer gewichtiger Grund für sie. Gewisse Folgerungen aus ihr zeigen nämlich eine ganz überraschende Übereinstimmung mit gewissen zahlenmäßigen Ergebnissen, die man bekommt, wenn man das alternierende Verfahren im Falle der rechtwinkligen konkaven Ecke ($\alpha = {}^2/_3$) anwendet, um dort die Spannungen wirklich zu berechnen. Auf diese Übereinstimmung komme ich nachher noch zurück: vorläufig führe ich jetzt die Annahme ein, die oben ausgesprochene Vermutung sei zutreffend. Es ist klar, daß sie dann nicht nur für die Spannungen zutrifft, sondern auch für die Spannungsfunktion, sodaß wir für diese in der Nähe der Ecke den Ansatz:

(32) $$F(\varrho, \psi) = \varrho^n \times \text{Funktion von } \psi$$

hätten. Die mit vier willkürlichen Integrationskonstanten — etwa $A_1 A_2 B_1 B_2$ — behaftete Funktion von $\psi$ findet man sofort aus der Bedingung, daß $F$ der Differentialgleichung: $\nabla\nabla\, F(xy) = 0$ genügen muß, sodaß wir haben:

(32a) $$F = \varrho^n \cdot [A_1 \cos n\psi + A_2 \cos(n-2)\psi + B_1 \sin n\psi + B_2 \sin(n-2)\psi],$$

woraus durch Differentiation folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = \varrho^n \cdot [n B_1 \cos n\psi + (n-2) B_2 \cos(n-2)\psi - n A_1 \sin n\psi \\ - (n-2) A_2 \sin(n-2)\psi];$$

wir wollen versuchen, diese vier Konstanten aus den vier Randbedingungen:

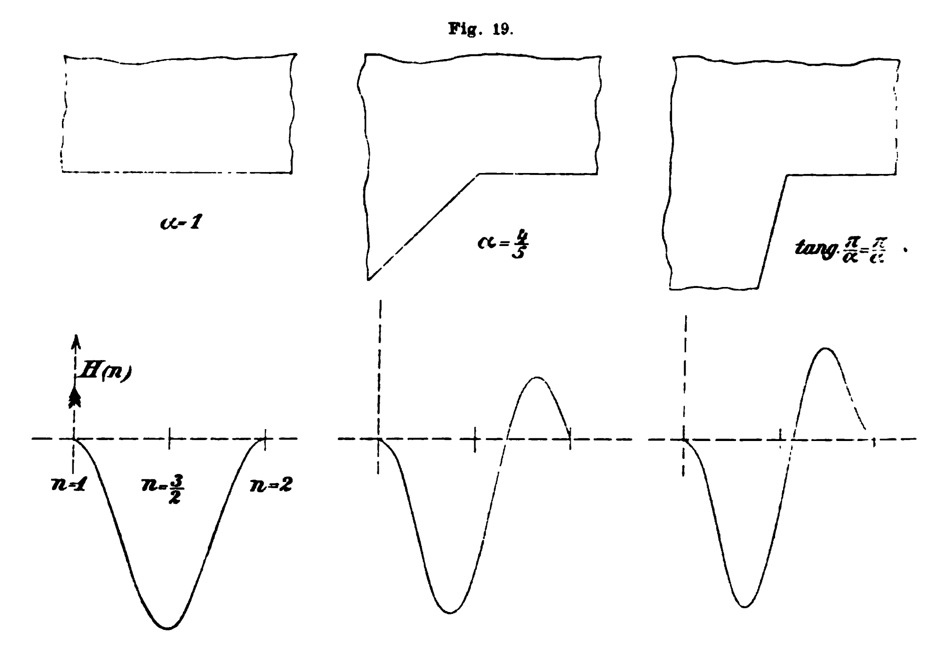
$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \psi} = 0 \quad \text{für } \psi = 0 \text{ und } \psi = \frac{\pi}{\alpha}$$

(da an keinem Rande in der Nähe der Ecke eine Kraft angreift) zu bestimmen. Das führt auf die Gleichungen:

(33) $$\begin{gathered} A_1 + A_2 = 0, \\ n B_1 + (n-2) B_2 = 0, \\ A_1 \cos\frac{n\pi}{\alpha} + A_2 \cos\frac{(n-2)\pi}{\alpha} + B_1 \sin\frac{n\pi}{\alpha} + B_2 \sin\frac{(n-2)\pi}{\alpha} = 0, \\ -n A_1 \sin\frac{n\pi}{\alpha} - (n-2) A_2 \sin\frac{(n-2)\pi}{\alpha} + n B_1 \cos\frac{n\pi}{\alpha} + \\ (n-2) B_2 \cdot \cos\frac{(n-2)\pi}{\alpha} = 0. \end{gathered}$$

Sollen diese eine von Null verschiedene Lösung haben, so muß ihre Nennerdeterminante verschwinden; alsdann bleibt mindestens eine der vier Konstanten willkürlich. Bleibt nur eine willkürlich, so ist der

Fig. 19.



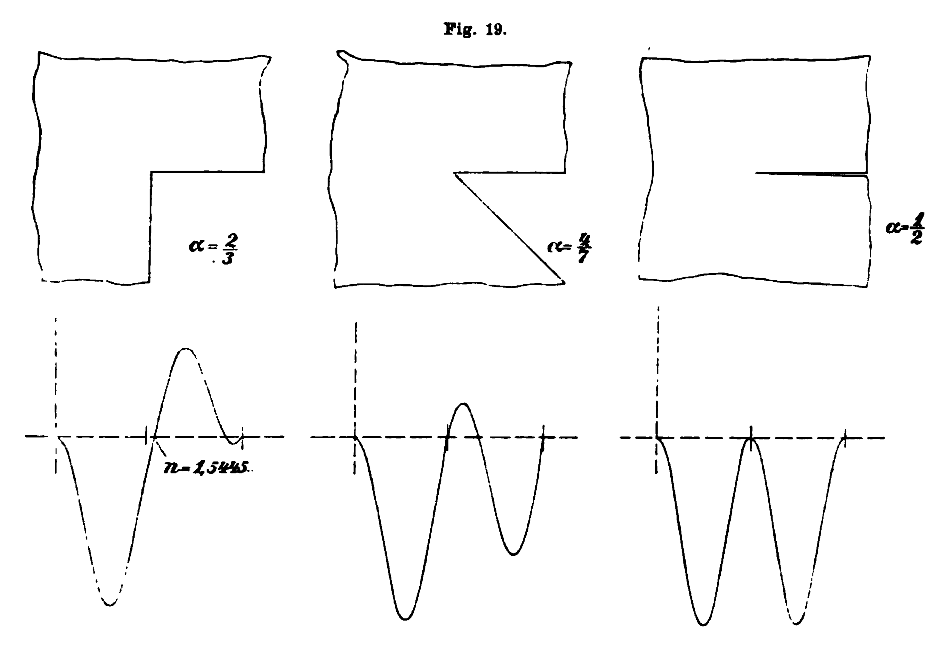

Ansatz für unsere Zwecke brauchbar, denn unsere Spannungsfunktion ist dann bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, der bei der Frage nach der Bruch*richtung* keine Rolle spielt, sondern nur angibt, wie die Spannungen in der Nähe der Ecke von der Größe der Kraft $P$ abhängen. Bleiben aber etwa mehrere Konstante willkürlich, so können wir mit dem Ansatze weiter nichts anfangen.

Das Verschwinden der Nennerdeterminante liefert für die willkürliche Potenz $n$ die transzendente Bestimmungsgleichung:

$$(34) \qquad H(n,\alpha) = n(n-2)\cdot\left(\sin\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - \sin\frac{n\pi}{\alpha}\cdot\sin\frac{(n-2)\pi}{\alpha} = 0.$$

Offenbar hat diese Wurzeln bei 0, 1 und 2. Diese interessieren uns aber hier nicht, denn die Wurzeln 0 und 2 führen auf $F = 0$; die Wurzel 1 läßt zwei Integrationskonstante unbestimmt. Von allen übrigen Wurzeln der Gleichung interessieren uns auch nur diejenigen, die größer als Eins sind, denn die übrigen bringen ein im Sinne der Bemerkung von S. 70 unzulässiges Unendlichwerden der Spannungen — die von der Ordnung $\varrho^{n-2}$ sind — mit sich. Wir wollen uns ferner auf den Standpunkt stellen, daß uns auch die Wurzeln, die größer als 2 sind, nicht weiter interessieren, da sie in der Ecke die Spannungen Null liefern, während wir als feststehend annehmen wollen, daß diese Spannungen jedenfalls für alle Winkelräume $\pi/\alpha > \pi$ unendlich groß werden. So bleibt uns schließlich die Aufgabe übrig, alle Wurzeln

Fig. 19.




der transzendenten Gleichung aufzusuchen, die zwischen 1 und 2 liegen und auch diese Aufgabe wollen wir nur für die Winkelräume von der Halbebene bis zum Schlitz ($1 \geqq \alpha \geqq 1/2$) näher verfolgen. Das Ergebnis ist graphisch in obigen Figuren niedergelegt, in welchen für jeweils bestimmtes $\alpha$ der Verlauf der Funktion $H(n)$ aufgetragen ist.

Wir sehen hieraus zunächst: Unsere transzendente Gleichung hat zwischen $n = 1$ und $n = 2$ — wenn wir die Grenzfälle Halbebene und Schlitz zunächst ausschließen — entweder eine gewöhnliche Wurzel, nämlich zwischen Halbebene und dem durch $\operatorname{tg} \pi/\alpha = \pi/\alpha$ gegebenen konkaven Winkelraum — dort wird nämlich $\left(\frac{dH}{dn}\right)_{n=2}$ gerade Null — oder zwei gewöhnliche, nämlich zwischen diesem Winkelraum und dem Schlitz. In dem Grenzfalle der Halbebene hat sie zwischen 1 und 2 keine Wurzel, im Grenzfalle des Schlitzes zwei zusammenfallende Wurzeln (eine sog. Doppelwurzel). Außerdem bemerken wir nebenbei, daß beim Schlitz — und daher wahrscheinlich auch bei den benachbarten Winkelräumen — sich Wurzeln finden, die größer als 2 sind.

Der hierdurch nahegelegte Verdacht, der Sommerfeldsche Ansatz (12) möchte für den Fall des Schlitzes *mehrere* Lösungen unsres Spannungsproblems ergeben, wird durch folgende Überlegung beseitigt. Der Sommerfeldsche Ansatz lautete:

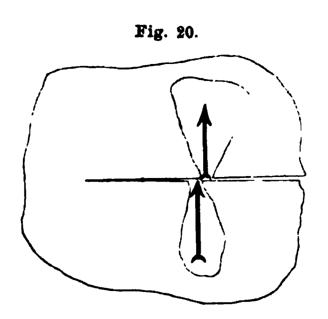
$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{\beta P}{4 i \pi} \cdot \left[\frac{\xi^{\beta - 1}}{\xi^{\beta} - a^{\beta}} - \frac{\eta^{\beta - 1}}{\eta^{\beta} - a^{\beta}}\right],$$

wo wir für den Schlitz $\beta = \frac{1}{2}$ setzten. Wir wollen jetzt aber nicht die zwischen 1 und 2 gelegene Wurzel $n$ heranziehen, also $\beta = \frac{1}{2}$, sondern $\beta = \frac{3}{2}$ setzen, um einen Ansatz zu bekommen, der Spannungen liefert, die in der Ecke wie $\varrho^{1/2}$ verschwinden, also genau solche Spannungen, wie sie der Wurzel $n = \frac{5}{2}$ unsrer transzendenten Gleichung für den Schlitz entsprechen. Dieser Ansatz ist an sich durchaus möglich, die Spannungen verhalten sich im Unendlichen wie $1/\varrho$, die Differentialgleichung $\nabla\nabla F = 0$ ist befriedigt, und im übrigen sind beide Ränder nach wie vor kräftefrei bis auf eine konzentrierte Kraft $P$ am Rande $\psi = 0$. Aber im Innern des elastischen Winkelraumes tritt jetzt noch eine neue konzentrierte Kraft hinzu, denn $\xi^{\beta} - a^{\beta}$ und $\eta^{\beta} - a^{\beta}$ werden jetzt nicht nur auf dem Rande $\psi = 0$ gleich Null (wie bei der früheren Schlitzlösung), sondern auch noch an der Stelle: $\psi = {}^4/_3\pi$, $\varrho = a$. Die beiden konzentrierten Kräfte wirken sich dann so entgegen, daß in der Ecke Spannungen Null herauskommen. Ganz ähnliches ergibt sich, wenn wir $\beta = 1$ setzen, was der Wurzel $n = 2$ entspricht. Hier bekommen wir:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{P}{4 i \pi}\left[\frac{1}{\xi - \alpha} - \frac{1}{\eta - \alpha}\right]$$

und da $\xi - \alpha$ und $\eta - \alpha$ außer bei $\psi = 0$ auch noch bei $\psi = 2\pi$ verschwinden, bekommen wir außer der konzentrierten Kraft $P$ bei $\psi = 0$ noch eine solche bei $\psi = 2\pi$, die die Wirkung, welche die erstere auf die Ecke ausübt, gerade wieder aufhebt (Fig 20), so daß in der Ecke die Spannungen verschwinden (und im übrigen für jede der beiden Halbebenen die Spannungsverteilung der Boussinesqschen Halbebene herauskommt).

Fig. 20.



Demnach beschäftigen wir uns jetzt nur noch mit den Wurzeln, die zwischen 1 und 2 liegen und beginnen zweckmäßig mit der Doppelwurzel $n = \frac{3}{2}$ im Falle des Schlitzes. Versuchen wir, die zugehörige Spannungsfunktion nach den Gl. (33) zu berechnen, so werden wir finden, daß dort zwei Größen $A_1 A_2 B_1 B_2$ willkürlich bleiben, wenn $\alpha = \frac{1}{2}$ und $n = \frac{3}{2}$ gesetzt wird. Wir bekommen also keine bestimmte Spannungsfunktion, sondern deren noch *einfach* unendlich viele ververschiedene (da die eine der Konstanten nur multiplikativ ist, den Charakter der Spannungsverteilung also nicht beeinflußt). Dies ist nun gar nicht merkwürdig. Denn wir kennen ja beim Schlitze nicht nur *eine* Spannungsverteilung, bei welcher die Spannungen in der Ecke wie $\varrho^{n-2} = \varrho^{-1/2}$ unendlich werden, sondern deren *zwei*, nämlich:

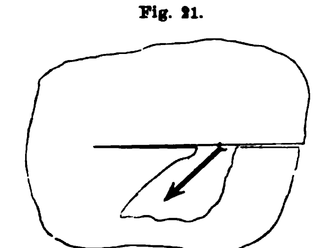
$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{P}{8 i \pi}\left[\frac{\xi^{-1/2}}{\xi^{1/2}-a^{1/2}} - \frac{\eta^{-1/2}}{\eta^{1/2}-a^{1/2}}\right] \text{ (s. Fig. 7)}$$

und

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = +\frac{Q}{8 \pi}\left[\frac{\xi^{-1/2}}{\xi^{1/2}-a^{1/2}} + \frac{\eta^{-1/2}}{\eta^{1/2}-a^{1/2}}\right] \text{ (s. Fig. 12)}$$

und durch passende Überlagerung bekommen wir aus diesen beiden eine einfach unendliche Schar solcher Sommerfeldscher Ansätze, entsprechend dem Umstande, daß unsere konzentrierte Kraft beliebig gerichtet sein kann (Fig. 21). Unter diesen unendlich vielen Ansätzen sind die obigen beiden nun dadurch ausgezeichnet, daß die zugehörigen Spannungsverteilungen und damit auch die Spannungsfunktionen gewisse Symmetrieeigenschaften aufweisen. Die beiden ausgezeichneten Funktionen sind nämlich:

Fig. 21.



$$C \cdot [\sin \tfrac{3}{2}\psi - 3 \sin \tfrac{1}{2}\psi]$$

und

$$C \cdot [\cos \tfrac{3}{2}\psi - \cos \tfrac{1}{2}\psi]$$

($C$ eine beliebige Konstante)

und man sieht ohne weiteres, daß die erste sich überhaupt nicht und die zweite nur ihr Vorzeichen ändert, wenn man $\psi$ mit $2\pi - \psi$ vertauscht. Wir werden dies so ausdrücken, wie es für das Folgende zweckmäßig erscheint:

*Steht beim Schlitze die konzentrierte Kraft senkrecht zum Rande, so ist die zugehörige Spannungsfunktion in der Ecke hinsichtlich der Symmetrieachse $\psi = \pi$ des Schlitzes symmetrisch schlechthin; geht die konzentrierte Kraft dem Rande parallel, so besteht auch noch Symmetrie, aber nur hinsichtlich des Absolutwertes der Spannungsfunktion, die Vorzeichen sind auf beiden Seiten der Symmetrieachse des Schlitzes verschieden.*

Gehen wir jetzt (Fig. 19) vom Schlitze zu Winkelräumen von etwas kleinerer Öffnung über, so sehen wir, daß unsere Doppelwurzel $n = 3/2$ sich in zwei einfache Wurzeln auflöst, von denen jede größer als $3/2$ ist. Gehen wir in demselben Sinne weiter, so vergrößert sich der Zwischenraum zwischen beiden Wurzeln immer mehr, beide wandern zwar dauernd nach rechts, aber die rechte schneller als die linke. Das geht so weiter, bis bei dem Winkel $\operatorname{tg} \pi/\alpha = \pi/\alpha$ die rechte Wurzel im Punkte $n = 2$ verschwindet. Gehen wir noch weiter auf die Halbebene zu, so wandert auch die übriggebliebene Wurzel immer nach rechts weiter, bis sie für die Halbebene selbst ebenfalls im Punkte $n = 2$ verschwindet.

Charakteristisch für alle diese einfachen Wurzeln im Gegensatz zu obiger Doppelwurzel ist nun, daß zu jeder nicht unendlich viele wesentlich verschiedene Spannungsfunktionen gehören, sondern eine einzige (abgesehen von dem unwesentlichen willkürlichen Faktor, mit dem die Spannungsfunktion noch multipliziert werden darf). Hiervon überzeugt man sich sofort, wenn man in den letzten beiden Gleichungen (33) $A_2$ und $B_2$ vermöge der ersten beiden durch $A_1$ und $B_1$ ausdrückt, wodurch man bekommt:

$$(n-2)\left[\cos\frac{n\pi}{\alpha}-\cos\frac{(n-2)\pi}{\alpha}\right]\cdot A_1+\left[(n-2)\sin\frac{n\pi}{\alpha}-n\sin\frac{(n-2)\pi}{\alpha}\right]\cdot B_1=0,$$

$$-\left[n\sin\frac{n\pi}{\alpha}-(n-2)\sin\frac{(n-2)\pi}{\alpha}\right]\cdot A_1+n\left[\cos\frac{n\pi}{\alpha}-\cos\frac{(n-2)\pi}{\alpha}\right]\cdot B_1=0.$$

Ist $n$ eine Wurzel unserer transzendenten Gleichung (34), so sind diese beiden Gleichungen miteinander verträglich und liefern für den Quotienten $A:B$ nur dann kein bestimmtes Verhältnis, wenn etwa alle Ausdrücke in den eckigen Klammern verschwinden sollten. Nun verschwindet aber

$$\cos\frac{n\pi}{\alpha}-\cos\frac{(n-2)\pi}{\alpha}$$

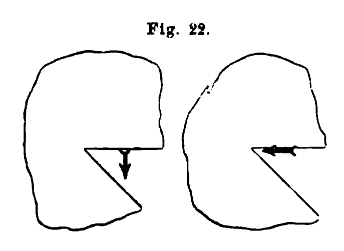
nur für den Fall, daß $1/\alpha$ eine ganze Zahl ist, also z. B. für die Halbebene und für den Schlitz, aber nicht für die zwischenliegenden Winkelräume.

Beschränken wir uns nun auf die Winkelräume zwischen Schlitz und $\operatorname{tg}\pi/\alpha=\pi/\alpha$, so bekommen wir also jedesmal zwei ganz bestimmte Spannungsfunktionen:

$$\varrho^{n_1}\cdot\varphi(\psi,n_1) \quad \text{und} \quad \varrho^{n_2}\cdot\varphi(\psi,n_2),$$

worin $n_1$ und $n_2$ die beiden Wurzeln der transzendenten Gleichung sind. Diese beiden ausgezeichneten Spannungsfunktionen können naturgemäß keine andern sein als diejenigen, welche einem normalen und einem tangentiellen Angriff unserer konzentrierten Kraft $P$ entsprechen (Fig. 22), und es fragt sich nur noch, welche der beiden Wurzeln dem einen und welche dem andern Falle entspricht. Die Frage wird entschieden, wenn wir uns klar machen, daß unsere beiden Spannungsfunktionen dieselben Symmetrieeigenschaften aufweisen müssen wie die entsprechenden beim Schlitze. Die Differentialgleichung nämlich, nach welcher die Funktion $\varphi(\psi)$ in (32) zu bestimmen ist:

Fig. 22.



$$\frac{d^4\varphi}{d\psi^4}+(4-4n+2n^2)\cdot\frac{d^2\varphi}{d\psi^2}+n^2(n-2)^2\cdot\varphi=0$$

enthält nur Differentialquotienten gerader Ordnung und daraus folgt zunächst, daß, wenn $\varphi(\psi)$ eine Lösung ist, auch $\varphi(c-\psi)$ und $-\varphi(c-\psi)$ Lösungen sind, wo $c$ irgendeine Konstante ist. Da nun die Randbedingungen für $\varphi$, nämlich: $\varphi = 0$, $\frac{d\varphi}{d\psi} = 0$ hinsichtlich des Winkels $\pi/2\alpha$ völlig symmetrisch sind und zwar symmetrisch sowohl mit als auch ohne Änderung des Vorzeichens, so muß diejenige Funktion $\varphi$, welche die obige Differentialgleichung *und* die Randbedingungen befriedigt, in bezug auf den Winkel $\pi/2\alpha$ entweder ganz oder bis auf das Vorzeichen symmetrisch sein, denn andernfalls gäbe es, da ja auch $\varphi(\pi/\alpha-\psi)$ und $-\varphi(\pi/\alpha-\psi)$ Lösungen der Differentialgleichung sind, die die Randbedingungen befriedigen, für eine und dieselbe Wurzel mehrere Spannungsfunktionen, während wir oben sahen, daß es nur eine einzige gibt (bis auf den wiederholt erwähnten willkürlichen Faktor).

Vergleichen wir dies mit dem beim Schlitze Gefundenen, so beantwortet sich die oben aufgeworfene Frage wie folgt:

*Von den beiden Spannungsfunktionen, die zu den beiden zwischen 1 und 2 gelegenen Wurzeln der transzendenten Gleichung* (34) *gehören, entspricht diejenige einem normalen Angriff der konzentrierten Kraft P, welche hinsichtlich der Mittelachse $\psi = \pi/2\alpha$ des Winkelraumes völlig symmetrisch ist; die andere, welche zur Mittelachse nur mit abgeändertem Vorzeichen symmetrisch ist, entspricht einem tangentiellen Angriff der konzentrierten Kraft P.*

Wir haben also folgendes Ergebnis:

*Im allgemeinen werden die durch normalen Kraftangriff in der Nähe der Ecke erzeugten Spannungen in einem andern Grade unendlich als die durch tangentiellen Kraftangriff erzeugten, und zwar entspricht der normale Kraftangriff der kleineren der beiden Wurzeln, so daß dieser also ein stärkeres Unendlichwerden der Spannungen in der Ecke verursacht als ein tangentieller Kraftangriff. Für die Winkelräume zwischen Halbebene und* $\operatorname{tg}\pi/\alpha = \pi/\alpha$ *spitzt sich dies Verhältnis dahin zu, daß dort zwar wohl die durch normalen, nicht aber die durch tangentiellen Kraftangriff erzeugten Spannungen unendlich groß werden. Beim Schlitz aber werden beidemale die Spannungen in der Ecke gleich stark unendlich.*

## 4. Über das wirkliche Rechnen mit dem alternierenden Verfahren.

Für den Fall der rechtwinkligen konkaven Ecke ($\alpha = \frac{2}{3}$) habe ich die Rechnung mit dem alternierenden Verfahren wirklich durchgeführt. Am besten verfährt man dabei bald zeichnerisch, bald rechnerisch. Das

erste Hauptziel ist die Ermittelung der Funktionen $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$ von S. 80; man hat also zunächst einmal die Funktionen $f(v)$ nach den Gl. (30b) zu konstruieren. Dabei ist es praktisch, als Veränderliche nicht $u$ und $v$, sondern deren natürliche Logarithmen zu wählen. Die Funktion $f_1$ ist ohne weiteres aus (30b) abzulesen, $f_2$ bestimmt man durch Integration aus der zweiten Gl. (30b) zu:

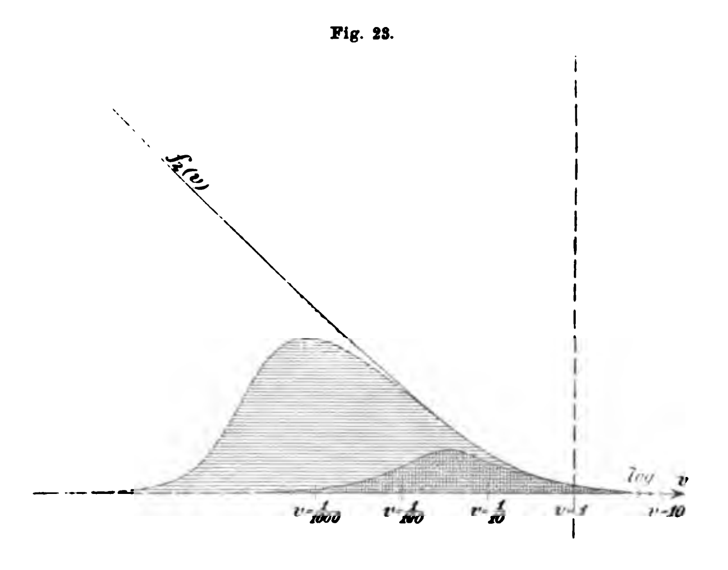
$$f_2(v) = c\left\{\frac{c+v}{(c-v)^3}\log\frac{c}{v} - \frac{2}{(c-v)^2}\right\};$$

man trägt sie vor allen Dingen zeichnerisch auf. Alsdann berechnet man einige Werte der Funktion:

$$\left(\frac{u}{u+v}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2, \quad \text{wo abkürzend } \lambda = \frac{v}{u} \text{ gesetzt ist;}$$

mit diesen sind die Ordinaten obiger Kurve nach der dritten Gl. (30b) zu multiplizieren. Die so erhaltenen Punkte liefern für jedes $v$ je eine

Fig. 23.




neue Kurve, welche mit der $X$-Achse eine Fläche einschließt, deren Ausplanimetrierung die nächste gesuchte Funktion liefert:

$$f_3(v) = \int\limits_{u=0}^{u=\infty}\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 \cdot f_2(u)\,d(\log u).$$

Den so angedeuteten Prozeß setzt man fort, bis man eine geeignete Anzahl von Funktionen $f$ gefunden hat. Man sieht, daß bisher die Rechnung von der speziellen Wahl des Winkelraumes ganz unabhängig ist. Jetzt aber muß man sich für einen bestimmten Winkelraum ent-

schließen, da die Definitionsgleichungen (30a) für $\Phi$ und $\Psi$ das $\alpha$ enthalten. War nun $f_3$ so bestimmt, daß es noch für $v = 10^{-19}\cdot c$ [also für $\varrho = 10^{-57/2}\cdot a$, da $c = a^{2/3}$] so genau war, wie die Zeichenoperationen in dem gewählten Maßstabe überhaupt zuließen, so war $f_4$ in dem-

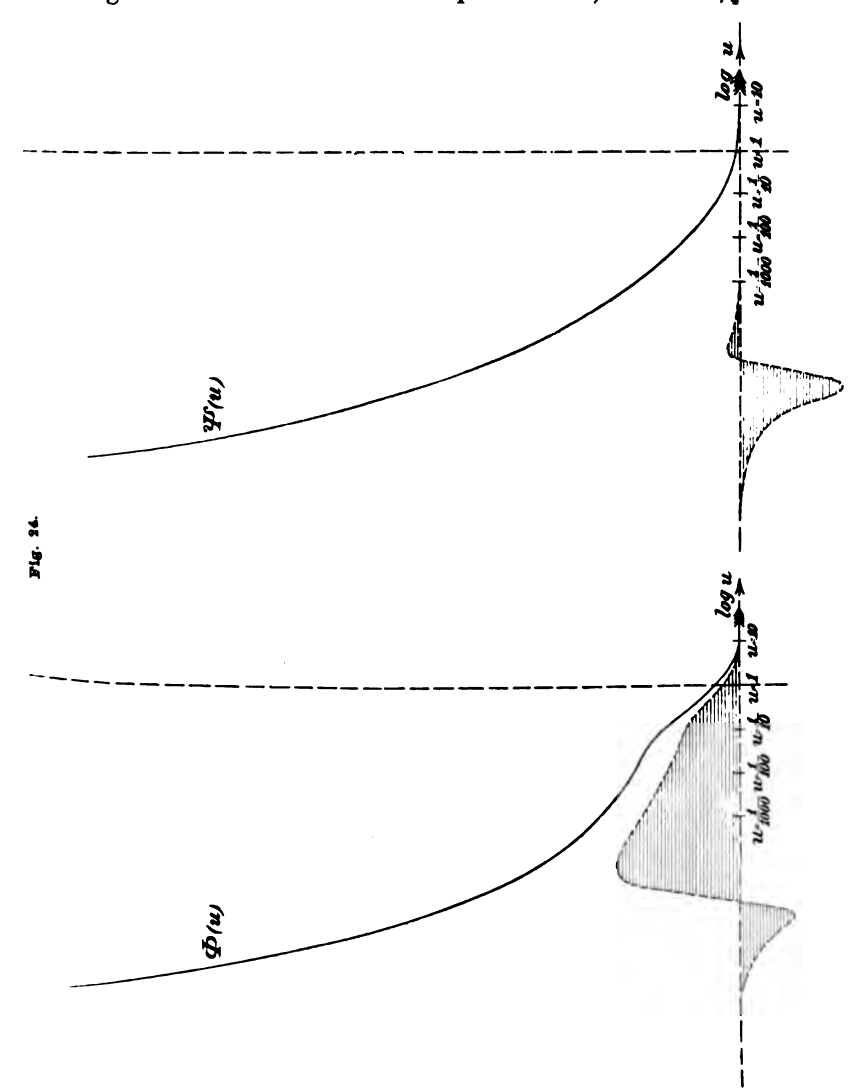



Fig. 24.

selben Grade genau noch für Werte $v = 10^{-18}c$. Schließlich waren die Funktionen $\Phi$ und $\Psi$ in demselben Grade genau noch für Werte: $v = 10^{-9}\cdot c$. Man durfte also hoffen, daß die so erhaltenen Funktionen die Spannungen mit der erwähnten Genauigkeit beherrschen würden, sofern man nur von der Ecke wenigstens um das Stück: $\varrho = 10^{-27/2}\cdot a$

entfernt blieb; mit anderen Worten: daß man trotz der ungleichmäßigen Konvergenz der Reihenentwicklungen (30a) die Spannungsverteilung in großer Nähe der Ecke schon recht gut beherrschen würde. Ich berechnete nun mit Hilfe von $\Phi$ und $\Psi$ (Fig. 24) nach den Gl. (30) sämtliche Spannungen für die Winkel $\psi = \pi/2$, $^3/_4\pi$, $\pi$ und die Entfernungen:

$$\frac{\varrho}{a} = 10^{-3},\ 10^{-9/2},\ 10^{-6},\ 10^{-15/2},\ 10^{-9},\ 10^{-21/2},$$

was ein entsprechend häufiges Planimetrieren von aus $\Phi$ und $\Psi$ abgeleiteten Kurven (Fig. 24) erforderte. Das Ergebnis ist in der folgenden Tabelle niedergelegt, deren Zahlen nicht die Spannungen selbst darstellen, sondern die durch $\varrho^{-1/2}$ dividierten Spannungen:

| $\frac{v}{c}$ | $\varrho^{1/2} \cdot \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ | | | $\varrho^{1/2} \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ | | | $\varrho^{1/2} \cdot \tau_{xy}$ | | | $\varrho^{1/2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 90° | 135° | 180° | 90° | 135° | 180° | 90° | 135° | 180° | 90° | 135° | 180° |
| $\frac{1}{100}$ | 22 | 23 | 21 | −2 | 0 | 1 | 11 | 5 | 10 | 11 | 5 | 10 |
| $\frac{1}{1000}$ | 34 | 36 | 34 | −2 | 0 | 2 | 16 | 8 | 16 | 16 | 8 | 16 |
| $\frac{1}{10\,000}$ | 51 | 53 | 51 | −3 | 0 | 4 | 24 | 10 | 23 | 24 | 10 | 23 |
| $\frac{1}{10^5}$ | 78 | 85 | 77 | −5 | 0 | 6 | 36 | 15 | 35 | 36 | 15 | 35 |
| $\frac{1}{10^6}$ | 117 | 121 | 115 | −7 | 0 | 8 | 55 | 24 | 50 | 55 | 24 | 51 |
| $\frac{1}{10^7}$ | 179 | 190 | 176 | −12 | 0 | 12 | 85 | 36 | 83 | 86 | 34 | 84 |

Hier bemerkt man bald, daß das Verhältnis jeder Zahl der Tabelle zu der darunterstehenden einen merklich konstanten Wert hat, der durch den Bruch $\frac{2}{3}$ gut wiedergegeben wird. Multipliziert man also bei konstant gehaltenem Winkel $\psi$ den Radiusvektor $\varrho$ mit $10^{-3/2}$, so multiplizieren sich alle Spannungen mit $\frac{3}{2} \cdot 10^{1/2}$. Von hier aus kommt man leicht auf die Vermutung, daß in unserm ganzen Zahlenbereich die Darstellung gilt:

Spannung = Potenz von Radiusvektor $\times$ Funktion des Winkels,

abgekürzt: $S = \varrho^m \cdot G(\psi)$;

macht man diesen Ansatz, so hat man in der Tat:

$$\frac{S(10^{-3/2} \cdot \varrho)}{S(\varrho)} = 10^{-3/2\,m},$$

und um völlige Übereinstimmung mit allen Vertikalreihen unserer Tabelle zu erzielen, hat man nur noch $m$ aus der Gleichung:

$$10^{-3/2\,m} = \frac{3}{2} \cdot 10^{1/2}$$

zu bestimmen, was auf den Wert:

$$m = -0{,}45\ldots$$

führt. Man hätte demnach zu schließen, daß im Falle unserer konkaven rechtwinkligen Ecke bei normalem Kraftangriff $P$ die Spannungen in der Ecke wie $\varrho^{-0{,}45\ldots}$ unendlich werden und für die zugehörige Spannungsfunktion, daß sie in der Ecke wie

$$\varrho^{m+2} = \varrho^{1{,}55}$$

verschwindet. Berechnet man nun zur gegenseitigen Prüfung dieses Ergebnisses und des Ansatzes (32) anderseits die zwischen 1 und 2 gelegene kleinere Wurzel der transzendenten Gleichung (34) im Falle unseres Winkelraumes, nämlich der Gleichung:

$$n(n-2) + \left(\sin\frac{3n\pi}{2}\right)^2 = 0,$$

so kommt man auf den Wert:

$$n = 1{,}5445\ldots \text{ (s. Fig. 19)},$$

dieser Wert ist in guter Übereinstimmung mit dem oben für $m+2$ gefundenen. Von hier aus wird man schließen dürfen, daß die Darstellung (32) der Spannungsfunktion in der Nähe der Ecke richtig ist. (Nebenbei sei erwähnt, daß ich auf den Ansatz (32) überhaupt von meinen Zahlenrechnungen aus gekommen bin.) Außerdem folgt aus der Konstanz des Verhältnisses übereinanderstehender Zahlen in unserer Tabelle, welche sich fast bis in das Gebiet $\varrho = {}^1/_{10}\,a$ hinein erstreckt, daß der *praktische* Geltungsbereich der Darstellung (32) von einem Kreise mit beinahe ${}^1/_{10}\,a$ Halbmesser um die Ecke herum begrenzt wird.

### 5. Über den Bruch des Bachschen Versuchskörpers (bezw. des Lagerkörpers).

Ganz ähnlich wie im ersten Teile der Abhandlung wollen wir nun hier die Frage zu beantworten suchen: Nach welcher Richtung reißt unser rechtwinkliger konkaver Winkelraum bei normalem Angriff einer negativen Kraft $P$ auf? Der Bachsche Versuchskörper wird sich dann auch ungefähr so verhalten. Die entsprechenden Entwicklungen in ersten Teile sind so ausführlich, daß wir uns hier kürzer fassen können.

Die auf den Fall $\alpha = {}^3/_2$ spezialisierte Spannungsfunktion (32) lautet:

$$F(\varrho,\psi) = C\cdot\varrho^n\left[\cos n\psi - \cos(n-2)\psi + \sqrt{\frac{2-n}{n}}\sin n\psi + \sqrt{\frac{n}{2-n}}\sin(n-2)\psi\right],$$

wo $n = 1{,}5445\ldots$ zu setzen und $C$ eine unbekannte Konstante ist, von welcher nur das Vorzeichen nachher bestimmt werden muß.

Nehmen wir vorweg, daß $C$ negativ ist und setzen seinen Absolutwert der Bequemlichkeit wegen gleich $\frac{1}{n-1}$, so liefern uns die Gl. (17) folgende Darstellung der Spannungen in der Nähe der Ecke:

$$(35)\quad \frac{\sigma_\varrho + \sigma_\psi}{2} = \varrho^{n-2}\left[2\cos(2-n)\psi + 2\sqrt{\frac{n}{2-n}}\cdot\sin(2-n)\psi\right],$$

$$\frac{\sigma_\varrho - \sigma_\psi}{2} = \varrho^{n-2}\left[n\cos n\psi + (2-n)\cos(2-n)\psi + \sqrt{n(2-n)}\cdot\sin n\psi + \sqrt{n(2-n)}\cdot\sin(2-n)\psi\right],$$

$$\tau_{\varrho\psi} = \varrho^{n-2}\left[\sqrt{n(2-n)}\cdot\cos n\psi - \sqrt{n(2-n)}\cdot\cos(2-n)\psi - n\sin n\psi + (2-n)\sin(2-n)\psi\right].$$

[Beiläufig sei erwähnt, daß diese Gleichungen in guter Übereinstimmung mit den Zahlen unsrer Tabelle von Seite 94 stehen.]

Daß $C$ negativ ist, konnte z. B. daraus geschlossen werden, daß mit negativem $C$ $\sigma_\varrho + \sigma_\psi$ für $\psi = \pi$ positiv wird, was ja bei negativer Kraft $P$ gewiß der Fall sein wird.

Aus der Darstellung (35) ergibt sich dann der die Richtung der Hauptspannungen charakterisierende Winkel $\vartheta$ (s. Fig. 11) durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}2\vartheta = \frac{\sqrt{n(2-n)}\cdot\cos n\psi - \sqrt{n(2-n)}\cdot\cos(2-n)\psi - n\sin n\psi + (2-n)\sin(2-n)\psi}{n\cos n\psi + (2-n)\cos(2-n)\psi + \sqrt{n(2-n)}\cdot\sin n\psi + \sqrt{n(2-n)}\cdot\sin(2-n)\psi},$$

die größte Schubspannung wird:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_\varrho - \sigma_\psi}{2}\right)^2 + \tau^2} = 2\varrho^{n-2}\cdot\sqrt{1 + \sqrt{n(2-n)}\cdot\sin 2\psi},$$

die größte Zugspannung:

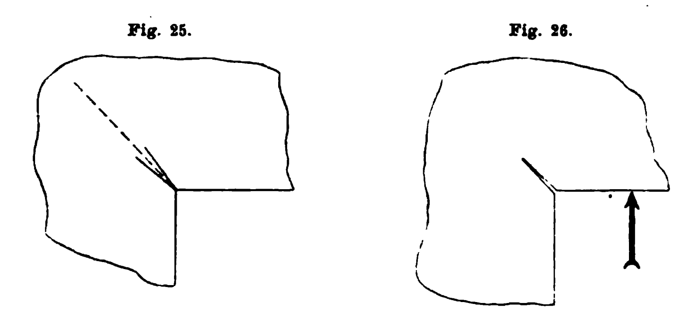
$$\frac{\sigma_\varrho + \sigma_\psi}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\varrho - \sigma_\psi}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$= 2\varrho^{n-2}\cdot\left[\cos(2-n)\psi + \sqrt{\frac{n}{2-n}}\cdot\sin(2-n)\psi + \sqrt{1+\sqrt{n(2-n)}\cdot\sin 2\psi}\right].$$

Die größte Schubspannung wird, wie man unmittelbar sieht, am größten für $\psi = \pi/4$ und $\psi = 5/4\,\pi$, man findet dann als mögliche Richtungen für einen beginnenden Materialbruch nach der Schubspannungshypothese die Richtungen: $\psi = 70^\circ$, $110^\circ$, $160^\circ$, $200^\circ$.

Die größte Zugspannung wird, wie die Ausrechnung zeigt, am größten für $\psi = 68^\circ 12'$ und $\psi = 201^\circ 48'$; als Hauptspannungsrichtungen ergeben sich damit die Richtungen: $\psi = 37^\circ 46'$, $127^\circ 46'$, $142^\circ 14'$, $232^\circ 14'$, wovon als Bruchrichtungen nur: $127^\circ 46'$ und $142^\circ 14'$ in Betracht

kommen, weil auf ihnen jeweils die größere Zugspannung senkrecht steht (Fig. 25). Auf den Bachschen Versuchskörper, der aus Maschinenguß hergestellt war, paßt nun von beiden Festigkeitshypothesen am besten die Zugspannungshypothese. Nach dieser wäre also zu erwarten, daß der Bruch in einer der beiden Richtungen $127^0 46'$ oder $142^0 14'$ beginnt (deren Mittel genau $135^0$ beträgt); wie nachher der Bruch weitergeht, kann durch unsere Untersuchungen nicht recht erschlossen werden. Läßt man als plausibel zu, daß der durch den beginnenden Bruch entstandene Körper (Fig. 26) im großen Ganzen ein Schlitz ist und daß für den weiteren Verlauf des Bruches nur die Komponente von $P$ maßgebend ist, die zur Schlitzrichtung senkrecht steht, so würde


Fig. 25. Fig. 26.

theoretisch der Bruch in seiner eigenen Richtung weiterfressen, was bei den Bachschen Versuchen ungefähr der Fall ist. *Jedenfalls aber sind unsere für den Beginn des Bruches geltenden und auf der Zugspannungshypothese basierenden Ergebnisse in Übereinstimmung mit den Bachschen Versuchen.* —

## Anhang: Über die Eindeutigkeit unserer Lösungen.

Da unsere Bereiche ins Unendliche gehen, so handelt es sich bei der Frage nach der Eindeutigkeit der Lösungen unserer Spannungsprobleme nicht nur darum, zu zeigen, daß zwei als verschieden angesehene Lösungen mit identischen Randbedingungen tatsächlich identisch sind, sondern darüber hinaus noch um den Nachweis, daß ein Gleichgewichtssystem von Kräften, welches ausschließlich an den unendlich fernen Teilen des Randes angreift, überall nur unendlich kleine Spannungen erzeugt, falls jede einzelne spezifische Kraft dieses Systems — Kraft pro Längeneinheit des Randes — so stark wie $\frac{1}{\varrho}$ für $\varrho = \infty$ (oder stärker) verschwindet; denn von solcher Größenordnung sind ja die bei unseren Ansätzen im Unendlichen herrschenden Spannungen.

Die so gekennzeichnete Eindeutigkeitsfrage erledigt sich in ihrem ersten Teile natürlich mit Hilfe des Greenschen Satzes:

$$\iint (U \nabla V - V \nabla U) dx dy = \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) ds;$$

setzt man hier:

$$U = F, \quad V = \nabla F,$$

so resultiert die Gleichung:

$$(36) \qquad -\iint (\nabla F)^2 \cdot dx dy = \int \left(F \cdot \frac{\partial \nabla F}{\partial n} - \nabla F \cdot \frac{\partial F}{\partial n}\right) ds.$$

Hier verschwindet das rechte Integral, wenn $F$ die Differenz zweier Spannungsfunktionen $F_1$ und $F_2$ mit identischen Randbedingungen bedeutet, also ist dann überall $\nabla F = 0$. Da nun auf dem Rande überall $F = 0$, so ist überhaupt $F$ überall gleich Null; die dem $F$ entsprechenden Spannungen sind sämtlich Null.

Diese Schlußweise ist auch dann noch zulässig (s. Seite 69), wenn etwa die dem einzelnen $F_1$ oder $F_2$ entsprechenden Spannungen irgendwo in erlaubter Weise — schwächer als $\frac{1}{\varrho}$ für $\varrho = 0$ — unendlich groß werden.

Indessen versagt sie hinsichtlich des zweiten Teiles unserer Eindeutigkeitsfrage. Denn wenn man den Greenschen Satz auf eine Spannungsfunktion bezieht, der ein ausschließlich im Unendlichen angreifendes Gleichgewichtssystem von Kräften der Größenordnung $\frac{1}{\varrho}$ für $\varrho = \infty$ entspricht, so verschwindet das rechte Integral in (36) im allgemeinen nicht; diese Gleichung gestattet also keinen Schluß auf die Größenordnung von $\nabla F$ oder $F$ selbst. Man kann vielmehr nur sagen, daß ein durchgängiges Unendlichkleinwerden von $\nabla F$ oder der Spannungen sich mit der Gl. (36) *verträgt.*

Der gewünschte auf andere Möglichkeiten als der Verwendung des Greenschen Satzes basierte Beweis ist mir bisher nur bei der Halbebene, dem Schlitz, kurz dem Falle ganzzahliger Werte von $\frac{1}{\alpha}$ gelungen, Dort ergibt sich dafür aber auch über das unmittelbar Notwendige hinaus eine weitergehende Erkenntnis; wir erfahren, wie stark denn eigentlich die Kräfte unseres unendlich fernen Systems verschwinden müssen, damit sie gerade noch überall nur unendlich kleine Spannungen erzeugen. Sagen wir nämlich: Wie $\frac{1}{\varrho^\lambda}$ für $\varrho = \infty$, so ist $\lambda$ keineswegs gleich Eins, sondern kleiner als Eins und bei verschiedenen Bereichen verschieden.

In den genannten Spezialfällen gelingt es ohne weiteres, die allgemeinste Spannungsfunktion, welche einem unendlich fernen Kraftangriffe der geschilderten Art entspricht, anzugeben.

Durch eine naheliegende Erweiterung der Entwicklungen von Seite 84ff. ergibt sich zunächst Folgendes. Der Spannungsfunktion:

$$F(\varrho,\psi)=\sum_{n=1+\alpha,2+\alpha,\cdots,k+\alpha}^{\infty}\varrho^n\{A_n[\cos n\psi-\cos(n-2)\psi]+B_n[(n-2)\sin n\psi-n\sin(n-2)\psi]\},\tag{37}$$

wo $A_n$, $B_n$ beliebige Konstante sind, entspricht in dem Winkelraume $\frac{\pi}{\alpha}$, wo $\frac{1}{\alpha}$ ganzzahlig, eine Spannungsverteilung von folgenden Eigenschaften:

1) Die beiden Ränder $\left(\psi=0 \text{ und } \psi=\frac{\pi}{\alpha}\right)$ des Bereiches sind kräftefrei, denn sowohl die Gleichung (32a) und (33) als auch die transzendente Gleichung (34), welche hier in:

$$\sin^2\frac{n\pi}{\alpha}=0$$

übergeht, sind, wenn $\frac{1}{\alpha}$ ganzzahlig, für jedes $n=k+\alpha$, wo $k$ irgend eine positive oder negative ganze Zahl ist, befriedigt.

2) Die Spannungen werden höchstens in erlaubter Weise (Seite 70) unendlich groß, denn, von der Ordnung $\varrho^{n-2}$, können sie für $\varrho=0$ höchstens von der Ordnung: $(1/\varrho)^{1-\alpha}$ unendlich groß werden, falls nur $k$ auf die positiven ganzen Zahlen beschränkt bleibt; $1-\alpha$ ist aber kleiner als Eins.

Es soll nun gezeigt werden, daß $F$ in der Form (37) überhaupt die allgemeinste Spannungsfunktion ist, welche einem unendlich fernen Kraftsystem der oben geschilderten Art entspricht, daß man also die Konstanten $A_n$, $B_n$ eindeutig so bestimmen kann, daß auf dem unendlich fernen Kreise: $\varrho=\text{const.}=\infty$ beliebig vorgeschriebene Normal- und Schubspannungen von der Größenordnung $\frac{1}{\varrho^\lambda}$ $(\varrho=\infty)$ — wo $\lambda$ einstweilen willkürlich — herrschen.

Ist $R$ ein ins Unendliche anwachsender Wert des Radiusvektors $\varrho$, so können wir uns die auf dem unendlich großen Kreise vorgeschriebenen Randbedingungen in Form zweier Fourierscher Reihen gegeben denken:

$$F_{(\varrho=R)}=R^{2-\lambda}\cdot\sum_{m=0,2\alpha,4\alpha,\ldots,2k\alpha,\ldots}^{\infty}[a_m\cos m\psi+b_m\sin m\psi]\tag{38}$$

und:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\varrho}\right)_{(\varrho=R)}=R^{1-\lambda}\cdot\sum_{m=0,2\alpha,4\alpha,\ldots,2k\alpha,\ldots}^{\infty}[c_m\cos m\psi+d_m\sin m\psi]$$

mit *abcd* als beliebig vorgeschriebenen Konstanten. Die Gleichung (37) ersetzen wir nun durch die folgende:

$$(39)\quad F(\varrho,\psi)=R^{2-\lambda}\cdot\sum_{n=1+\alpha,\,2+\alpha,\,\ldots,\,k+\alpha,\,\ldots}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n}\{A_n'[\cos n\psi-\cos(n-2)\psi]+B_n'[(n-2)\sin n\psi-n\sin(n-2)\psi]\},$$

aus welcher wir durch Differentiation ableiten:

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho}(\varrho,\psi)=R^{1-\lambda}\cdot\sum_{n=1+\alpha,\,2+\alpha,\,\ldots,\,k+\alpha,\,\ldots}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1}\{nA_n'[\cos n\psi-\cos(n-2)\psi]+nB_n'[(n-2)\sin n\psi-n\sin(n-2)\psi]\}.$$

Somit ergeben sich mit den Abkürzungen:

$$(40)\quad \begin{aligned}\Theta(\psi)&=\sum_{n=1+\alpha,\,2+\alpha,\,\ldots,\,k+\alpha,\,\ldots}^{\infty}\{A_n'[\cos n\psi-\cos(n-2)\psi]+B_n'[(n-2)\sin n\psi-n\sin(n-2)\psi]\},\\ \Omega(\psi)&=\sum_{n=1+\alpha,\,2+\alpha,\,\ldots,\,k+\alpha,\,\ldots}^{\infty}\{nA_n'[\cos n\psi-\cos(n-2)\psi]+nB_n'[(n-2)\sin n\psi-n\sin(n-2)\psi]\}\end{aligned}$$

als notwendige und hinreichende Bedingungen für das Erfülltsein der Randbedingungen (38) die folgenden:

$$(41)\quad \left.\begin{aligned}\Theta(\psi)&=\sum_{m=0,\,2\alpha,\,4\alpha,\,\ldots,\,2k\alpha,\,\ldots}^{\infty}[a_m\cos m\psi+b_m\sin m\psi],\\ \Omega(\psi)&=\sum_{m=0,\,2\alpha,\,4\alpha,\,\ldots,\,2k\alpha,\,\ldots}^{\infty}[c_m\cos m\psi+d_m\sin m\psi].\end{aligned}\right\}\ \text{im Intervalle: } 0\leqq\psi\leqq\frac{\pi}{\alpha}.$$

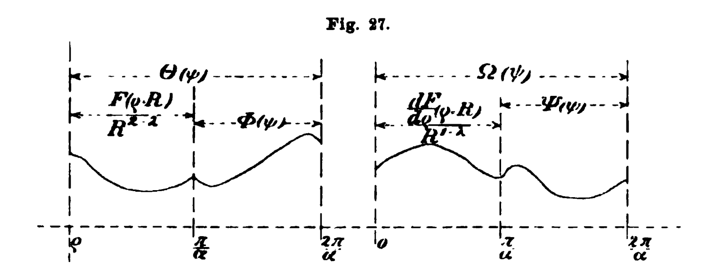
Nun haben aber die Reihen (40) eine doppelt so große Periode wie die Reihe (41), nämlich $\frac{2\pi}{\alpha}$; wenn sie also auch — was ja verlangt wird — in dem Intervalle von 0 bis $\frac{\pi}{\alpha}$ die Reihen (41) darstellen, so werden sie doch in dem Intervalle von $\frac{\pi}{\alpha}$ bis $\frac{2\pi}{\alpha}$ gewisse andere Winkelfunktionen darstellen; es wird etwa gelten:

$$(42)\quad \left.\begin{aligned}\Theta(\psi)&=\sum_{m=0,\,2\alpha,\,4\alpha,\,\ldots,\,2k\alpha,\,\ldots}^{\infty}[e_m\cos m\psi+f_m\sin m\psi], &&\text{abgekürzt}=\Phi(\psi)\\ \Omega(\psi)&=\sum_{m=0,\,2\alpha,\,4\alpha,\,\ldots,\,2k\alpha,\,\ldots}^{\infty}[g_m\cos m\psi+h_m\sin m\psi], &&\quad\text{„}\quad=\Psi(\psi)\end{aligned}\right\}\ \text{im Intervalle: } \frac{\pi}{\alpha}\leqq\psi\leqq\frac{2\pi}{\alpha}.$$

Es liegt nun nahe, anzunehmen, daß die Konstanten $e, f, g, h$ zusammen mit den Konstanten $A'$, $B'$ durch die Gleichungen (41) und (42)

eindeutig bestimmt sind. Um dies zu prüfen, wenden wir das Verfahren an, die Koeffizienten einer Fourierschen Reihe durch Bildung bestimmter

Fig. 27.



Integrale über die Periode der Reihe zu bestimmen; wir bekommen dann folgendes unendliche System linearer Gleichungen (vgl. Fig. 27):

$$\int_0^{2\pi/\alpha} \Theta \cdot \cos(\mu\psi) d\psi = \int_0^{\pi/\alpha} \frac{F_{(\varrho = R)}}{R^{2-\lambda}} \cdot \cos(\mu\psi) d\psi + \int_{\pi/\alpha}^{2\pi/\alpha} \Phi \cdot \cos(\mu\psi) d\psi,$$

$$\int_0^{2\pi/\alpha} \Theta \cdot \sin(\mu\psi) d\psi = \int_0^{\pi/\alpha} \frac{F_{(\varrho = R)}}{R^{2-\lambda}} \cdot \sin(\mu\psi) d\psi + \int_{\pi/\alpha}^{2\pi/\alpha} \Phi \cdot \sin(\mu\psi) d\psi,$$

$$\int_0^{2\pi/\alpha} \Omega \cos(\mu\psi) d\psi = \int_0^{\pi/\alpha} \frac{\frac{\partial F}{\partial \varrho}_{(\varrho = R)}}{R^{1-\lambda}} \cdot \cos(\mu\psi) d\psi + \int_{\pi/\alpha}^{2\pi/\alpha} \Psi \cdot \cos(\mu\psi) d\psi,$$

$$\int_0^{2\pi/\alpha} \Omega \sin(\mu\psi) d\psi = \int_0^{\pi/\alpha} \frac{\frac{\partial F}{\partial \varrho}_{(\varrho = R)}}{R^{1-\lambda}} \cdot \sin(\mu\psi) d\psi + \int_{\pi/\alpha}^{2\pi/\alpha} \Psi \cdot \sin(\mu\psi) d\psi,$$

wo:

$$\mu = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, k\alpha, \ldots$$

ist. In diesem System ist die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten; denn brechen wir alle Reihen bei einem sehr großen Index $m = n = k$ ab, so haben wir nach Obigem $4k$ Gleichungen und:

$2k$ Unbekannte $A'$, $B'$
$k$ „ $e, f$
$k$ „ $g, h$,

also zusammen $4k$ Unbekannte.

Nehmen wir jetzt einfach an, daß dieses unendliche System linearer Gleichungen stets eine Auflösung hat, so stellt damit $F$ in der Form (39) wirklich die allgemeinste Spannungsfunktion für den geschilderten unendlich fernen Kraftangriff dar. Wir sehen dann an (39) auch sofort, wie stark das Kraftsystem verschwinden muß, um überall nur unendlich kleine Spannungen zu erzeugen. Nach (39) ist nämlich die Größenordnung einer Spannung im Maximum gleich:

$$\lim_{(\varrho=0)} \left(\frac{1}{\varrho}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{1}{R}\right)^{\lambda-(1-\alpha)}.$$

Soll diese für beliebig kleines festgehaltenes $\varrho$ mit wachsendem $R$ unendlich klein werden, so muß ersichtlich:

$$(43) \qquad \lambda > 1 - \alpha$$

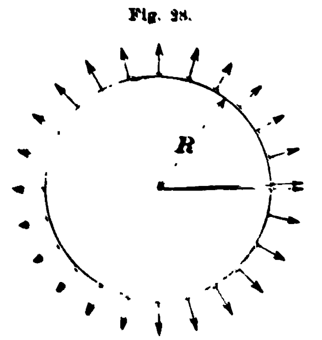
sein.

Für die Halbebene ($\alpha = 1$) und den Schlitz ($\alpha = \frac{1}{2}$) haben wir damit Folgendes:

*Wenn an dem unendlich fernen Kreise $R$ der Halbebene ein Gleichgewichtssystem von Kräften angreift, dessen einzelne Kraft pro Längeneinheit irgendwie unendlich klein wird, so werden dadurch überall nur unendlich kleine Spannungen erzeugt; beim Schlitz dagegen ist dazu notwendig und hinreichend, daß die einzelne Kraft pro Längeneinheit stärker verschwindet als* $\lim \frac{1}{\sqrt{R}}$.

*Im allgemeinen Falle eines Winkelraumes von ganzzahligem* $\frac{1}{\alpha}$ *ist die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Kräfte stärker verschwinden als* $\lim \frac{1}{R^{1-\alpha}}$.

Fig. 28.




In diesen Ergebnissen ist der gewünschte Eindeutigkeitsbeweis enthalten.

Nicht nachgewiesen ist dabei, daß das auftretende unendliche lineare Gleichungssystem immer eine Lösung besitzt. In einem speziellen Falle habe ich die Rechnung zahlenmäßig durchgeführt. An dem unendlich fernen Kreise des Schlitzes greife das Kraftsystem:

$$\sigma_\varrho = \frac{1}{R^\lambda}, \quad \tau_{\varrho\psi} = 0$$

an (Fig. 28); diesem entsprechen nach den Gleichungen (17) die Randbedingungen:

$$F_{(\varrho=R)} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \varrho}_{(\varrho=R)} = R^{1-\lambda}.$$

Die Gleichungen (41) reduzieren sich damit auf:

$$\left.\begin{array}{l}\Theta(\psi) = 0 \\ \Omega(\psi) = 1\end{array}\right\} \text{im Intervalle } 0 \leqq \psi \leqq 2\pi.$$

Bricht man nun die Reihe schon bei den Gliedern mit $\frac{7\psi}{2}$ ab und berechnet dann die Koeffizienten $A'B'$ in (40), so ergeben sich die in Fig. 29 dargestellten Funktionen $\Theta(\psi)$ und $\Omega(\psi)$, welche in der Tat in dem Intervalle von 0 bis $2\pi$ sehr gut die Konstanten Null, bezw. Eins darstellen.

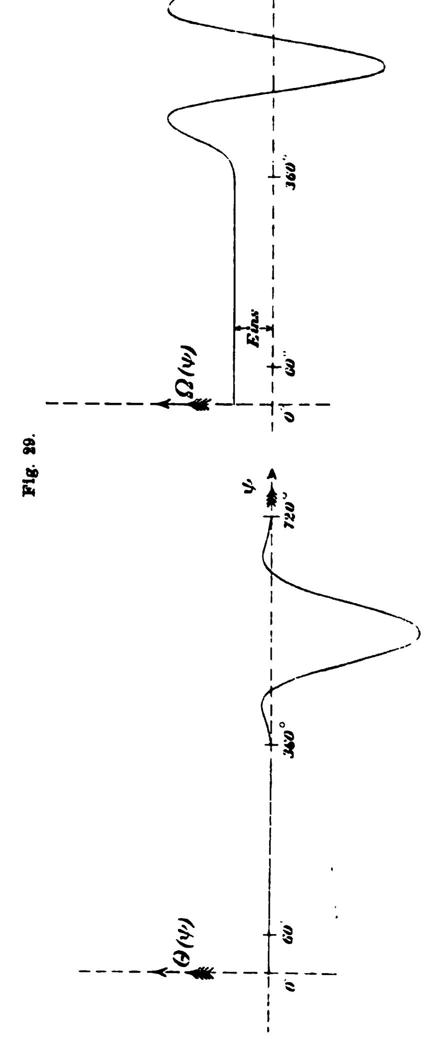


Fig. 29.

Für den Winkelraum mit beliebig gebrochenem $\frac{1}{\alpha}$ ist mit den obigen Betrachtungen noch nichts über den zugehörigen Wert von $\lambda$ ausgemacht. Man wird aber mit der Vermutung nicht fehlgehen, daß auch dort $\lambda$ niemals größer als Eins ist; denn es dürfte plausibel sein, die gewonnenen Ergebnisse in folgender Form zu verallgemeinern: Im allgemeinen ist der kritische Wert von $\lambda$ — d. h. der Wert, der nur eben übertroffen zu werden braucht — überhaupt Null; er ist nur bei solchen Bereichen größer als Null, deren Ränder singuläre Stellen aufweisen, und zwar wird er dann um so größer sein, von desto höherer Singularität diese Stellen sind; man kann aber zu jedem Winkelraum einen Winkelraum mit ganzzahligem $\frac{1}{\alpha}$ finden, deren Ecke eine größere Singularität besitzt; bei allen diesen Winkelräumen ist aber nach (43) $\lambda$ zwar größer als ein echter Bruch, nämlich $1 - \alpha$, aber nicht größer als Eins.

# Zur Theorie der Drehungen und Quaternionen.[1])

Von W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

Die schon vielfach behandelten Theorien der Drehungen des Raumes um einen festen Punkt einerseits, der Quaternionen andererseits nebst ihren Beziehungen zu einander, haben in dem Werke von F. Klein und A. Sommerfeld „Über die Theorie des Kreisels“[2]) eine wesentliche Förderung erfahren.

Die Verfasser führen in eine orthogonale Substitution, die ein rechtwinkliges Achsensystem $(x, y, z)$ in ein zweites $(X, Y, Z)$ mit demselben Anfangspunkt $O$ überführt, zunächst die Eulerschen Drehungswinkel $\psi, \vartheta, \varphi$ ein, und bedienden sich sodann, statt der $x, y$ bezw. $X, Y$, der komplexen Verbindungen $x \pm iy$, bezw. $X \pm iY$. In der so umgestalteten Substitution drücken sich die neun Koeffizienten in einfacher Weise linear und homogen aus durch die Quadrate und Produkte von vier Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; diese stellen sich weiterhin als der Kern der ganzen Kreiseltheorie heraus.

Bildet man andererseits von diesen Parametern die linearen Verbindungen $A = \frac{\gamma+\beta}{2i}$, $B = \frac{\gamma-\beta}{2}$, $C = \frac{\alpha-\delta}{2i}$, $D = \frac{\alpha+\delta}{2}$, so sind diese vier neuen Größen $A, B, C, D$ die Komponenten einer *„Einheitsquaternion“*, d. i. einer Quaternion vom Tensor 1. Um von ihnen aus zu den Komponenten einer *allgemeinen Quaternion* von beliebigem Tensor $T$ zu gelangen, d. h. zu vier Größen $AT, BT, CT, DT$, hat man nur die orthogonale Substitution zu kombinieren mit einer *Ähnlichkeitstransformation* („Streckung“), bei festgehaltenem Anfangspunkte $O$, vom Vergrößerungsverhältnis $T^2$. Um die Bedeutung der Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ klar zu stellen, wird in dem genannten Werke davon ausgegangen, daß eine orthogonale Substitution die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ in sich überführt, oder, in geometrischer Redeweise, den auf dem imaginären „Kugelkreise“ stehenden „Minimalkegel“ mit der Spitze $O$.

Zu jedem Punkte des Minimalkegels gehört ein Paar von Parametern $\lambda_1, \lambda_2$, und umgekehrt. Sind $\Lambda_1, \Lambda_2$ die dem neuen Koordinatensystem $(X, Y, Z)$ entsprechenden Werte der beiden Parameter, so findet eine orthogonale Substitution ihren einfachsten Ausdruck in einer linearen homogenen Substitution der $\lambda_1, \lambda_2$ in die $\Lambda_1, \Lambda_2$, mit den

1) Vgl. eine vorläufige Mitteilung in den Wiener Berichten dieses Jahres.

2) Leipzig, Heft 1, 1997; Heft 2, 1898; Heft 3, 1903. Für das Folgende kommen hauptsächlich die §§ 2, 3, 4, 5, 7 des ersten Heftes in Betracht.

Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$: $\lambda_1 = \alpha A_1 + \beta A_2$, $\lambda_2 = \gamma A_1 + \delta A_2$. Hierbei läßt sich den Parametern $\lambda_1, \lambda_2$, bezw. $A_1, A_2$ eine erweiterte Bedeutung verleihen, wenn man die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ durch die allgemeinere $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ersetzt.

Aus der binären Substitution der $\lambda_1, \lambda_2$ fließen sofort die Formeln für die Zusammensetzung zweier orthogonaler Substitutionen als die elementaren Zusammensetzungsformeln für die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; von hier aus gelangt man ohne Mühe zu den korrespondierenden Zusammensetzungsformeln für die Quaternionen, d. h. dem Hamiltonschen Multiplikationstheorem der Quaternionen.

Hinterher wird der Zusammenhang mit den Drehungselementen der orthogonalen Substitution untersucht. Wiederum mit Hilfe des Minimalkegels wird festgestellt, daß es (abgesehen von zwei imaginären Drehungsachsen) eine und nur eine reelle *Drehungsachse* $d$ gibt, derart, daß sich der Übergang des Systems $(x, y, z)$ zum Systeme $(X, Y, Z)$ vollzieht vermöge einer Drehung um $d$ durch einen bestimmten *Drehungswinkel* $\omega$. Die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einerseits, die Parameter $A, B, C, D$ andererseits hängen dann mit den Richtungskosinus der Achse $d$ und dem Sinus und Kosinus des halben Drehungswinkels $\frac{\omega}{2}$ sehr einfach zusammen.

So schön und durchsichtig sich die damit entwickelte Theorie der Drehungen und Quaternionen vom Standpunkte der modernen Geometrie aus gestaltet, so wird man doch pädagogische Zweifel hegen dürfen, wie weit dieser Standpunkt als ein elementarer, zur Einführung in die Theorie geeigneter gelten darf.

Insbesondere wird man die Fragen aufwerfen, ob und in wie weit eine innere Notwendigkeit vorliegt, das Komplexe gleich zu Beginn der Entwicklung einzuführen; ob es nicht vielmehr möglich erscheint, zu den Zusammensetzungsformeln für die orthogonalen Substitutionen bezw. Quaternionen in ihrem Zusammenhange mit den Drehungselementen auf *rein reellem und direktem* Wege zu gelangen, und erst am Schlusse behufs formaler Vereinfachung weiterer Rechnungen die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als lineare komplexe Verbindungen der $A, B, C, D$ einzuführen.

Im Nachstehenden werden die erste der aufgeworfenen Fragen in verneinendem, die weiteren dagegen in bejahendem Sinne beantwortet. Indem von vonherein drei *gleichberechtigte* Parameter, namlich die drei Diagonalkoeffizienten in der orthogonalen Substitution, zugrunde gelegt werden, gestaltet sich die Rechnung besonders durchsichtig. Die Quaternionenparameter $A, B, C, D$ erscheinen dann in dem Lichte, daß sie dazu dienen, die *vieldeutige* Darstellung zu einer *eindeutigen* zu

machen. Die Kleinschen Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ verfolgen weiterhin den Zweck, das Rechnen mit den vier Hamiltonschen Einheiten auf das mit den gewöhnlichen Einheiten der komplexen Zahlen zurückzuführen.

Der Verfasser hofft damit, abgesehen von der selbständigen Bedeutung des Gegenstandes, manchem Leser den Zugang zu dem inhaltsreichen Werk von Klein-Sommerfeld zu erleichtern.

## § 1.

### Bestimmung der Drehachse. Erste Einführung der Quaternionen.

Eine orthogonale Substitution des Raumes, d. h. der Übergang von einem rechtwinkligen Achsensysteme $(x, y, z)$ zu einem andern, gleichstimmigen Systeme $(X, Y, Z)$ mit dem Anfangspunkte $O$ findet ihren Ausdruck in den bekannten Formeln:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z \\ y = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z \\ z = \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z, \end{cases}$$

wo die Determinante $\Delta$ der Koeffizienten — der Kosinus der Winkel, die die Achsen des einen Systems mit denen des andern bilden — den Wert $+1$ besitzt. Zwischen den Koeffizienten bestehen die Relationen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und in der Determinante $\Delta$ ist jedes Element gleich seinem Minor, also z. B.:

$$(3) \qquad \alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, \quad \beta_2 = \alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1, \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \quad \text{etc.}$$

In der Umkehrung der Formeln (1) haben nur die symmetrisch gelegenen Koeffizienten, $\alpha_2$, $\beta_1$; $\alpha_3$, $\gamma_1$; $\beta_3$, $\gamma_2$ je ihren Platz getauscht.

Wir fragen nach den Raumpunkten $(x, y, z) = (X, Y, Z)$, die, jeder für sich, bei (1) ungeändert[1] bleiben. Diese Punkte, die mit $(a, b, c)$ bezeichnet seien, bestimmen sich durch die Bedingungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} a(\alpha_1 - 1) + b\beta_1 + c\gamma_1 = 0 \\ a\alpha_2 + b(\beta_2 - 1) + c\gamma_2 = 0 \\ a\alpha_3 + b\beta_3 + c(\gamma_3 - 1) = 0. \end{cases}$$

[1] Fragt man nach den Raumpunkten, deren Koordinaten vermöge (1) einen und denselben Faktor annehmen, so gelangt man, abgesehen von dem Fall, wo dieser Faktor gleich Eins ist, zu zwei imaginären Drehachsen.

Diese drei Gleichungen bestehen in der Tat zusammen, da die Determinante der Koeffizienten verschwindet, denn mit Rücksicht auf (3) und $\Delta = +1$ kommt:

(5) $$(-1)^3 + (-1)^2 (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) + (-1)(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) + 1 \equiv 0.$$

Die Punkte $(a, b, c)$ erfüllen also eine, durch $O$ laufende Gerade $d$. Da jede Raumgerade, die $d$ trifft und zugleich auf $d$ senkrecht steht, vermöge (1) wieder in eine solche übergeht[1]), hat sich jeder Raumpunkt um durch einen gewissen, ein- und denselben Winkel $\omega$ gedreht. Es ist daher die Benennung *„Drehachse $d$"* und *„Drehwinkel $\omega$"* gerechtfertigt.[2])

Da die Richtungskosinus von $d$ den $a, b, c$ proportional sind, mögen *diese Kosinus selbst* mit $a, b, c$ bezeichnet sein.

Versteht man unter $r, s, t$ drei Proportionalitätsfaktoren, und setzt zur Abkürzung:

$$\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = \sigma, \quad \sigma - 1 = \tau,$$

so liefert die Auflösung je zweier der Gleichungen (4):

(7) $$\begin{cases} ra = 2\alpha_1 - \tau, & rb = \alpha_2 + \beta_1, & rc = \alpha_3 + \gamma_1, \\ sa = \alpha_2 + \beta_1, & sb = 2\beta_2 - \tau, & sc = \beta_3 + \gamma_2, \\ ta = \alpha_3 + \gamma_1, & tb = \beta_3 + \gamma_2, & tc = 2\gamma_3 - \tau. \end{cases}$$

Da die Substitution (1) wegen (2) nur von drei wesentlichen Parametern abhängt, wählen wir als solche die drei Diagonalkoeffizienten in (1), $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$.

Man drücke zunächst die $r, s, t$ in (7) durch die $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ aus.

Man erhält z. B. für $r$, durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen der ersten Reihe (7), unter Berücksichtigung von (2) und (3): $r^2 = (2 - \tau)(2\alpha_1 - \tau) = (3 - \sigma)(2\alpha_1 - \tau)$, und damit für $r^2, s^2, t^2$:

(I) $$r^2 = (3-\sigma)(2\alpha_1 - \tau), \quad s^2 = (3-\sigma)(2\beta_2 - \tau), \quad t^2 = (3-\sigma)(2\gamma_3 - \tau).$$

Verschwindet $3 - \sigma$, oder verschwinden simultan $2\alpha_1 - \tau$, $2\beta_2 - \tau$, $2\gamma_3 - \tau$, so wird (1) zur „Identität" $x = X$, $y = Y$, $z = Z$; die Drehachse $d$ ist dann unbestimmt, d. h. jede Gerade durch $O$ kann als Drehachse sc. mit dem Drehwinkel 0 gelten. Sieht man von diesem Falle ab, so folgt aus (I), daß die Kosinus $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ den Determinationen:

(8) $$\alpha_1 \geqq \beta_2 + \gamma_3 - 1, \quad \beta_2 \geqq \alpha_1 + \gamma_3 - 1, \quad \gamma_3 \geqq \alpha_1 + \beta_2 - 1$$

1) Es ist ohne weiteres zu sehen, daß vermöge (1) parallele Ebene und Gerade wieder in solche übergehen, sowie daß der Winkel zwischen zwei Radienvektoren, mithin auch jeder beliebige Winkel seine Größe beibehält.

2) Es sei die kürzere Redeweise „Dreh-Achse, Dreh-Winkel" gestattet (statt Drehungs-Achse, Drehungs-Winkel).

unterliegen. Diese sind aber auch die einzigen Beschränkungen für die Kosinus $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$. Aus (7) erhält man dann, auf Grund von (I), für die $a, b, c$[1]:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} a\sqrt{3-\sigma} = \sqrt{2\alpha_1-\tau} \\ b\sqrt{3-\sigma} = \sqrt{2\beta_2-\tau} \\ c\sqrt{3-\sigma} = \sqrt{2\gamma_3-\tau}. \end{cases}$$

Hier darf das Vorzeichen von $\sqrt{3-\sigma}$ positiv gewählt werden. Den acht verschiedenen Vorzeichenkombinationen der rechts stehenden Wurzeln entsprechen vier[2]) Drehachsen (von denen immer drei die Spiegelbilder der vierten bezüglich der Koordinatenebenen sind), da je zwei entgegengesetzte Vorzeichentripel dieselbe Drehachse liefern. Bezeichnen daher $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die positive oder negative Einheit, wo sich noch das Produkt der Forderung[3])

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1$$

unterwerfen läßt, so sind die vier Drehachsen $(a, b, c)$ genauer angegeben durch:

$$\text{(II')} \qquad \begin{cases} a\sqrt{3-\sigma} = \varepsilon_1\sqrt{2\alpha_1-\tau} \\ b\sqrt{3-\sigma} = \varepsilon_2\sqrt{2\beta_2-\tau} \\ c\sqrt{3-\sigma} = \varepsilon_3\sqrt{2\gamma_3-\tau}, \end{cases} \qquad (\varepsilon_i = \pm 1,\ \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = +1)$$

wo nunmehr alle Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Jetzt sollen die $\alpha_2, \beta_1$; $\alpha_3, \gamma_1$; $\beta_3, \gamma_2$ durch die $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ ausgedrückt werden. Aus (7), (I), (II') folgt sofort:

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \alpha_2 + \beta_1 = \varepsilon_3\sqrt{2\alpha_1-\tau}\sqrt{2\beta_2-\tau} \\ \alpha_3 + \gamma_1 = \varepsilon_2\sqrt{2\alpha_1-\tau}\sqrt{2\gamma_3-\tau} \\ \beta_3 + \gamma_2 = \varepsilon_1\sqrt{2\beta_2-\tau}\sqrt{2\gamma_3-\tau}. \end{cases}$$

---

1) Über das Verschwinden von $3-\sigma$, oder das gleichzeitige Verschwinden von $2\alpha_1-\tau$, $2\beta_2-\tau$, $2\gamma_3-\tau$ gilt das bei (I) Bemerkte. Aber auch jede *einzelne* der letzteren drei Größen hat ihre unmittelbare Bedeutung. Denn ist z. B. $2\alpha_1-\tau = 3-\sigma$, so auch $\alpha_1 = 1$, $a = \pm 1$ und umgekehrt; die $x$-Achse fällt dann mit der $X$-Achse und zugleich mit der Drehachse zusammen.

2) Diese vier Drehachsen sind ohne weiteres realisierbar, da man ja umgekehrt von einer beliebigen Drehachse ausgehen, und diese an den drei Koordinatenebenen spiegeln kann.

3) Sieht man von dieser Forderung ab, so wird der Drehachse zugleich ein bestimmter Sinn beigelegt, was für manche Untersuchungen zweckmäßig erscheint, [illegible] repräsentiert dann 16 verschiedene Lösungssysteme.

Für die Produkte $\alpha_2\beta_1$, $\alpha_3\gamma_1$, $\beta_3\gamma_2$ ergibt sich aus (3):

$$(10) \qquad \alpha_2\beta_1 = \alpha_1\beta_2 - \gamma_3, \quad \alpha_3\gamma_1 = \alpha_1\gamma_3 - \beta_2, \quad \beta_3\gamma_2 = \beta_2\gamma_3 - \alpha_1.$$

Es sind also z. B. $\alpha_2$, $\beta_1$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(11) \qquad \nu^2 - \nu\varepsilon_3\sqrt{2\,\alpha_1 - \tau}\sqrt{2\,\beta_2 - \tau} + (\alpha_1\beta_2 - \gamma_3) = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung $D_3$ für die Diskriminante von (11):

$$(12) \qquad D_3 = (2\,\alpha_1 - \tau)(2\,\beta_2 - \tau) - 4(\alpha_1\beta_2 - \gamma_3),$$

so berechnen sich $\alpha_2$, $\beta_1$ zu:

$$(13) \qquad \begin{Bmatrix}\alpha_2\\ \beta_1\end{Bmatrix} = \varepsilon_3\sqrt{2\,\alpha_1 - \tau}\,\sqrt{2\,\beta_2 - \tau} \pm \sqrt{D_3}.$$

Der Wert (12) von $D_3$ formt sich sofort um, wie folgt:

$$(12') \qquad D_3 = (\sigma + 1)(2\,\gamma_3 - \tau).$$

Damit hat man für die $\alpha_2, \beta_1$; $\alpha_3, \gamma_1$; $\beta_3, \gamma_2$[1]):

$$(14) \qquad \begin{cases} \begin{Bmatrix}2\,\alpha_2\\ 2\,\beta_1\end{Bmatrix} = \varepsilon_3\sqrt{2\,\alpha_1 - \tau}\sqrt{2\,\beta_2 - \tau} \pm \sqrt{\sigma + 1}\sqrt{2\,\gamma_3 - \tau} \\ \begin{Bmatrix}2\,\gamma_1\\ 2\,\alpha_3\end{Bmatrix} = \varepsilon_2\sqrt{2\,\alpha_1 - \tau}\sqrt{2\,\gamma_3 - \tau} \pm \sqrt{\sigma + 1}\sqrt{2\,\beta_2 - \tau} \\ \begin{Bmatrix}2\,\beta_3\\ 2\,\gamma_2\end{Bmatrix} = \varepsilon_1\sqrt{2\,\beta_2 - \tau}\sqrt{2\,\gamma_3 - \tau} \pm \sqrt{\sigma + 1}\sqrt{2\,\alpha_1 - \tau}, \end{cases}$$

wo aber die Zuordnung der rechts in der Mitte stehenden Vorzeichen zu den linken Seiten noch zu ermitteln ist. Dies geschieht etwa auf Grund eines besonderen Falles, z. B. $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 0$. Dann

---

1) Verschwindet hier $\sigma + 1$, so ist $\alpha_2 = \beta_1$, $\alpha_3 = \gamma_1$, $\beta_3 = \gamma_2$. In der Tat ist $\sigma + 1 = 0$ gleichbedeutend mit $2\,\alpha_1 - \tau = 2\,(1 + \alpha_1)$, etc. Versteht man unter $A_1$, $B_2$, $\Gamma_3$ die Winkel selbst, die jede der alten Achsen mit der entsprechenden neuen bildet, so liefert (II') sofort: $a = \varepsilon_1 \cos\frac{A_1}{2}$, $b = \varepsilon_2 \cos\frac{B_2}{2}$, $c = \varepsilon_3 \cos\frac{\Gamma_3}{2}$. Dann aber lassen sich beide Achsensysteme miteinander vertauschen, sodaß $\alpha_2 = \beta_1$, $\alpha_3 = \gamma_1$, $\beta_3 = \gamma_2$.

Verschwindet andererseits etwa $2\alpha_1 - \tau$, so ist gemäß (II) $a = 0$, d. h. die Dreh-Achse steht senkrecht auf der $X$-Achse, was wieder $\gamma_2 = \beta_3$ nach sich zieht. Verschwinden von den drei Größen $2\alpha_1 - \tau$, $2\beta_2 - \tau$, $2\gamma_3 - \tau$ irgend zwei, aber nicht die dritte, so fällt die Drehachse mit einer der Koordinatenachsen zusammen.

Die Determinationen (8) lassen sich auch dahin deuten, daß aus den Längen $l = \frac{1 - \alpha_1}{2} = \sin^2\frac{A_1}{2}$, $m = \frac{1 - \beta_2}{2} = \sin^2\frac{B_2}{2}$, $n = \frac{1 - \gamma_3}{2} = \sin^2\frac{\Gamma_3}{2}$ stets ein ebenes Dreieck konstruiert werden kann. Seien $\lambda$, $\mu$, $\nu$, die Winkel dieses Dreiecks, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel der Drehachse $d$ gegen die Koordinatenachsen, und

werden alle Wurzeln (absolut) gleich $+1$, die Determinante $\varDelta$ von (1) wird $1 = \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2$.

Die Bedingungen (2) lassen nur zwei Möglichkeiten zu: entweder ist $\alpha_3 = \beta_1 = \gamma_2 = 0$, $\alpha_2, \beta_3, \gamma_1 \neq 0$, oder aber $\alpha_2 = \beta_3 = \gamma_1 = 0$, $\alpha_3, \beta_1, \gamma_2 \neq 0$. Somit entspricht in (14) entweder das positive Zeichen in der Mitte rechts den oberen Werten links $\alpha_2, \gamma_1, \beta_3$, das negative Zeichen den unteren Werten $\beta_1, \alpha_3, \gamma_2$, oder aber umgekehrt.

Um die acht verschiedenen Wertsysteme (14), die so zu einem gegebenen Wertsysteme $(\alpha_1, \beta_2, \gamma_3)$ gehören, übersichtlich darzustellen, führe man noch ein viertes Zeichen $\eta$ ein für $\pm 1$, und ziehe dieses zu der vierten, an sich ebenfalls als positiv betrachteten Wurzel $\sqrt{\sigma + 1}$.

„Bedient man sich der abkürzenden Zeichen:

$$\text{(III)} \quad A = \tfrac{1}{2}\varepsilon_1\sqrt{2\alpha_1 - \tau}, \quad B = \tfrac{1}{2}\varepsilon_2\sqrt{2\beta_2 - \tau}, \quad C = \tfrac{1}{2}\varepsilon_3\sqrt{2\gamma_3 - \tau},$$
$$D = \tfrac{1}{2}\eta\sqrt{\sigma + 1},$$
$$(\varepsilon_i, \eta = \pm 1, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = +1, \quad \sigma = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3, \quad \sigma - 1 = \tau),$$

so sind die acht Lösungssysteme (14) in der Darstellung enthalten:

$$\text{(15)} \quad \begin{cases} \alpha_2 = 2(AB + CD), & \beta_1 = 2(AB - CD), \\ \gamma_1 = 2(AC + BD), & \alpha_3 = 2(AC - BD), \\ \beta_3 = 2(BC + AD), & \gamma_2 = 2(BC - AD).\text{“} \end{cases}$$

Mittels der in (III) eingeführten Größen $A, B, C, D$ vereinfachen sich auch die Relationen (II′). Da $3 - \sigma = 4(1 - D^2)$, so wird (bei positiven Zeichen der Wurzeln):

$$\text{(16)} \qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{3 - \sigma} = \sqrt{1 - D^2},$$

und (II′) zu:

$$\text{(II)} \qquad a\sqrt{1 - D^2} = A, \quad b\sqrt{1 - D^2} = B, \quad c\sqrt{1 - D^2} = C.$$

---

$2s = l + m + n$, so lassen sich die Formeln (II), (III), (VI′) des Textes in die Gestalt setzen:

$$\text{(II)} \quad \cos\alpha = a = \sqrt{\frac{s - l}{s}} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}} \text{ etc.}, \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{l}{s}} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\lambda}{2}}{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}}} \text{ etc.};$$

$$\text{(III)} \qquad A = \sqrt{s - l}, \quad B = \sqrt{s - m}, \quad C = \sqrt{s - n};$$

$$\text{(VI′)} \qquad \sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{s}, \quad \cos\frac{\omega}{2} = \sqrt{1 - s}.$$

Hierin liegt ein Prinzip, um die elementare Dreieckstrigonometrie auf die Theorie der Drehungen im Raume zu übertragen. Zugleich ergibt sich damit eine einfache Konstruktion der Drehachse $d$ und des Drehwinkels $\omega$ bei gegebenen Winkeln $A_1$, $B_2$, $\Gamma_3$ mittels Zirkel und Lineal.

Bestimmt man hier noch einen, innerhalb der ersten zwei Quadranten gelegenen Hilfswinkel $v$ eindeutig durch $D = \cos v$, so wird $+\sqrt{1 - D^2} = \sin v$:

$$(17) \qquad D = \cos v, \quad +\sqrt{1 - D^2} = \sin v.$$

Schreibt man die Festsetzungen (III) in der Gestalt:

$$(\mathrm{III}') \quad 4A^2 = 2\alpha_1 - \sigma + 1, \quad 4B^2 = 2\beta_2 - \sigma + 1, \quad 4C^2 = 4\gamma_3 - \sigma + 1,$$
$$4D^2 = \sigma + 1 \quad (\sigma = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3),$$

so entsteht durch Addition die fundamentale Identität:

$$(\mathrm{IV}) \qquad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1.$$

Man erkennt jetzt den Vorteil, den die Einführung der neuen Parameter $A, B, C, D$ an Stelle der alten $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ bietet. Während einem beliebig gegebenen Wertsysteme der $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ noch *acht*, durch (14) angegebene Substitutionen (1) entsprechen, gehört jetzt zu irgend einem, einschließlich der Vorzeichen — nur mit der Beschränkung, daß das Produkt $ABC$ positiv ausfällt — vorgegebenen Wertsysteme der $A, B, C, D$ nur eine *einzige*, aus (15) und (III′) zu entnehmende Substitution (1).

Diese neuen Parameter $A, B, C, D$ (15) sollen die *Komponenten einer Einheits-Quaternion* heißen.

Kombiniert man nunmehr die Substitution (1) mit einer *Ähnlichkeitstransformation* (*Streckung*), bei festgehaltenem $O$, vom Vergrößerungsverhältnis $T^2$ — wo $T$ selbst noch positiv oder negativ wählbar sei —:

$$(18) \qquad X = T^2 X_1, \quad Y = T^2 Y_1, \quad Z = T^2 Z_1,$$

so erweitert sich der Übergang (1) vom Systeme $(x, y, z)$ zum Systeme $(X, Y, Z)$ zu einem solchen vom Systeme $(x, y, z)$ zum Systeme $(X_1, Y_1, Z_1)$, wobei nur sämtliche 9 Koeffizienten in (1) den Faktor $T^2$ angenommen haben. Damit erhalten aber die Größen $A, B, C, D$ den Faktor $T$, wodurch sie in $A_1, B_1, C_1, D_1$ übergehen mögen:

$$(\mathrm{III}_1) \qquad A_1 = AT, \quad B_1 = BT, \quad C_1 = CT, \quad D_1 = DT,$$

und die Identität (IV) verallgemeinert sich zu:

$$(\mathrm{IV}_1) \qquad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2 = T^2.$$

Umgekehrt lassen sich jetzt $A_1, B_1, C_1, D_1$ als vier *unabhängige* Größen beliebig wählen. Dann bestimmt sich $T^2$ aus $(\mathrm{IV}_1)$, und das Vorzeichen von $T$ durch die Regel, daß $T$ mit dem Produkte $A_1 B_1 C_1$ gleichnamig sein soll.

Die Größen $a, b, c, v$ ergeben sich eindeutig aus (II″) und (17). Diese allgemeineren Größen $A_1, B_1, C_1, D_1$ sollen die Komponenten

einer beliebigen oder allgemeinen *Quaternion* heißen, und $T$ deren *Tensor*.

Es erübrigt noch, indem wir zu den $A, B, C, D$ zurückkehren, in Ergänzung zu (III), die explizite Darstellung der $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ durch die $A, B, C, D$.

Die Addition der ersten und vierten Formel (III′) liefert:

$\alpha_1 = 2(A^2+D^2)-1,$ oder auch, wegen (IV): $\alpha_1 = (A^2+D^2)-(B^2+C^2)$.

Damit hat man für die $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$:

$$\text{(III'')}\qquad \begin{cases} \alpha_1 = (A^2+D^2)-(B^2+C^2) = 2(A^2+D^2)-1, \\ \beta_2 = (B^2+D^2)-(C^2+A^2) = 2(B^2+D^2)-1, \\ \gamma_3 = (C^2+D^2)-(A^2+B^2) = 2(C^2+D^2)-1, \end{cases}$$

und die orthogonale Substitution (1) lautet in den $A, B, C, D$:

$$\text{(V)}\qquad \begin{cases} x = X\{(A^2+D^2)-(B^2+C^2)\}+2Y(AB-CD)+2Z(AC+BD) \\ y = 2X(AB+CD)+Y\{(B^2+D^2)-(C^2+A^2)\}+2Z(BC-AD) \\ z = 2X(AC-BD)+2Y(BC+AD)+Z\{(C^2+D^2)-(A^2+B^2)\}. \end{cases}$$

Die Determinationen (8) nehmen jetzt die Gestalt an:

$$\text{(8')}\qquad 2(A^2+1)\geqq B^2+C^2,\quad 2(B^2+1)\geqq C^2+A^2,\quad 2(C^2+1)\geqq A^2+B^2.$$

## § 2.

### Bestimmung des Drehwinkels.

Jeder Raumpunkt $P$ beschreibt vermöge (1) denselben Drehwinkel $\omega$ um die Drehachse $d$. Um $\omega$ zu bestimmen, kann man einen geeigneten Punkt $P$ aussuchen. Nun stellen die Koeffizienten irgend einer der drei Relationen (4) die Koordinaten eines Punktes der in $O$ auf $d$ senkrecht errichteten Ebene dar. Wählt man etwa die erste Gleichung (4), und betrachtet den zugehörigen Punkt als einen Punkt $P(X, Y, Z)$, so ist:

$$\text{(19)}\qquad X = \alpha_1 - 1,\quad Y = \beta_1,\quad Z = \gamma_1.$$

Der Radiusvektor $R$ von $P$ (19) bestimmt sich, mit Rücksicht auf (2) durch:

$$\text{(20)}\qquad R^2 = (\alpha_1-1)^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = 2(1-\alpha_1).$$

Vermöge (1) geht $P(X, Y, Z)$ über in einen Punkt $p(x, y, z)$, wo, wiederum mit Rücksicht auf (2):

$$\text{(21)}\qquad \begin{cases} x = \alpha_1(\alpha_1-1)+\beta_1\cdot\beta_1+\gamma_1\cdot\gamma_1 = 1-\alpha_1 \\ y = \alpha_2(\alpha_1-1)+\beta_2\cdot\beta_1+\gamma_2\cdot\gamma_1 = \quad -\alpha_2 \\ z = \alpha_3(\alpha_1-1)+\beta_3\cdot\beta_1+\gamma_3\cdot\gamma_1 = \quad -\alpha_3. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit $r$ den Radiusvektor von $p(x, y, z)$, — wo die Länge von $r$ gleich der von $R$ —, so ist $\omega$ der Winkel zwischen den Richtungen der beiden Radienvektoren $R$, $r$. Somit kommt:

$$(22) \qquad R^2 \cos\omega = Xx + Yy + Zz,$$

oder, nach (19), (21):

$$(23) \qquad \cos\omega = \frac{(\alpha_1 - 1)^2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\gamma_1}{2(\alpha_1 - 1)},$$

oder auch, mit Benützung von (3):

$$(\mathrm{VI}) \qquad \cos\omega = \frac{\sigma - 1}{2} = \frac{\tau}{2},$$

und hieraus für den halben Winkel $\frac{\omega}{2}$:

$$(\mathrm{VI}') \qquad 2\cos\frac{\omega}{2} = \sqrt{\sigma + 1}, \quad 2\sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{3 - \sigma}.$$

Da $\frac{\omega}{2}$ gerade den Spielraum von zwei Quadranten hat, fällt somit $\frac{\omega}{2}$ mit dem durch (17) eingeführten Hilfswinkel $v$ zusammen, und die Gleichungen (II''), (17) gewinnen die durchsichtigere Gestalt:

$$(\mathrm{VII}) \qquad \begin{cases} A = a\sin\frac{\omega}{2}, \quad B = b\sin\frac{\omega}{2}, \quad C = c\sin\frac{\omega}{2}; \\ D = \cos\frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

Die Komponenten $A, B, C, D$ einer Einheitsquaternion sind daher direkt durch die *„Drehelemente"* der Substitution (1), d. h. durch die Richtungskosinus der Drehachse und den halben Drehwinkel ausgedrückt, und lassen sich umgekehrt durch (VII) definieren.

Den Sinn des Drehwinkels $\omega$ kann man etwa dadurch festlegen, daß man die drei positiven Achsen des Systems $(x, y, z)$ auf die in $O$ auf $d$ senkrecht stehende Ebene projiziert, und darauf achtet, daß diese Projektionen in zyklischem Sinne überstrichen werden.

## § 3.

## Zusammensetzung zweier orthogonaler Substitutionen und der zugehörigen Quaternionen.

Man gehe vermöge einer ersten Substitution von der Natur (1) über von einem Systeme $(x, y, z)$ zu einem Systeme $(X, Y, Z)$, sodann von dem letzteren mittels einer zweiten Substitution (1), mit akzentuierten Koeffizienten, zu einem dritten Systeme $(X', Y', Z')$. Vollzieht man den Übergang vom ersten Systeme $(x, y, z)$ zum dritten Systeme $(X', Y', Z')$

direkt, und versieht die bezüglichen Koeffizienten mit zwei Akzenten, so hat man unmittelbar:

$$(25)\begin{cases}\alpha_1''=\alpha_1\alpha_1'+\beta_1\alpha_2'+\gamma_1\alpha_3', \quad \alpha_2''=\alpha_2\alpha_1'+\beta_2\alpha_2'+\gamma_2\alpha_3', \quad \alpha_3''=\alpha_3\alpha_1'+\beta_3\alpha_2'+\gamma_3\alpha_3' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

Man nennt den geschilderten Prozeß die „*Zusammensetzung*" oder „*Multiplikation*" zweier orthogonaler Substitutionen, und (25) die *Zusammensetzungs-* oder *Multiplikations*-Formeln für die Koeffizienten.

Es handelt sich darum, die Zusammensetzungs-Formeln (25) auf die entsprechenden neuen Parameter $A, B, C, D$; $A', B', C', D'$; $A'', B'', C'', D''$ zu übertragen.

Dazu bedarf es nur der Diagonalformeln in (25), und es genügt, die Umwandlung etwa der ersten zu verfolgen. Auf Grund von (III), (III'), (IV) geht die erste Formel (25) zuvörderst über in:

$$(26)\qquad \begin{aligned} A''^2+D''^2 &= (A^2+D^2)(A'^2+D'^2)+(B^2+C^2)(B'^2+C'^2) \\ &+2(AB-CD)(A'B'+C'D')+2(AC+BD)(A'C'-B'D'). \end{aligned}$$

Bildet man rechts einmal das Aggregat der Quadrate, andererseits das der doppelten Produkte, und bedient sich der Abkürzungen:

$$(27)\qquad \begin{cases} A''=(AD'+DA')+(BC'-CB') \\ B''=(BD'+DB')+(CA'-AC') \\ \Gamma''=(CD'+DC')+(AB'-A'B) \\ \Delta''=DD'-AA'-BB'-CC', \end{cases}$$

so vereinfacht sich (26), nebst den beiden analogen Ausdrücken für $B''^2+D''^2$, $C''^2+D''^2$ zu:

$$(28)\qquad \begin{cases} A''^2+D''^2=A''^2+\Delta''^2 \\ B''^2+D''^2=B''^2+\Delta''^2 \\ C''^2+D''^2=\Gamma''^2+\Delta''^2. \end{cases}$$

Versteht man unter $M$ den Wert der drei, gemäß (28) übereinstimmenden Differenzen:

$$(29)\qquad M=A''^2-A''^2=B''^2-B''^2=C''^2-\Gamma''^2,$$

so liefert die Addition:

$$(30)\qquad A''^2+B''^2+C''^2=A''^2+B''^2+\Gamma''^2+3M.$$

Andererseits ergibt sich für $M$ aus (28) zugleich:

$$(31)\qquad \Delta''^2-M=D''^2.$$

Durch Addition von (29) und (31) gelangt man, wegen (IV), zu:

(32) $$1 = A''^2 + B''^2 + \Gamma''^2 + \Delta''^2 + 2M.$$

Aber man kann sich leicht überzeugen, daß:

(33) $$1 = A''^2 + B''^2 + \Gamma''^2 + \Delta''^2.$$

Denn durch Zusammenfassung der Quadrate bei Anwendung von (27) geht, da sich die doppelten Produkte sämtlich zerstören, die rechte Seite von (33) über in das gemäß (IV) der Einheit gleiche Produkt der beiden Summen $A^2 + B^2 + C^2 + D^2$, $A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2$.

Die Vergleichung von (32) und (33) lehrt, daß $M = 0$, und die Relationen (29), (31) reduzieren sich so auf:

(34) $$A'' = \pm A'', \quad B'' = \pm B'', \quad C'' = \pm \Gamma'', \quad D'' + \pm \Delta'',$$

und es gilt zugleich, auf Grund von (33) die Identität:

(IV') $$A''^2 + B''^2 + C''^2 + D''^2 \equiv (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2) = 1.$$

In (34) sind noch die richtigen Vorzeichen zu ermitteln. Zu dem Behuf spezialisiere man die erste Substitution $(A, B, C, D)$ zur Identität, so daß $\omega = 0$, während $a, b, c$ willkürlich bleiben. Dann verschwinden gemäß (VII) $A, B, C$, während $D$ gleich 1 wird. Da aber jetzt zugleich die $A'', B'', C'', D''$ mit den $A', B', C', D'$ übereinstimmen müssen, so erweisen sich die positiven Vorzeichen auf den rechten Seiten von (34) als die richtigen. Die Einsetzung der Werte $A'', B'', \Gamma'', \Delta''$ aus (27) in (34) liefert daher als Ausdruck für die Multiplikation zweier orthogonaler Substitutionen in den „Quaternionenparametern“:

(VIII) $$\begin{cases} A'' = \quad AD' + BC' - CB' + DA' \\ B'' = - AC' + BD' + CA' + DB' \\ C'' = \quad AB' - BA' + CD' + DC' \\ D'' = - AA' - BB' - CC' + DD'. \end{cases}$$

Diese Multiplikationsformeln für die Komponenten von Einheitsquaternionen bleiben *ungeändert*, wenn man zu *beliebigen Quaternionen* übergeht, also gemäß ($III_1$) den sämtlichen Größen in (VIII) den Index 1 anhängt.

Man füge nur noch hinzu, wie unmittelbar aus der ursprünglichen Bedeutung des Tensors hervorgeht (oder auch aus (IV')), daß die bezüglichen Tensoren $T, T', T''$ dem gewöhnlichen Multiplikationsgesetz unterliegen:

(IX) $$T'' = TT'.$$

Trotz ihrer Durchsichtigkeit haben die Formeln (VIII) doch den Mangel, daß ihre rechten Seiten aus nicht weniger als vier Gliedern bestehen.

Man wird daher nach einem einfacheren Algorithmus für den Inhalt von (VIII) suchen.

Dazu bieten sich in erster Linie zwei Wege dar, die durch die Namen W. R. Hamilton und F. Klein gekennzeichnet sind.

Hamilton hat es für zweckmäßig erachtet, das System der gewöhnlichen komplexen Zahlen von der Form $a + bi$ (mit den beiden Einheiten 1, $i$) auf Zahlen mit vier Einheiten 1, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ zu erweitern. Er definiert demgemäß eine *Quaternion* durch einen Ausdruck von der Form:

$$\text{(X)} \qquad Q = \mathfrak{i}A_1 + \mathfrak{j}B_1 + \mathfrak{k}C_1 + D_1,$$

wo die $A_1, B_1, C_1, D_1$, die „Komponenten" von $Q$, beliebige reelle Größen sind.

Bei der Gleichheit, sowie beim Addieren und Subtrahieren von Quaternionen spielen diese neuen Einheiten die Rolle von nicht weiter aufeinander zurückführbaren Faktoren, d. h. die Gleichungen $Q = Q'$, $Q'' = Q \pm Q'$ sind resp. äquivalent mit den vier Gleichungen $A_1 = A_1'$, $B_1 = B_1'$, $C_1 = C_1'$, $D_1 = D_1'$; $A_1'' = A_1 \pm A_1'$, $B_1'' = B_1 \pm B_1'$, $C_1'' = C_1 \pm C_1'$, $D_1'' = D_1 \pm D_1'$.

Für die *Multiplikation* zweier Quaternionen $Q, Q'$ gibt Hamilton die Vorschrift: „Man multipliziere die $Q, Q'$ nach der gewöhnlichen arithmetischen Regel, und unterwerfe sodann die Einheitsprodukte den Gesetzen:

$$\text{(XI)} \qquad \begin{cases} 1 \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{i} \cdot 1, \quad 1 \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{j} \cdot 1, \quad 1 \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{k} \cdot 1, \\ \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k} = -1, \\ \mathfrak{i}\mathfrak{j} = -\mathfrak{j}\mathfrak{i} = \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{j}\mathfrak{k} = -\mathfrak{k}\mathfrak{j} = \mathfrak{i}, \quad \mathfrak{k}\mathfrak{i} = -\mathfrak{i}\mathfrak{k} = \mathfrak{j}". \end{cases}$$

„Dann aber hängen die Komponenten $A_1''$, $B_1''$, $C_1''$, $D_1''$ des Produktes $Q''$ der beiden Quaternionen $Q$, $Q'$ mit den Komponenten $A_1, B_1, C_1, D_1$; $A_1', B_1', C_1', D_1'$ genau durch die Formeln (VIII) zusammen; umgekehrt, soll das Produkt $Q'' = QQ'$ durch das Gesetz (VIII) bestimmt sein, so ist das nur so möglich, daß die Einheitsprodukte den Regeln (XI) folgen."

Damit erhält die Bezeichnung „Multiplikationstheorem" für die Formeln (VIII) eine erweiterte Bedeutung.

Führt man jetzt umgekehrt statt der Komponenten $A_1, B_1, C_1, D_1$ einer Quaternion $Q$ die Richtungskosinus $a, b, c$ einer Geraden, einen Winkel $\frac{\omega}{2}$, und einen Tensor $T$ durch die Festsetzungen ein:

$$(\mathrm{IV}_1) \qquad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2 = T^2,$$

$$(\mathrm{VII}_1) \qquad A = Ta \sin\frac{\omega}{2}, \quad B = Tb \sin\frac{\omega}{2}, \quad C = Tc \sin\frac{\omega}{2},$$

$$D = Td \cos\frac{\omega}{2},$$

wo noch das Vorzeichen von $T$ mit dem des Produktes $A_1, B_1, C_1$ übereinstimmen soll, so erscheinen die Komponenten $A_1, B_1, C_1, D_1$ einer Quaternion $Q$ als die Parameter der aus einer Drehung und Streckung zusammengesetzten Bewegung. Klein-Sommerfeld, die diesen Umstand betonen, bezeichnen daher eine Quaternion als eine „*Drehstreckung.*“

Die gewöhnlichen „*Vektoren*“ $\mathfrak{i}A_1 + \mathfrak{j}B_1 + \mathfrak{k}C_1$ ordnen sich den Quaternionen direkt unter. Denn sie sind charakterisiert durch das Verschwinden der Komponente $D_1$, oder, was nach (VII) dasselbe ist, durch die Bedingung $\omega = \pi$, der eine „*Wendung*“ („Umklappung“) um die Drehachse entspricht.

In diesem Sinne bezeichnen Klein-Sommerfeld einen Vektor als Ausdruck einer „*Wendestreckung*“, d. i. der aus einer Wendung und einer Streckung zusammengesetzten Bewegung.

Über die zweite, von Klein herrührende Art, die Gleichungen (VIII) auf einen einfacheren Algorithmus zurückzuführen, soll § 4 Aufschluß bringen.

## § 4.

### Die Kleinschen Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

In dem Werke von Klein-Sommerfeld wird von vornherein der Zweck verfolgt, das Rechnen mit den Hamiltonschen Einheiten 1, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ auf ein solches mit den Einheiten 1, $i$ der gewöhnlichen komplexen Zahlen zurückzuführen. Da es sich in (VIII) um je vier Größen $A$, $B$, $C$, $D$ usw. handelt, wird man diese irgendwie in *zwei Paare* trennen, und aus jedem Paare eine komplexe Zahl nebst ihrer konjugierten bilden. Man setze etwa mit Klein:

$$(\mathrm{XII}) \qquad \begin{cases} \alpha = D + iC, & \beta = -B + iA, \\ \delta = D - iC, & \gamma = \phantom{-}B + iA, \end{cases}$$

so daß $\alpha$ und $\delta$ einerseits, $\beta$ und $-\gamma$ andererseits konjugiert komplex ausfallen. Die Auflösung von (XII) lautet dann:

$$(\mathrm{XII}') \qquad \begin{cases} D = \frac{\alpha + \delta}{2}, & A = \frac{\gamma + \beta}{2i}, \\ C = \frac{\alpha - \delta}{2i}, & B = \frac{\gamma - \beta}{2}. \end{cases}$$

Führt man die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ statt der $A, B, C, D$ als neue Parameter ein, so geht zunächst die Identität (IV) $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$ über in die einfachere:

$$\text{(XIII)} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Auf Grund von (XII) oder (XII′) rechnen sich die Multiplikationsformeln (VIII) ohne weiteres um in die folgenden:

$$\text{(XIV)} \qquad \begin{cases} \alpha'' = \alpha\alpha' + \beta\gamma', & \beta'' = \alpha\beta' + \beta\delta', \\ \gamma'' = \gamma\alpha' + \delta\gamma', & \delta'' = \gamma\beta' + \delta\delta', \end{cases}$$

wo die rechten Seiten nur noch zweigliedrige, in den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ bilineare Verbindungen sind.

Weiter aber sind die Formeln (XIV) der wohlbekannte Ausdruck für die Zusammensetzung zweier linearer Substitutionen in je zwei homogenen Variabeln.

Seien $(\lambda_1, \lambda_2)$, $(\lambda_1', \lambda_2')$, $(\lambda_1'', \lambda_2'')$ drei solche Variabelnpaare und man setzt die beiden Substitutionen:

$$\text{(XV)} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha\lambda_1' + \beta\lambda_2', & \lambda_1' = \alpha'\lambda_1'' + \beta'\lambda_2'', \\ \lambda_2 = \gamma\lambda_1' + \delta\lambda_2', & \lambda_2' = \gamma'\lambda_1'' + \delta'\lambda_2'', \end{cases}$$

wo $\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha'\delta' - \beta\gamma' = 1$, zusammen zu dem „Produkt“:

$$\text{(XVI)} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha''\lambda_1'' + \beta''\lambda_2'', \\ \lambda_2 = \gamma''\lambda_1'' + \delta''\lambda_2'', \end{cases}$$

so hängen die $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ mit den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ gerade durch die Relationen (XIV) zusammen, und da

$$\text{(XVII)} \qquad \alpha''\delta'' - \beta''\gamma'' = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma'),$$

so ist auch $\alpha''\delta'' - \beta''\gamma'' = 1$. Die Formel (XVII) ist äquivalent mit der früheren (IV′) für die $A, B, C, D$:

$$\text{(IV′)} \quad A''^2 + B''^2 + C''^2 + D''^2 = (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2).$$

Man wird daher erwarten, daß die erste Substitution (XV) nur eine andere Schreibweise für die ursprüngliche orthogonale Substitution (1) resp. (V) ist.

Zu dem Behuf wird man vor allem die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auch in den Formeln (V) an die Stelle der $A, B, C, D$ treten lassen, und konsequenterweise auch zwischen den Variabeln geeignete komplexe Verbindungen herstellen. Man setze, wiederum mit Klein:

$$\text{(XVIII)} \qquad \begin{cases} \xi = x + iy, & \Xi = X + iY, \\ \eta = -x + iy, & H = -X + iY, \\ \zeta = -z, & Z = -Z. \end{cases}$$

Dann rechnen sich die Formeln (V) mittels (XII) oder (XII') ohne weiteres um in die folgenden:

$$\text{(XIX)}\qquad \begin{cases} \xi = \alpha^2\, \Xi + \beta^2 H + 2\alpha\beta Z, \\ \eta = \gamma^2\, \Xi + \delta^2 H + 2\gamma\delta Z, \\ \zeta = \alpha\gamma\Xi + \beta\delta H + (\alpha\delta + \beta\gamma) Z. \end{cases}$$

Die rechten Seiten von (XIX) sollen in direkte Beziehung zu Formen von dem Charakter (XV) gebracht werden. Vergleicht man zunächst die rechte Seite der ersten Relation (XIX) mit der elementaren Multiplikationsformel:

$$(\alpha A + \beta)(\alpha A' + \beta) = \alpha^2 A A' + 2\alpha\beta \cdot \frac{A + A'}{2} + \beta^2,$$

so wird man darauf geführt, die Verhältnisse $\frac{\Xi}{H}, \frac{Z}{H}$ als Produkt und halbe Summe zweier neuer Variabeln $A$, $A'$ zu betrachten, und entsprechend $\frac{\xi}{\eta}, \frac{\zeta}{\eta}$ als Produkt und halbe Summe zweier neuer Variabeln $\lambda$, $\lambda'$:

$$\text{(XX)}\qquad \frac{\xi}{\eta} = \lambda\lambda', \qquad \frac{\zeta}{\eta} = \frac{\lambda + \lambda'}{2}; \qquad \frac{\Xi}{H} = A A', \qquad \frac{Z}{H} = \frac{A + A'}{2}.$$

Damit läßt sich die durch Division der ersten und zweiten Gleichung (XIX) hervorgehende in die Gestalt bringen:

$$\text{(35a)}\qquad \lambda\lambda' = \frac{\alpha A + \beta}{\gamma A + \delta} \cdot \frac{\alpha A' + \beta}{\gamma A' + \delta}.$$

Entsprechend kommt nach Division der dritten Gleichung (XIX) durch die zweite:

$$\text{(35b)}\qquad \lambda + \lambda' = \frac{\alpha A + \beta}{\gamma A + \delta} + \frac{\alpha A' + \beta}{\gamma A' + \delta}.$$

Hieraus geht aber hervor, wenn man eventuell $\lambda$, $\lambda'$ in der Bezeichnung vertauscht, daß:

$$\text{(XXI)}\qquad \lambda = \frac{\alpha A + \beta}{\gamma A + \delta}, \qquad \lambda' = \frac{\alpha A' + \beta'}{\gamma A' + \delta'}.$$

Somit ist die orthogonale Substitution (1) resp. (V) resp. (XIX) auf die wesentlich einfacheren Substitutionen (XXI) reduziert, wo die $\lambda$, $\lambda'$, resp. $A$, $A'$ mit den $\xi$, $\eta$, $\zeta$, resp. $\Xi$, $H$, $Z$ durch die Festsetzungen (XX) verknüpft sind.

Der bisher eingeschlagene Weg läßt sich rückwärts verfolgen. Legt man (XXI), (XX) zugrunde, so führt Multiplikation und Addition von (XXI) zu (35a), (35b).

Von hier aus gelangt man noch nicht sofort zu (XIX), sondern es sind die linken Seiten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ den rechten Seiten vorerst nur bis

auf einen Proportionalitätsfaktor, etwa $\varrho$, gleich. Vermöge (XVIII) gilt dann das Nämliche von den linken und rechten Seiten von (V) und (1). Da aber die Determinante der Koeffizienten in (V) resp. (1) gleich $+1$ sein soll, bestimmt sich auch $\varrho$ als $+1$.

Die Darstellungen (XXI) sollen nunmehr homogen gemacht werden. Man setze zu dem Zwecke:

$$(36) \qquad \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \qquad \Lambda = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}; \qquad \lambda' = \frac{\lambda_1'}{\lambda_2'}, \qquad \Lambda' = \frac{\Lambda_1'}{\Lambda_2'},$$

dann geht (XXI) über in:

$$(\text{XXI}') \qquad \left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2, & \lambda_1' &= \alpha\Lambda_1' + \beta\Lambda_2', \\ \lambda_2 &= \gamma\Lambda_1 + \delta\Lambda_2, & \lambda_2' &= \gamma\Lambda_1' + \delta\Lambda_2' \end{aligned}\right\}.$$

Hier ließen sich freilich zunächst noch die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit ihren entgegengesetzten Werten vertauschen. Denn zunächst ergibt sich nur, unter $\sigma$ einen Proportionalitätsfaktor verstanden, $\lambda_1 = \sigma(\alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2)$, $\lambda_2 = \sigma(\gamma\Lambda_1 + \delta\Lambda_2)$, und da die Determinante der Substitutionskoeffizienten den Wert 1 haben soll, $\sigma = \pm 1$. Aber die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ können nicht zugleich ihr Vorzeichen ändern. Denn die früher getroffene Festsetzung, daß das Produkt $ABC$ positiv ausfalle, überträgt sich vermöge (XII′) auf die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in der Weise, daß die beiden Größen $\beta^2 - \gamma^2$ und $i(\delta - \alpha)$, die ja reell sind, gleichnamig sein müssen; ein simultaner Zeichenwechsel der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist also unzulässig.

Schließlich sollen noch die vermöge (XX) in symmetrischen Verbindungen eingeführten Größen $\lambda, \lambda'$ resp. $\Lambda, \Lambda'$ *einzeln* durch die $\xi, \eta, \zeta$ resp. $\Xi, H, Z$ ausgedrückt werden. Als Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(37) \qquad \eta\lambda^2 - 2\lambda\zeta + \xi = 0$$

berechnen sich $\lambda, \lambda'$ zu:

$$(38) \qquad \left\{\begin{matrix}\lambda \\ \lambda'\end{matrix}\right. = \frac{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \xi\eta}}{\eta}.$$

Versteht man unter $r$ den Radiusvektor des Punktes $(x, y, z)$, so wird, mit Rücksicht auf (XVIII):

$$(39) \qquad \left\{\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = -\xi\eta + \zeta^2, \\ & \xi\eta = (\zeta - r)(\zeta + r), \end{aligned}\right.$$

wodurch (38) übergeht in:

$$(40) \qquad \lambda = \frac{\xi}{\zeta + r}, \qquad \lambda' = \frac{\xi}{\zeta - r},$$

und entsprechend:

$$(40') \qquad \Lambda = \frac{\Xi}{Z + r}, \qquad \Lambda' = \frac{\Xi}{Z - r}.$$

Daß in (XXI) diese Werte $\lambda$ und $\Lambda$, $\lambda'$ und $\Lambda'$ einander zuzuordnen sind, ersieht man sofort aus irgend einem besonderen Falle, z. B. der Identität. Diese trat früher (§ 3) ein für $A = B = C = 0$, $D = 1$, also jetzt, wegen (XII), für $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$. Dann aber wird $\lambda = \Lambda$, $\lambda' = \Lambda'$.

Sucht man nunmehr die zu $\lambda = \frac{\xi}{\zeta + r}$ konjugierte Größe, so ist diese wegen (39) sukzessive gleich:

$$\frac{x - iy}{\zeta + r} = -\frac{\eta}{\zeta + r} = -\frac{\xi\eta}{\xi(\zeta + r)} = -\frac{(\zeta - r)(\zeta + r)}{\xi(\zeta + r)} = -\frac{\zeta - r}{\xi} = -\frac{1}{\lambda'}.$$

„*Somit sind* $\lambda$ *und* $-\frac{1}{\lambda'}$, $\Lambda$ *und* $-\frac{1}{\Lambda'}$ *je zueinander konjugiert.*“ Ersetzt man daher auf beiden Seiten der *ersten* Formel (XXI) jede der auftretenden Größen durch ihre Konjugierte, so kommt, da $\alpha$ und $\delta$, $\beta$ und $-\gamma$ je zueinander konjugiert waren:

$$(41) \qquad -\frac{1}{\lambda'} = \frac{-\delta \cdot \frac{1}{\Lambda'} - \gamma}{+\beta \frac{1}{\Lambda'} + \alpha} = -\frac{\gamma \Lambda' + \delta}{\alpha \Lambda' + \beta},$$

d. i. aber gerade die *zweite* Formel (XXI):

$$\lambda' = \frac{\alpha \Lambda' + \beta}{\gamma \Lambda' + \delta}.$$

Damit ist der Kleinsche Satz bewiesen, daß von den beiden Substitutionen (XXI) bereits irgend eine völlig ausreicht, um die orthogonale Substitution (1) eindeutig darzustellen.“

Das Entsprechende gilt wieder von den homogenen Substitutionen (XXI').

Dadurch werden die Zusammensetzungsformeln (XIV), damit aber auch in der Gestalt (VIII), fast selbstverständlich.

Es mag nicht überflüssig erscheinen, von der Darstellung (XXI) direkt zur Darstellung (XIX) zurückzugelangen. Man bezeichne für den Augenblick die zu einer Größe konjugierte Größe durch einen darüber gesetzten horizontalen Strich. Dann hat man folgende Umformungen zu vollziehen. Es wird gemäß (40), (40'), (XXI):

$$\lambda = \frac{\xi}{\zeta + r} = \frac{\alpha \Lambda + \beta}{\gamma \Lambda + \delta} = \frac{(\alpha \Lambda + \beta)(\bar{\gamma}\bar{\Lambda} + \bar{\delta})}{(\gamma \Lambda + \delta)(\bar{\gamma}\bar{\Lambda} + \bar{\delta})}.$$

Hier ist aber $\bar{\Lambda} = \frac{-H}{Z+r}$, $\bar{\gamma} = -\beta$, $\bar{\delta} = \alpha$, somit:

$$\lambda = \frac{\xi}{\zeta + r} = \frac{\{\alpha\Xi + \beta(Z+r)\}\,\{\beta H + \alpha(Z+r)\}}{\{\gamma\Xi + \delta(Z+r)\}\,\{\beta H + \alpha(Z+r)\}}$$
$$= \frac{\alpha\beta\Xi H + \alpha^2\Xi(Z+r) + \beta^2 H(Z+r) + \alpha\beta(Z+r)^2}{\beta\gamma\Xi H + \alpha\gamma\Xi(Z+r) + \beta\delta H(Z+r) + \alpha\delta(Z+r)^2}.$$

Da aber gemäß (39) $\Xi H = (Z+r)(Z-r)$, so hebt sich aus Zähler und Nenner der rechten Seite von $\lambda$ der Faktor $Z + r$ heraus, und es verbleibt:

$$\frac{\xi}{\zeta + r} = \frac{\alpha^2\Xi + \beta^2 H + \alpha\beta(Z - r + Z + r)}{\alpha\gamma\Xi + \beta\delta H + \beta\gamma(Z-r) + \alpha\delta(Z+r)},$$

oder wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$:

$$(42) \qquad \frac{\xi}{\zeta + r} = \frac{\alpha^2\Xi + \beta^2 H + 2\alpha\beta Z}{\alpha\gamma\Xi + \beta\delta H + (\alpha\delta + \beta\gamma)Z + r}.$$

Führt man einen Proportionalitätsfaktor $K$ ein, so zerlegt sich (42) in die beiden Gleichungen:

$$(43) \qquad \begin{aligned} \xi &= K\{\alpha^2\Xi + \beta^2 H + 2\alpha\beta Z\}, \\ \zeta &= K\{\alpha\gamma\Xi + \beta\delta H + (\alpha\delta + \beta\gamma)Z\} + r(K-1). \end{aligned}$$

Da aber $\zeta$ in $\Xi$, $H$, $Z$ homogen sein muß, muß das Glied $r(K-1)$ in Wegfall kommen, d. h. $K = 1$ sein; es ergibt sich demnach:

$$(44) \qquad \begin{cases} \xi = \alpha^2\Xi + \beta^2 H + 2\alpha\beta Z, \\ \zeta = \alpha\gamma\Xi + \beta\delta H + (\alpha\delta + \beta\gamma)Z. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stimmen in der Tat mit der ersten und dritten der Gleichungen (XIX) überein, und wenn man in der ersten Gleichung (44) jede daselbst auftretende Größe durch ihre Konjugierte ersetzt, erhält man auch die zweite Gleichung (XIX).

---

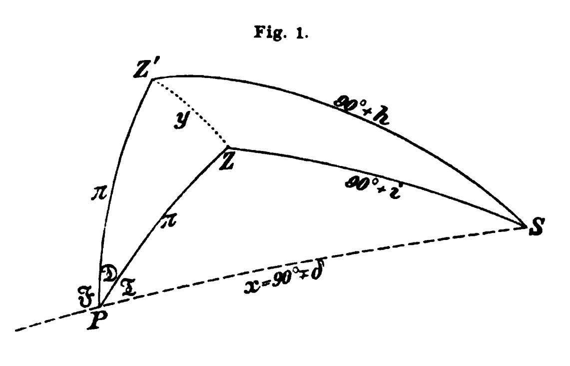
# Gelenkviereck und Dämmerungsdauer.

Von PHILIPP WEINMEISTER in Tharandt.

Man trifft es in der Mathematik nicht selten, daß man zu Ergebnissen, die man erst durch langwierige Rechnungen erhalten hat, weit einfacher durch geometrische Betrachtungen gelangt. Daß dies auch in einem Wissenszweig der Fall ist, in dem mit Vorliebe gerechnet wird, der mathematischen Erdkunde, soll im Folgenden an zwei Beispielen gezeigt werden. Ich wähle als *erstes die Bestimmung*

*des Tages kürzester Dämmerung eines gegebenen Beobachtungsortes.* Diese Aufgabe galt früher als ganz besonders schwierig, und man stößt in der Tat bei der Lösung ohne Kunstgriff auf sehr verwickelte Rechnungen. Diese werden noch weitläufiger, wenn man die Strahlenbrechung berücksichtigt. Wir verstehen dann unter Dämmerungsdauer die Zeit, die der Sonnenmittelpunkt braucht, um von einer Tiefe von $i = 35'$ unter dem Horizont bis zur Tiefe $h$ zu sinken, und zwar ist $h = 18^0$ bei astronomischer und $6^0$ bei bürgerlicher Dämmerung. Weiter sei $\pi = 90^0 - \varphi$ der Polabstand des Ortes und $\delta$ die Sonnendeklination, die wir als während der Dämmerungszeit unveränderlich annehmen. Die größte Änderung von $\delta$ während der Dämmerung beträgt in Deutschland noch nicht $2'$. Ferner sei $P$ der Himmelspol und $Z$ das Zenith des Ortes. Dann ist bei Beginn der Dämmerung in dem sogenannten nautischen Dreieck $ZPS$ (Fig. 1) die Seite $ZP = \pi$, $ZS = 90^0 + i$ und $PS = 90^0 \mp \delta$ für das Sommer- bezw. Winterhalbjahr. Denken wir uns $S$ unbeweglich und die Erde in Drehung, so wird das Zenith des Ortes am Ende der Dämmerung eine andere Stelle einnehmen, die wir mit $Z'$ bezeichnen. Es ist $Z'P = \pi$, $Z'S = 90^0 + h$. Mithin hat das Viereck $Z'PZS$ Seiten von unveränderlicher Länge, es ändert sich mit der Zeit seine eine Diagonale $PS = 90^0 \mp \delta$. Wir bezeichnen weiter die halbe Tagesdauer d. i. die Zeit vom wahren Mittag bis Sonnenuntergang mit $\mathfrak{T}$, die Dämmerungsdauer mit $\mathfrak{D}$ und die halbe Zeit der Finsternis mit $\mathfrak{F}$, und zwar messen wir diese Größen mit Winkeln, sodaß $360^0$ 24 Stunden entsprechen. Dann ist $\sphericalangle ZPS = \mathfrak{T}$, $\sphericalangle Z'PZ = \mathfrak{D}$ und der Nebenwinkel von $Z'PS = \mathfrak{F}$. Das Viereck $Z'PSZ$ kann als ein sphärisches Gelenkviereck angesprochen werden, und es ist die Aufgabe zu lösen, die Länge $PS = 90^0 \mp \delta$ für den Fall zu bestimmen, daß $\mathfrak{D}$ ein Minimum ist.

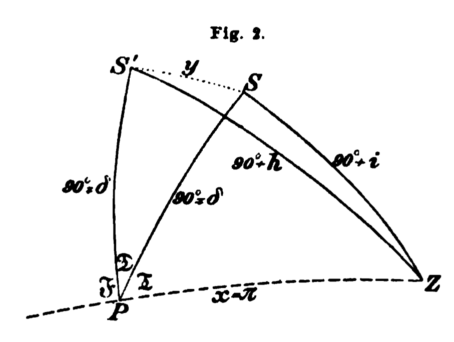
Fig. 1.




Bei der *zweiten Aufgabe* ist ein bestimmter Tag durch $\delta$ gegeben. Wir fragen *nach denjenigen Orten, bei welchen an dem gegebenen Tag die Dämmerung kürzere Zeit dauert, als an den übrigen Orten.* In diesem Fall empfiehlt es sich, die Erde und mit ihr $Z$ als fest anzunehmen, aber $S$ als beweglich, und zwar sei $S'$ der Stand des Sonnenmittelpunktes zu Ende der Dämmerung (Fig. 2). Alsdann ist $S'P = 90^0 \mp \delta$,

$S'Z = 90^0 + h$, $\sphericalangle S'PS = \mathfrak{D}$ und der Nebenwinkel von $S'PZ = \mathfrak{J}$. Wir haben wieder ein sphärisches Gelenkviereck $S'PSZ$. Die Diagonale $PZ$ ist veränderlich, und es ist ihre Länge für den Fall $\mathfrak{D} =$ Min zu bestimmen. Wir nehmen der Einfachheit halber statt des sphärischen Gelenkviereckes ein ebenes, was die Folgerungen nicht beeinträchtigt. Seine Seiten seien der Reihe nach $a$, $b$, $c$, $d$; die veränderlichen Diagonalen $x$ (von $ab$ nach $cd$) und $y$. Dann ist $x_{(Max)} = b + c < a + d$ und $x_{(Min)} = |a - d| < b - c$. Im ersten Fall ist $\sphericalangle bc = 180^0$ und $\sphericalangle ad$ möglichst groß, im zweiten $\sphericalangle ad = 0$ und $\sphericalangle bc$ möglichst klein. In beiden Fällen entartet das Viereck zum Dreieck. Durch Zusammenstellen der Einzelfälle gelangt man zu folgendem Ergebnis.

Fig. 2.




**Entartung des Vierecks zum Dreieck.**

I. Die Summe der größten und kleinsten Seite ist *größer* als der halbe Umfang.

Ein Anwinkel der größten Seite ist Null oder ein Gegenwinkel 180°.

II. Die Summe der größten und kleinsten Seite ist *kleiner* als der halbe Umfang.

Ein Anwinkel der kleinsten Seite ist Null oder 180°.

III. Die Summe der größten und kleinsten Seite ist dem halben Umfang *gleich*, und zwar

a) stoßen die größte und kleinste Seite aneinander. Der von ihnen eingeschlossene Winkel ist Null oder der andere der kleinsten Seite anliegende Winkel ist 180°.

b) liegen die größte und kleinste Seite einander gegenüber. Ein Anwinkel der kleinsten Seite ist 180°.

Im Fall III findet Entartung zur *geraden Linie* statt.

a) Der von der größten und kleinsten Seite eingeschlossene Winkel und sein Gegenwinkel sind 180°, die beiden anderen Null.

b) Hier findet die Entartung aus einem Viereck mit einspringendem Winkel statt. Letzterer wird 360°, die übrigen werden Null.

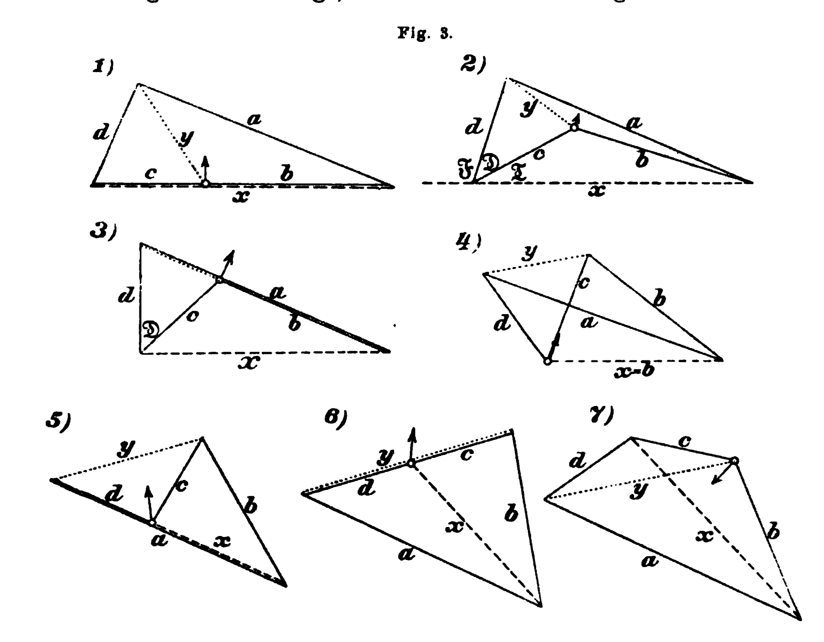
Das Deltoid entartet zweimal zur Geraden und einmal zum Dreieck, das Parallelogramm zweimal zur Geraden.

Das Viereck der ersten Aufgabe gehört zur I. Gruppe, das der zweiten aber nur im Sommerhalbjahr und außerdem im Winterhalbjahr,

solange $\delta < \frac{h+i}{2}$, d. i. $9^0 17\frac{1}{2}'$ bei astronomischer und $3^0 17\frac{1}{2}'$ bei bürgerlicher Dämmerung oder nach Angabe der Ephemeriden für die Zeit vom 25. Febr. bis 18. Okt. bei astronomischer und vom 13. März bis 3. Okt. bei bürgerlicher Dämmerung.

Figur 3, 1 bis 7, gibt die verschiedenen Formen an, welche ein Gelenkviereck der I. Gruppe annehmen kann. Hat man nun ein Gelenkviereck in irgend einer Lage, so kann man es in Figur 3 einreihen und

Fig. 3.




erkennt, ob die Diagonalen in der Zu- oder Abnahme begriffen sind. Die Diagonale $x$ liegt außerhalb der Figur beim Übergang vom Maximum zum Minimum und innerhalb beim Übergang vom Minimum zum Maximum; bei $y$ ist das Gegenteil der Fall.

Hinsichtlich der Anwendung auf *die erste Aufgabe* ist zu setzen:

$$a = 90^0 + h, \quad b = 90^0 + i, \quad c = d = \pi, \quad x = 90^0 \mp \delta.$$

Im Fall 1 ist $\mathfrak{T} = 0$. Das obere Vorzeichen von $\delta$ ist auszuschließen, daher findet der Zeitpunkt $\delta = \pi + i$ im Winterhalbjahr statt, und es gilt für den Ort die Bedingung $0 \leq \pi \leq \varepsilon - i = 22^0 52'$ und für die Zeit $\varepsilon \geq \delta \geq \pi + i > i$. Von nun an werden $x$ und $y$ kleiner, da sie ihrem Minimum zustreben. Es scheint wieder die Sonne, die Tage nehmen zu, die Dämmerung nimmt ab. Im Fall 3 hat die Dämmerung den kleinsten Wert erreicht. Fällt man in dem gleichschenkligen Dreieck $PZZ'$ die Basishöhe, so ist diese eine gemeinsame

Kathete zweier rechtwinkligen Dreiecke und daher ihr $\cos = \cos d$ $: \cos \frac{a-b}{2} = \cos x : \cos \frac{a+b}{2}$ oder es ist $\sin \delta = \cos \pi \cdot \sin \frac{h+i}{2} : \cos \frac{h-i}{2}$. und weiter $\sin \frac{1}{2} \mathfrak{D} = \sin \frac{a-b}{2} : \sin d = \sin \frac{h-i}{2} : \sin \pi.$[1])

Diese Formeln sind nur zulässig für $\pi > \frac{h-i}{2}$. Für $\pi = \frac{h-i}{2}$ ist $\mathfrak{D} = 180^0$ (dauernde Dämmerung), und sie tritt dort am frühesten ein, nämlich für $\delta = \frac{h+i}{2}$ (25. Febr. und 18. Okt. bezw. 13. März und 2. Okt.) Je größer $\pi$, um so kleiner das Dämmerungsminimum und um so früher tritt es ein. Am Äquator ist es am kleinsten und tritt zu Frühlingsanfang ein.

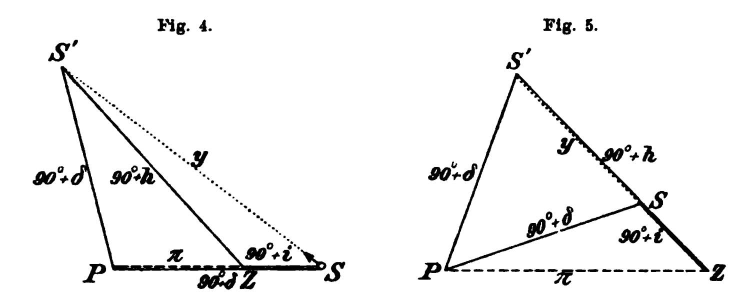
Fall 4 gilt bei Vernachlässigung des kleinen Winkels $i$ für die Tag- und Nachtgleiche. Dämmerung und Tag nimmt zu bis $\mathfrak{F}$ und zugleich das Gelenkviereck verschwunden ist. Alsdann ist $x_{(\text{Min})} = a - d$ oder $\delta = \pi - h$. Es beginnt die Zeit der hellen Nächte, welche sich in der Richtung nach dem Äquator zu erstreckt bis $\pi = \varepsilon + h$.

Es sei hier eine Bemerkung gestattet über *die Dauer der Finsternis.* Diese nimmt ab, wenn die Tage zunehmen, ihr Maximum liegt bei Beginn des Winters. Hiervon machen aber die äquatorealen Gegenden eine Ausnahme, wie eine einfache Diskussion der Kosinusformel zeigt. Diese haben zu Winters Anfang ein Minimum, und es tritt deren Maximum erst später ein. Es nimmt nämlich die Finsternis solange zu, als $\sin \delta > \sin \varphi : \sin h$, was für $\varphi$ die Bedingung ergibt: $\sin \varphi < \sin \varepsilon \cdot \sin h$, für astronomische Dämmerung $\varphi < 7^0 4'$ und für bürgerliche $\varphi < 2^0 23'$. Das Maximum liegt am Äquator in der Äquinoktialzeit, bei den übrigen Orten um so früher, je weiter sie vom Äquator entfernt sind. Für dasselbe gilt $\sin \delta = \sin \varphi : \sin h$ und $\sin \mathfrak{F} = \cos h : \cos \varphi$.

Wir wenden uns nun zur *zweiten Aufgabe,* d. h. zum Gelenkviereck $SZS'P$ mit der veränderlichen Diagonale $PZ = \pi$ und gegebenem $\delta$. (Fig. 2). Wie oben bereits bemerkt, gehört dasselbe für $\delta > \frac{h+i}{2}$, d. h. für die Zeit vom 22. Dez. bis 25. Febr. (13. März) zur II. Gruppe. Wir beginnen mit der Entartung des Gelenkviereckes in dem Zeitpunkt, in dem $S$ im Meridian $PZ$ liegt (Fig. 4). Es ist $\pi = \delta - i =$ Min, und

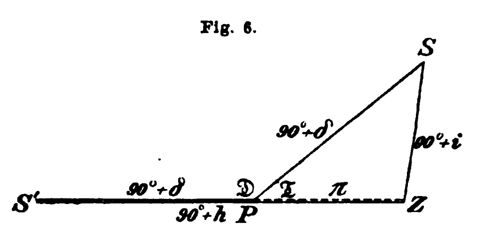
1) Diese Formeln fand zuerst Johann Bernoulli und zwar nach Jahre langem Suchen mit Hilfe einer biquadratischen Gleichung. Durch eine eben solche entwickelten sie d'Alembert und Fuß, ohne solche zuerst der Astronom d'Arrest, dessen Verfahren nebst den obigen Bemerkungen in Wolfs Handbuch der Mathematik II. Teil, S. 177 zu finden ist. Durch elementare Rechnung bewies die Formeln Stoll-Bensheim, Zeitschrift f. Math. u. Ph. 28. Bd. (1883), S. 150.

$\mathfrak{T} = 0$. Wir gehen also von dem Parallelkreis aus, welcher das Gebiet dauernder Nacht abgrenzt. Die Sonne hat Mittags momentan geschienen. Wächst nun $\pi$, so entwickelt sich $PZS$ zum Dreieck, und es nähert sich $\mathfrak{D}$ dem Minimum. Dies tritt ein, wenn $S$ auf $S'Z$ an-




gelangt ist (Fig. 5). Genau wie oben entnehmen wir der Figur die Formeln $\cos \pi = \sin \delta \cdot \sin \frac{h+i}{2} : \cos \frac{h-i}{2}$ und $\sin \frac{1}{2} \mathfrak{D} = \sin \frac{h-i}{2} : \cos \delta$. Von da ab nimmt $\mathfrak{D}$ zu bis zum Äquator. Gerade so wie in der ersten Aufgabe die Zeit kürzester Dämmerung in der Nähe des Äquinoktiums liegt, liegen hier die Orte kürzester Dämmerung in der Nähe des Äquators. Am 22. Dezember ist für dieselben $\varphi = 3^0 44'$ (astr.) und $= 1^0 19'$ (brgl.), und zwar ist im ersten Fall $\mathfrak{D} = 19^0 0' (1^h 16^{min})$ und im andern $\mathfrak{D} = 5^0 54' (28^{min})$. Der Breitenkreis rückt dann nach dem Äquator zu, den er zu Frühlingsanfang erreicht. Hier ist $\mathfrak{D} = h - i = 1^h 10^{min}$ bezw. $22^{min}$. Die Unterschiede sind also ganz gering.

Für $\delta < \frac{h+i}{2}$ entwickelt sich das Gelenkviereck aus dem Dreieck $SPZ$, während $S'$ im Meridian liegt (Fig. 6). Es ist dann $\mathfrak{F} = 0$, d. h. der Parallelkreis grenzt die Gegend heller Nächte ab.




Für $\delta = \frac{h+i}{2}$ gehört das Gelenkviereck zur Gruppe III$^a$. Jenseits des abgrenzenden Parallelkreises liegt die Gegend dauernder Dämmerung. Auf ihm selbst ist Tag und Finsternis momentan.

Der weitere Verlauf wird durch die Unterscheidung von $\delta \gtreqless \frac{h+i}{2}$ nicht beeinflußt.

Hinsichtlich $\mathfrak{F}$ ergibt sich wieder mittels der Kosinusformel aus $\triangle S'PZ$, daß dasselbe nur dann vom Pol nach dem Äquator zu wächst, wenn $\cos \pi > \sin \delta : \sin h$, eine Bedingung, die nur erfüllt werden kann,

wenn $\delta < h$. Also nimmt $\mathfrak{F}$ vom Pol nach dem Äquator hin ab in der Zeit vom 14. Nov. bis 29. Jan. (9. Okt. bis 6. März). Nach dem 29. Jan. (6. März) aber nimmt es vom Pol nach dem Äquator hin zu bis zu einem Parallelkreis größter Finsternis. Derselbe ist bestimmt durch $\cos\pi = \sin\delta : \sin h$ und es gilt für ihn $\sin\mathfrak{F} = \cos h : \cos\delta$. Dieser Parallelkreis nähert sich dem Äquator, während $\mathfrak{F}$ kleiner wird, und trifft zur Zeit $\delta = 0$ bei ihm ein. Im Verlauf des Sommers nimmt $\mathfrak{F}$ vom Pol nach dem Äquator hin stetig zu.

In den Fällen, wo nur $\mathfrak{F}$ oder $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{T}$ vorhanden ist, müssen die Dreiecke, die das Gelenkviereck bilden, beide verschwinden. Ohne hierauf näher einzugehen, will ich nur die resultierenden Bedingungen angeben:

Dauernde Finsternis: $\pi \leqq \delta - h$, also $\delta > h$ und $\pi \leqq \varepsilon - h$ } Im
Dauernde Dämmerung: $h - \pi \geqq \delta \geqq \pi + i$, also $h \geqq \delta \geqq i$ und $\pi \leqq \frac{h-i}{2}$ } Winter
Dauernder Tag: $\pi - \delta \gtreqless i$, also $\pi \gtreqless \varepsilon + i$ und $\delta \geqq \pi - i$. Im Sommer.

Ist nur $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{D}$ vorhanden, so erkennt man die Änderung von $\mathfrak{D}$ aus der von $\mathfrak{F}$, und verfährt dementsprechend, wenn nur $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{D}$ vorhanden ist. Man hat dann statt des Gelenkvierecks ein sphärisches Dreieck und steht vor der Frage, wie sich seine Winkel ändern, wenn eine Seite wächst, während sich die beiden andern Seiten nicht ändern. Der Kürze des Ausdruckes halber wähle ich statt der wachsenden Seite den wachsenden Gegenwinkel. Nimmt man zunächst ein ebenes Dreieck und zieht um den Scheitel des veränderlichen Winkels mit der kleineren Seite den Kreis, so findet man, daß die beiden anderen Winkel abnehmen, wenn sie spitz sind; sind sie aber verschiedener Art, so nimmt nur der stumpfe ab, während der spitze wächst. Wir sagen, daß sich beide Winkel im ersten Fall vom Rechten entfernen, im letzteren sich ihm nähern. Dies gilt auch auf der Kugel, was man zunächst an dem Dreieck erkennt, dessen Seiten kleiner als Quadranten sind, weil dies Dreieck in Übereinstimmung mit dem ebenen wenigstens zwei spitze Winkel hat. Man kann nun durch Verlängerung zweier Seiten das Dreieck zum Zweieck ergänzen und den Satz auf das Ergänzungsdreieck, von dessen Seiten zwei größer als Quadranten sind, übertragen. Er gilt übrigens allgemein und läßt sich wohl auch so beweisen, daß man das Dreieck durch Verdoppelung zum Gelenkviereck (Deltoid) ergänzt. Er lautet:

*Wächst in einem sphärischen Dreieck ein Winkel bei ungeänderter Länge der Schenkelseiten, so nähern sich die beiden anderen Winkel je einem Rechten, wenn sie verschiedenartig sind, und sie entfernen sich von einem Rechten, wenn sie gleichartig sind.*

Ist also der eine Winkel spitz, der andere stumpf, und erreicht z. B. letzterer den Rechten zuerst, so sind die Winkel von da an gleichartig und entfernen sich also vom Rechten, d. h. der vorher stumpfe nimmt weiter ab, der spitze hat in dem Moment, wo der andere ein Rechter wurde, seinen größten Wert erreicht und nimmt nun ebenfalls ab.

Zum Schlusse noch die Bemerkung, daß man natürlich statt der Sonne jeden beliebigen Stern wählen und die Veränderung der Zeit bestimmen kann, die er braucht, um von einer gegebenen Höhe zu einer anderen anzusteigen.

---

# Ein Näherungsverfahren in der Methode der kleinsten Quadrate.

Von Karl Fuchs in Preßburg.

II.[1]

1. In der Methode der kleinsten Quadrate geht man von einer gegebenen Reihe linearer Gleichungen aus, die wir so schreiben:

$$\begin{aligned} a_1 u + b_1 v + \cdots + c_1 &= 0 \\ a_2 u + b_2 v + \cdots + c_2 &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned} \tag{1}$$

Wir nehmen an, in diesen Gleichungen wäre ein Faktor wegdividiert, und sie lauteten ursprünglich so:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + \cdots + c_1 z &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + \cdots + c_2 z &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned} \tag{2}$$

Es gilt nun die *wahrscheinlichsten* Werte der Unbekannten $xy\ldots$ zu berechnen. In der *Normalmethode* der kleinsten Quadrate nimmt man an, nur *eine* der Wertreihen $ab\ldots$, beispielsweise die Wertreihe $c$ hätte wahrscheinliche Fehler, während Fehler der anderen Wertreihen absolut unwahrscheinlich seien, d. h. wir sehen nur die Reihe $c$ für fehlerhaft, die anderen Reihen für fehlerfrei an. Diese bequeme Annahme ist selten berechtigt; in der Regel hat jede Wertreihe eine besondere größere oder kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit; wir bezeichnen die entsprechenden Koeffizienten mit $\alpha\beta\ldots\gamma$. Die wahrscheinlichsten

1) Siehe diese Zeitschrift Bd. 54, Heft 4, S. 487.

Werte $xy \ldots z$ findet man dann, wenn man eine gewisse Funktion zu einem Minimum macht. Diese Funktion von $xy \ldots z$ lautet:

$$(3) \qquad f = \frac{(a_1 x + b_1 y + \cdots + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + \cdots)^2 + \cdots}{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \cdots + \gamma^2 z^2}.$$

Wenn wir hier $\alpha x \; \beta y \ldots$ durch $xy \ldots$ ersetzen, also im Zähler $xy \ldots$ durch $x/\alpha \; y/\beta \ldots$ ersetzen, dann erhalten die Daten $ab \ldots$ neue Werte, und die Funktion zeigt die folgende Form:

$$(4) \qquad f = \frac{(a_1 x + b_1 y + \cdots)^2 + (a_2 x + b_2 y + \cdots)^2 + \cdots}{x^2 + y^2 + \cdots}.$$

Wir ersetzen die Polynome durch Buchstaben:

$$(5) \qquad f = \frac{p_1^2 + p_2^2 + \cdots}{x^2 + y^2 + \cdots} = \frac{p}{r}.$$

2. Wir wollen diese Funktion $f$ *stufenweise* zu einem Minimum machen, indem wir immer nur *eine* der Variablen $xy \ldots$ ändern. Wir beginnen mit $x$.

Wenn wir $x$ um $\xi$ ändern, dann lautet die Funktion (5):

$$(6) \qquad f + \Delta f = \frac{(p_1 + a_1 \xi)^2 + (p_2 + a_2 \xi)^2 + \cdots}{(x + \xi)^2 + y^2 + \cdots + z^2}.$$

Der Zähler erhält dann folgenden Zuwachs:

$$(7) \qquad \Delta p = 2\xi (p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots) + \xi^2 (a_1^2 + a_2^2 + \cdots).$$

Der Nenner aber erhält den Zuwachs:

$$(8) \qquad \Delta r = 2x\xi + \xi^2.$$

Wir schreiben symbolisch:

$$(9) \qquad p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots = p_a \quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots = a$$

also:

$$(10) \qquad \Delta p = 2 p_a \xi + a \xi^2.$$

Für (6) schreiben wir also:

$$(11), (12) \qquad f + \Delta f = \frac{p + 2 p_a \xi + a \xi^2}{r + 2x\xi + \xi^2} \quad f = \frac{p}{r}.$$

Es gilt nun zu erforschen, *wie groß* wir $\xi$ nehmen sollen, um den Wert der Funktion $f$ möglichst herabzudrücken. Zu dem Zwecke lassen wir $\xi$ erst *klein*, dann *endlich*, dann unendlich *groß* sein. Wir stützen uns dabei auf folgende Regel. Wenn in dem Bruche

$$(13) \qquad f + \Delta f = \frac{p + \Delta p}{r + \Delta r}$$

die Zuwachse $\Delta p$ $\Delta r$ sich so verhalten wie $p$ und $r$:

$$(14)\qquad \frac{\Delta p}{\Delta r} = f \quad \text{oder:} \quad \Delta p = f \cdot \Delta r,$$

dann bleibt die Funktion $f$ *ungeändert*, d. h. $\Delta f = 0$. Wenn $\Delta p$ *kleiner* ist als $f \cdot \Delta r$, dann wird $f$ *herabgedrückt*, d. h. $\Delta f$ ist negativ; wenn aber $\Delta p$ *größer* ist als $f \cdot \Delta p$, dann wird $f$ erhöht, d. h. $\Delta f$ ist positiv, was wir *nicht* wollen.

a) Wenn wir $\xi$ sehr *klein* sein lassen, dann lautet (13):

$$(15)\qquad f + \Delta f = \frac{p + 2p_a\xi}{r + 2x\xi}.$$

Das Kriterium (14) lautet also:

$$(16)\qquad \frac{p_a}{x} = f \quad \text{oder:} \quad p_a = fx.$$

Daraus lesen wir folgendes. Wenn $p_a$ *kleiner* ist als $fx$, dann müssen wir ein *positives* kleines $\xi$ nehmen, um $f$ herabzudrücken; wenn aber $p_a$ *größer* ist als $fx$, dann müssen wir ein *negatives* kleines $\xi$ nehmen, um $f$ herabzudrücken.

b) Wenn $\xi$ *endlich* ist, dann hat (13) die volle Form (11), und das Kriterium (14) lautet nach Wegfall eines $\xi$:

$$(16)\qquad \frac{2p_a + a\xi}{2x + \xi} = f.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann bleibt $f$ *unverändert* und $\Delta f = 0$; sie ist erfüllt, wenn $\xi$ folgenden Wert $\xi_0$ hat:

$$(17)\qquad \xi_0 = -2\frac{p_a - fx}{a - f}.$$

Der Zähler hängt mit (16) zusammen. Wenn $p_a > fx$ ist, wenn wir also ein *negatives* (kleines) $\xi$ nehmen sollen, dann ist gerade auf der *negativen* Seite ein Wert $\xi_0$, wo $\xi$ aufhört, die Funktion $f$ herabzudrücken und bei weiterem Wachstum anfangt $f$ zu erhöhen, was wir *nicht* wollen. Das Analoge finden wir auf der anderen Seite: wenn $p_a < fx$ ist, wenn wir also ein *positives* (kleines) $\xi$ nehmen sollen, dann gibt es gerade auf dieser positiven Seite ein $\xi_0$, wo $\xi$ aufhört uns nützlich zu sein, und bei größerem Wachstum uns geradezu schadet. Zwischen $\xi = 0$ und $\xi = \xi_0$ verläuft also offenbar die $f$-Kurve parabolisch, nach unten durchhängend, und wir tun am besten, wenn wir für $\xi$ ungefähr den *halben* Wert $\xi_0$ nehmen:

$$(18)\qquad \xi = -\frac{p_a - fx}{a - f}.$$

Dann wird $f$ so weit herabgedrückt, als es durch Änderung von $x$ *allein* überhaupt möglich ist.

In all diesen Erwägungen haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß in (17) der Nenner $a - f$ *positiv* ist. Wenn er es *nicht* ist, wenn also $a < f$ ist, dann kehrt sich alles um; dann ist die Strecke zwischen $\xi = 0$ und $\xi = \xi_0$ nicht die nützlichste, sondern die *schädliche* Strecke, die wir meiden müssen.

c) Wenn wir $\xi$ unendlich groß nehmen, dann lautet (13) auf grund von (11) so:

$$f + \Delta f = a \quad \text{oder:} \quad \Delta f = a - f. \tag{17}$$

Das stimmt mit dem eben Gesagten überein; wenn $a < f$ ist, dann ist $\Delta f$ negativ, wie wir es wünschen; dann ist es am besten, $\xi$ unendlich groß zu nehmen, also $x = \infty$ zu setzen. Was das bedeutet, das sehen wir aus (4): wenn wir den Bruch mit $x$ kürzen und $x = \infty$ setzen, dann werden alle Variablen $yz \ldots$ gleich Null, und (4) lautet:

$$f = a_1^2 + a_2^2 + \cdots = a.$$

Ein sehr großes $\xi$ heißt also alle Variabeln außer $x$ sehr *klein* machen.

Hiermit haben wir zum Näherungsverfahren den Grund gelegt; das Verfahren soll nun entwickelt werden.

3. Zur Vorbereitung quadrieren wir alle Koeffizienten und bestimmen die folgenden Summen:

$$a = [a^2] \quad b = [b^2] \ldots$$

Darauf setzen wir in (4) für die Unbekannten $xy \ldots$ verschiedene willkürliche Werte als erste Annäherung ein. Zuerst setzen wir alle Variablen gleich Null, bis auf $x$, das wir gleich 1 setzen; dann setzen wir alle gleich Null bis auf $y$, das wir gleich 1 setzen usw., wir finden dann für $f$ folgende Werte:

$$f_1 = a, \quad f_2 = b \ldots, \quad f_3 = c. \tag{18}$$

Wir nehmen nun den *allerkleinsten* dieser Werte, es sei das etwa $a$, und nehmen als erste angenäherte Werte der Unbekannten definitiv die folgenden Werte an:

$$x = 1, \quad y = 0 \ldots z = 0. \tag{19}$$

Da im ganzen weiteren Näherungsverfahren $f$ nur kleiner werden kann, so wird *immer* in (18) der Nenner positiv, d. h. $f$ das kleinere Glied

sein, und wir können *immer* das beste Inkrement nach (18) berechnen. Wir wollen die Formel allgemein schreiben:

$$(20) \qquad \tau = -\frac{p_k - ft}{k - f}.$$

Hier bedeutet $t$ irgend eine Unbekannte, $\tau$ ist ihr *bestes* Inkrement, und $k$ ist der korrespondierende Reihenbuchstabe. Wir können das beste Inkrement $\tau$ wieder mittels einer *Wage* bestimmen, und schreiben dem Gedanken entsprechend (20) in folgender Form:

$$(21) \qquad p_1 k_1 + p_2 k_2 + \cdots + p_3 k_3 - ft + \tau (k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_3^2 - f) = 0.$$

Wir müssen also wie in der Normalmethode auf der Wage den Gewichten $k_1 k_2 \ldots$ die Arme $p_1 p_2 \ldots$ geben; *außerdem* aber müssen wir auf die Wage auch noch ein Moment $-ft$ ausüben, etwa indem wir einem Gewichte 1 den Arm $-ft$ oder einem Gewichte $ft$ den Arm $-1$ geben. Sodann müssen wir die Wage mittels eines Laufgewichtes äquilibrieren; dieses Laufgewicht ist aber nicht mehr $[k^2]$, sondern $[k^2] - f$. Die Arbeit kompliziert sich also in unserem allgemeinen Falle dadurch, daß wir nach jedem Akte auch den neuen Wert $f'$ der Funktion $f$ nach (11) berechnen müssen, welche Formel allgemein so lautet:

$$(22) \qquad f + \Delta f = \frac{p + 2p_k\tau + k\tau^2}{r + 2t\tau + \tau^2}.$$

Da wir als $\tau$ im allgemeinen eine einstellige Zahl wählen, ist diese Arbeit nicht allzu umständlich. Die Formel (22) in der Form:

$$f' = \frac{p'}{r'}$$

dient dann im folgenden Akte als Grundlage zur Berechnung des nächstfolgenden Wertes $f''$. Nur die Zähler $p$ und die Nenner $r$ müssen genau berechnet werden; eine Vernachlässigung in der Division, d. i. ein Fehler in $f$ überträgt sich nicht, da die damit berechneten $\tau$ nur eine *orientierende* Bedeutung haben.

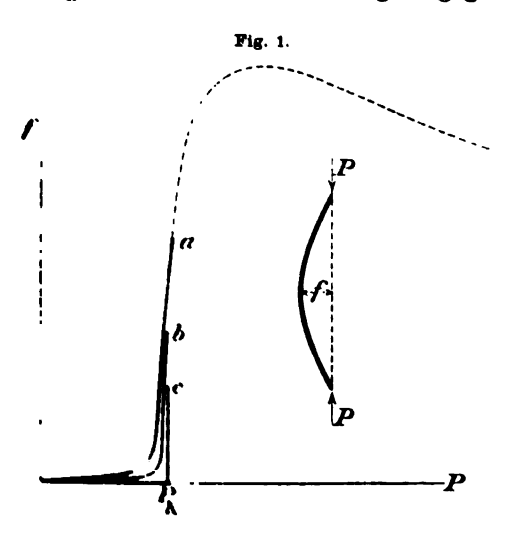
---

# Die genaue Säulenknicklast.

Von Maschineningenieur F. NUSSBAUM in Spalato.

Zur Einleitung mag die Knickerscheinung für die Säule kurz besprochen werden. Wird z. B. eine annähernd gerade gerichtete Stahlfeder nach Fig. 1 gedrückt, und werden die zusammengehörigen Werte $P$ und $f$ in einem Diagramm vereinigt, so ergibt sich etwa die Linie $a$ Fig. 1. Wird die Feder sorgfältig gerade gerichtet, so findet man etwa die Linie $b$ mit beinahe ausgeprägtem Knie, und würde endlich der Versuch mit mathematischer Genauigkeit ausgeführt, so ergäbe sich die Linie $c$ mit scharfem Knie. Bis zu diesem Punkte ist also die Ausbiegung $f = 0$, und beginnt dann plötzlich sehr rasch. Das zugehörige $P$ nennen wir die Knicklast $P_K$.

Fig. 1.




Diese wurde von Euler vor mehr als 150 Jahren mit Vernachlässigung des Schiebungseinflusses berechnet. Seitdem hat man mehrfach vergeblich versucht, diese Schiebungsmöglichkeit genau zu berücksichtigen. Im Folgenden ist nun dies auf einem neuen direkten Wege in einfacher Weise gelungen.

Fig. 2 zeigt die geknickte Säule, zu deren Untersuchung wir als Urvariable die Stablänge, vom unteren Ende gemessen, annehmen. Für das Gleichgewicht eines Säulenstückchens ist:

$$\begin{cases} \Sigma(M) = 0 = M - (M + dM) - Q \cdot dx \\ \Sigma(Q) = 0 = Q - (Q + dQ) + N \cdot d\alpha \\ \Sigma(N) = 0 = N - (N + dN) - Q \cdot d\alpha. \end{cases}$$

[illegible] winkel $d\alpha$ rührt nicht bloß von der Biegung durch [illegible] sondern auch von der veränderlichen Schiebung durch $Q$ [illegible]

$$d\alpha = d\alpha_M + d\alpha_Q.$$

Bei Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung ist

$$(3) \qquad \frac{d\alpha_M}{dx} = \frac{M}{EI},$$

wo $E$ den Elastizitätsmodul und $I$ das Trägheitsmoment des Querschnitts bedeutet. Eine ähnliche Beziehung folgt für $d\alpha_Q$ aus folgender Überlegung: Man denke sich einen Freiträger mit Einzellast am Ende; abgesehen von der Biegung wäre die elastische Linie eine Gerade mit dem Neigungswinkel nach abwärts

$$\alpha_Q = \frac{Q}{G\mathfrak{F}},$$

wo $G$ den Gleitmodul, und $\mathfrak{F}$ bei gleichmäßiger Spannungsverteilung den Querschnitt und sonst die entsprechende aus der Schubtheorie bekannte Querschnittsfunktion bedeutet. Ist bei anderer Trägerbelastung die Querkraft stetig veränderlich, so gilt für den Fortschritt $dx$

$$(4) \qquad d\alpha_Q = \frac{dQ}{G\mathfrak{F}};$$

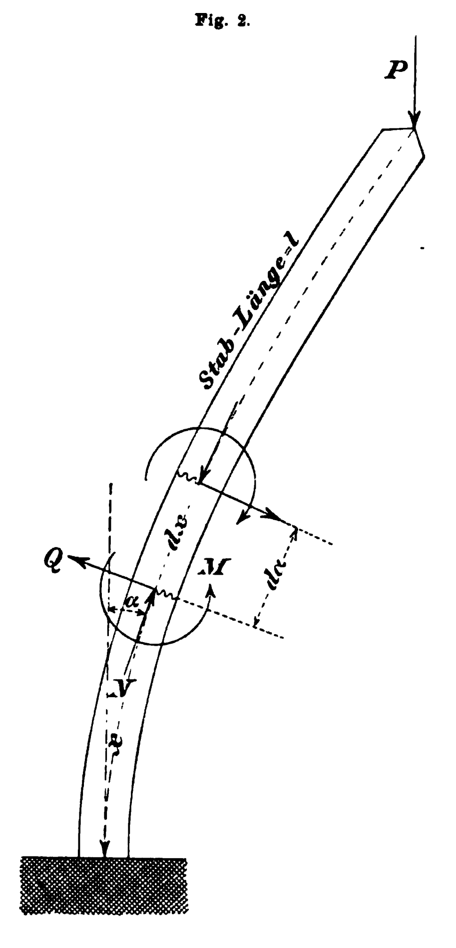
dies ist der gesuchte Ausdruck. Darnach erhalten wir aus (2)

$$(5) \qquad \alpha^{\mathrm{I}} = \frac{M}{EI} + \frac{Q^{\mathrm{I}}}{G\mathfrak{F}}$$

$$\text{oder kurz} = aM + \mathfrak{a}Q^{\mathrm{I}},$$

und damit können die Gleichgewichtsbedingungen (1) geschrieben werden

$$(6) \qquad \begin{cases} M^{\mathrm{I}} = -Q \\ Q^{\mathrm{I}} = \dfrac{aMN}{1-\mathfrak{a}N} \\ N^{\mathrm{I}} = -aMQ - \mathfrak{a}QQ^{\mathrm{I}}. \end{cases}$$




Bei der Integration dieses vollständigen Differentialgleichungssystems erscheinen 3 Konstante, also sind 3 Grenzangaben nötig:

$$(7) \qquad \begin{cases} M_{x=l} = 0, \\ Q_{x=0} = 0, \\ N_{x=0} = P. \end{cases}$$

Für die Rechnung kann $M_{x=0}$ statt $M_{x=l}$ als gegeben angenommen und zum Schluß aus $M_{x=l} = 0$ bestimmt werden. Dann lassen sich mit diesen 3 Angaben aus dem Gleichungssystem (6) und dessen Ableitungen in einfacher Weise für $x = 0$ beliebig hohe Ableitungen der unbekannten Funktionen $M$, $Q$, $N$ ermitteln, und damit die Funktionen selbst nach der Mac-Laurinschen Reihe entwickeln. Man erhält kurz angedeutet

$$M = M_0 + \frac{x}{1!} \cdot 0 + \cdots$$

$$Q = 0 + \frac{x}{1!} \cdot \frac{a M_0 P}{1 - a P} + \cdots$$

$$N = P + \frac{x}{1!} \cdot 0 + \cdots,$$

wo $M_0$ zu bestimmen ist aus

(8) $$M_l = 0 = M_0 + \frac{l}{1!} \cdot 0 + \cdots ^{1)}.$$

Folgende Überlegung bildet nun den Kern dieser Methode: Bei der Bestimmung der Ableitungen zeigt sich, daß die von $M$ durchwegs $M_0$ oder $M_0^2$, $M_0^3 \ldots$ enthalten, wonach also die Bestimmungsgleichung für $M_0$ (8) geschrieben werden kann

(8') $$0 = M_0 \left[1 + \frac{l}{1!} \frac{M_0^{\mathrm{I}}}{M_0} + \cdots\right].$$

Sie besagt: Entweder ist $M_0 = 0$, die Säule knickt nicht aus, sondern bleibt im labilen Gleichgewicht, was ganz richtig aber praktisch bedeutungslos ist. Für das wirkliche Ausknicken muß also

(9) $$0 = 1 + \frac{l}{1!} \frac{M_0^{\mathrm{I}}}{M_0} + \frac{l^2}{2!} \frac{M_0^{\mathrm{II}}}{M_0} + \cdots$$

sein. Diese Gleichung geht sofort in die gesuchte Knickformel über, wenn darin einfach für den Ausknickbeginn $M_0 = 0$ gesetzt wird. Da uns nur dies interessiert, können wir bei der Bestimmung der Ableitungen alle Glieder mit $M_0^2$, $M_0^3 \cdots$ gleich weglassen. Der Rechnungsgang ist im folgenden durch Zahlen bezeichnet.

1) Da sich diese Gleichung nach $M_0$ nicht auflösen läßt, ist für die wirkliche Lösung des Differentialgleichungssystems nichts gewonnen; wohl aber gelingt auf diesem Wege die Auffindung eines einzelnen eigentümlichen Punktes, nämlich des gesuchten Ausknickbeginnes.

| | | |
|---|---|---|
| $M$ | 1 | $M_0$ |
| $M^{\mathrm{I}} = -Q$ | 2 | $0$ |
| $M^{\mathrm{II}} = -Q^{\mathrm{I}} = -\frac{\alpha M N}{1-\alpha N}$ | 4 | $-M_0 \frac{\alpha P_k}{1-\alpha P_k}$ |
| $M^{\mathrm{III}} = -Q^{\mathrm{II}} = \cdots$ | 6 | $0$ |
| $M^{\mathrm{IV}} = -Q^{\mathrm{III}} = -\frac{\alpha M^{\mathrm{II}} N}{1-\alpha N} + \cdots$ | 8 | $+M_0 \left(\frac{\alpha P_k}{1-\alpha P_k}\right)^2$ |
| $M^{\mathrm{V}} = -Q^{\mathrm{IV}} = \cdots$ | 9 | $0$ |
| $M^{\mathrm{VI}} = -Q^{\mathrm{V}} = -\frac{\alpha M^{\mathrm{IV}} N}{1-\alpha N} + \cdots$ | 10 | $-M_0 \left(\frac{\alpha P_k}{1-\alpha P_k}\right)^3$ |
| . . . . . . . . . . . . . . | . | . . . . . . . |
| $N$ | 3 | $P_k$ |
| $N^{\mathrm{I}} = -\alpha M Q - \alpha Q Q^{\mathrm{I}}$ | 5 | $0$ |
| $N^{\mathrm{II}} = \cdots$ | 7 | $0$ und alle weiteren. |

Durch Einführen der Werte rechts in (9) folgt

$$(10)\quad 0 = 1 - \frac{l^2}{2!}\frac{\alpha P_k}{1-\alpha P_k} + \frac{l^4}{4!}\left(\frac{\alpha P_k}{1-\alpha P_k}\right)^2 - \frac{l^6}{6!}\left(\frac{\alpha P_k}{1-\alpha P_k}\right)^3 + \cdots = \cos l\sqrt{\frac{\alpha P_k}{1-\alpha P}}$$

und daraus

$$(11)\qquad l\sqrt{\frac{\alpha P_k}{1-\alpha P_k}} = \pm\frac{\pi}{2},\ \pm 3\frac{\pi}{2},\ \pm 5\frac{\pi}{2}, \cdots$$

Nur der erste Wert $\frac{\pi}{2}$ kommt in Frage, die weiteren bedeuten die möglichen labilen Gleichgewichtsfälle mit mehreren Falten. Daraus ist die gesuchte Knicklast, wenn statt $a$ und $\alpha$ wieder $\frac{1}{EI}$ und $\frac{1}{G\mathfrak{F}}$ geschrieben wird

$$(12)\qquad P_k = \frac{1}{\frac{4}{\pi^2}\frac{l^2}{EI} + \frac{1}{G\mathfrak{F}}},\ \text{oder mit } G = \tfrac{5}{13}E \cdots P_k = \frac{E}{\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{l^2}{I} + \frac{2,6}{\mathfrak{F}}}.$$

Für die freie, einseitig eingespannte geführte, beiderseits eingespannte geführte Säule ist wie bekannt $l$ durch $\frac{l}{2}$, $\sim\frac{l}{2\cdot\sqrt{2}}$, $\frac{l}{4}$ zu ersetzen.[1])

Wäre $G = \infty$, so folgt ganz richtig die Eulersche Formel, welche sich nach dieser Methode einfach ableiten läßt. Deren Fehler nimmt mit der Schlankheit des Stabes ab, indem $\frac{1}{G\mathfrak{F}}$ gegen das wachsende $\frac{4}{\pi^2}\frac{l^2}{EI}$ immermehr verschwindet. Wir wollen nun sehen, wie groß dieser Fehler in einem ungünstigen Falle sein kann. Z. B. eine genietete Säule vom Querschnitte $x$ ][ Pr. Nr. 30 hat $I_x \sim 40\,000$ cm$^4$, $\mathfrak{F}_x \sim 64$ cm$^2$ (etwas

1) Genau genommen bedeutet $l$ die durch den Druck etwas verkürzte Stablänge.

mehr als die Stegquerschnitte); sie trägt bei Spitzenlagerung und 2 m Länge $P_k \sim \frac{E}{0{,}4 + 0{,}04}$ kg, wobei die Druckspannung $\sim 2000$ at noch nicht die „Proportionalitätsgrenze" von Flußeisen erreicht. Euler vernachlässigt das Glied 0,04, der Fehler ist hier $\sim 10\,\%$. Meist aber ist das Verhältnis der Schub- und Biegungssteifheit der Säule nicht so klein (ausgenommen genietete Stäbe mit großen Nietabständen), sodaß der Fehler bei schlankeren Stäben praktisch verschwindet.

Die gefundene Knickformel ist genau richtig bis zur „Proportionalitätsgrenze". Sie darf aber auch für ein beliebiges Dehnungsgesetz und für kurze Stäbe (soweit noch von Knickung die Rede sein kann) als nahezu richtig angesehen werden, sofern man für $E$ und $G$ die der Knickspannung ($= P_k$: Stabquerschnitt) entsprechenden Werte einsetzt. Wie weit mit abnehmender Länge der Einfluß des Gliedes $\frac{1}{G\mathfrak{F}}$ und damit der Fehler der Eulerschen Formel wächst, ist aus unserer Formel nicht zu ersehen, weil $E$ und $G$ zugleich mit $l$ abnehmen.

Zum Schluß sei bemerkt, daß die hier angewendete Methode bedeutend schwierigere Probleme der elastischen Knickung zu lösen gestattet, wie demnächst in einer Abhandlung über das „Ausknicken von Trägern" gezeigt werden soll.

---

# Über die verschiedenen Anordnungen der Additions- und Subtraktions-Logarithmen.

Von Berthold Cohn in Straßburg i. E.

Bekanntlich hatte Gauß, einem Gedanken von Leonelli folgend, die Tafeln der Additions- und Subtraktions-Logarithmen derart eingerichtet, daß die mit

$$A \qquad\qquad B \qquad\qquad C$$

überschriebenen Reihen die Werte

$$\log x \qquad \log(1+x) \qquad \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

enthielten.

Sieht man die zweite Reihe als Argumentenreihe an, so lautet die Zusammenstellung

$$B' \qquad\qquad A' \qquad\qquad C'$$

$$\log x \qquad \log(x-1) \qquad \log\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

und entsprechend für die dritte Reihe als Ausgangsreihe

$$\begin{array}{ccc} C'' & A'' & B'' \\ \log x & \log\left(\frac{1}{x-1}\right) & \log\left(\frac{x}{x-1}\right). \end{array}$$

Versteht man unter $x$ den Quotienten zweier Zahlen $a$ und $b$ $(a > b)$, unter $\log x$ somit ihre logarithmische Differenz, so ergeben sich die folgenden Formeln

$$\log(a+b) = \log b + B, \tag{1}$$
$$= \log a + C, \tag{2}$$
$$\log(a-b) = \log b + A', \tag{3}$$
$$= \log a - C', \tag{4}$$
$$\log(a-b) = \log b - A'', \tag{5}$$
$$= \log a - B''. \tag{6}$$

Die 3-reihige Spaltung findet man heute nur noch selten (z. B. in den 4-stelligen Tafeln von E. R. Müller); sie ist nicht zu empfehen, weil man für die Subtraktion das Argument $B$ oder $C$ selbst erst durch Interpolation findet.

Da $C'$ und $B''$ identische und $A'$ und $A''$ reziproke Größen sind, so ist man bei der Tabulierung mit dem Argument $\log x$ auf die folgenden Größen beschränkt:

für Additionslogarithmen

$$\log(1+x), \tag{1}$$
$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right), \tag{2}$$

und für Subtraktionslogarithmen:

$$\log(x-1), \tag{3}$$
$$\log\left(\frac{x}{x-1}\right). \tag{4}$$

Setzt man in (1) den Funktionswert $= \log x$, so wird die Argumentenreihe den Wert (3) liefern. Unter Zugrundelegung der Formeln (1) und (3) wird man also mit einer einzigen Tafel ausreichen. Dagegen wird man für (1) und (4), sowie (2) und (3), als (2) und (4) getrennter Tafeln bedürfen.

Um die Frage beantworten zu können, welcher von diesen Zusammenstellungen der Vorzug einzuräumen ist, wird man zu untersuchen haben, welche von ihnen die meiste Bequemlichkeit — d. h. die geringsten Tafeldifferenzen — bietet, und welche den größten Grad der Genauigkeit erreichen läßt.

Durch Differentiation wird gefunden

$$(1') \qquad \triangle \log (1 + x) = \frac{x}{1 + x} i,$$

$$(2') \qquad \triangle \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{1 + x} i,$$

$$(3') \qquad \triangle \log (x - 1) = \frac{x}{x - 1} i,$$

$$(4') \qquad \triangle \log \left(\frac{x}{x - 1}\right) = -\frac{1}{x - 1} i,$$

worin $i$ das Intervall des Arguments bedeutet. Da $x > 1$ vorausgesetzt wurde, so folgt aus (2'), daß die Reihe $C$ mit wachsendem Argument zwar abnimmt, die Differenzen aber kleiner sind als für die Reihe $B$.

Von den Subtraktionslogarithmen wird die Reihe $A'$ mit ihren größeren Differenzen unbequemer für den Gebrauch sein als $C'$.

Sei ferner angenommen, der Abkürzungsfehler eines Tafellogarithmus für einen in der Argumentenreihe stehenden Wert sei $w = 0{,}5 \cdot 10^{-r}$ ($r$ = Stellenzahl der Tafel), für einen interpolierten Wert im Maximum $= 2w$, so wird der gesuchte Tafellogarithmus eben um diese Größe falsch sein können, und der Fehler in $\log (a + b)$ und $\log (a - b)$ wird höchstens $2w$ betragen können, wenn $\log a$ und $\log b$ als fehlerfrei vorausgesetzt werden. Ist jeder dieser Werte noch mit dem Fehler $w$ behaftet, so wird deren Einfluß auf das Resultat wiederum für (2) und (4) am geringsten sein. Beachtet man, daß für Tafel (4) Argument und Funktionswert vertauschbare Größen sind, und für $x = 2$ beide gleich werden, so zeigt Formel (4'), daß man die Argumentenreihe am besten mit 0,30 ... beginnen läßt, während für kleinere Werte von $\log x$ in den rechten Teil der Tafel eingegangen wird. Dann ist aber der mögliche Fehler eines Funktionswertes $2w \frac{b}{a - b}$. Sucht man dagegen in Tafel (1) den Wert $\log (x - 1)$, so wird derselbe mit dem größeren Fehler $2w \frac{a}{a - b}$ behaftet sein können.

Aus zwei Gründen ist es also nicht vorteilhaft, Additions- und und Subtraktions-Logarithmen in einer einzigen Tafel vereinigt zu haben, sondern man wird am besten für die Additions-Logarithmen $\log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ tabulieren, für die Subtraktions-Logarithmen $\log \left(\frac{x}{x - 1}\right)$. Diese letztere Einrichtung haben die 4-stelligen Tafeln von Zech, sowie die 5-stelligen von Houel und Becher. Die 7-stelligen Tafeln von Zech haben in dem Teil für Subtraktions-Logarithmen Argument- und Funktionswert vertauscht, erfordern also eine unbequeme Inter-

polation. Sechsstellige Tafeln nach dieser Einrichtung gibt es nicht. Diejenigen von Bremiker liefern für das Argument $\log x = 4{,}0 \cdots - 10$ bis $\log x = 0{,}25$ den Wert $B$ von $0{,}00\ldots$ bis $0{,}44\ldots$, so daß innerhalb dieser Grenzen dieselbe Tafel auch für Subtraktion benutzt werden kann. Für $\log x > 0{,}40$ folgt eine zweite Tafel, die mit dem Argument $\log x$ die Werte $\log \frac{x-1}{x}$ gibt, so daß ist

$$\log(a-b) = \log a + C'.$$

(Vgl. auch die Literaturangaben von Mehmke in der Encyklopädie der mathem. Wiss. I, F. No. 30).

Daß übrigens die direkte Rechnung gegenüber derjenigen mit Anwendung von Additions- und Subtraktions-Logarithmen im Nachteil ist, hat Lüroth („Numerisches Rechnen“ § 44) für den Fall, daß man für beide Operationen dieselbe Tafel benutzt, nachgewiesen; es gilt umsomehr für getrennte Tafeln. Hingegen scheint mir die von ihm angegebene Begründung für die Anwendung einer einzigen Tafel wegen der Ersparnis eines zweiten Teiles mit Rücksicht auf die hier auseinandergesetzten Vorteile von je einer Tafel für Additions- und Subtraktions-Logarithmen nicht stichhaltig.

---

# Polbestimmung für Verzweigungslagen bei der Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene.

(Vortrag gehalten auf der Naturforscherversammlung in Stuttgart.)

Von Reinhold Müller in Darmstadt.

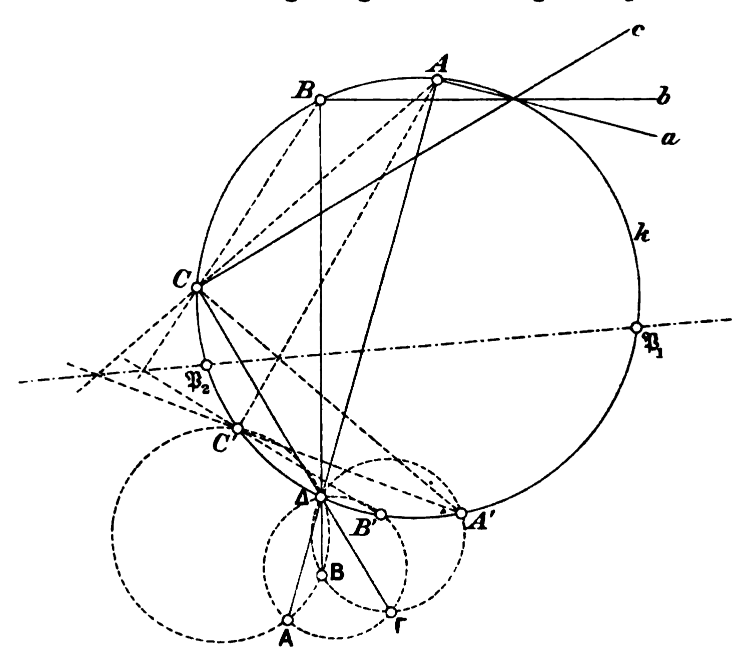
Kennt man in irgend einer Lage eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems die Bahntangenten $a$, $b$, $c$ dreier beliebigen Systempunkte $A$, $B$, $C$, so ist der zugehörige Pol $\mathfrak{P}$ im allgemeinen durch die Bedingung eindeutig bestimmt, daß die von $\mathfrak{P}$ nach $A$, $B$, $C$ gehenden Geraden bezw. mit $a$, $b$, $c$ gleiche Winkel bilden; denn hierdurch ergibt sich $\mathfrak{P}$ als der gemeinsame Schnittpunkt der drei Kreise, die durch je zwei der Systempunkte und den Schnittpunkt ihrer Bahntangenten gehen.[1])

*Diese Konstruktion versagt, wenn sich die drei Tangenten $a$, $b$, $c$ in einem Punkte des durch $A$, $B$, $C$ gehenden Kreises $k$ schneiden.*

1) Vgl. Burmester, Kinematik I S. 867.

Dann genügt nämlich jeder Punkt von $k$ der für den Pol geltenden Bedingung, und um diesen selbst zu bestimmen, müssen außer den bisherigen Daten etwa noch die Krümmungsmittelpunkte A, B, Γ der Bahnstellen gegeben sein, in denen sich bezw. die Punkte $A$, $B$, $C$ augenblicklich befinden. Dabei schneiden sich die Bahnnormalen $A$A, $B$B, $C$Γ in einem Punkte Δ von $k$.

Wie ich bei früherer Gelegenheit gezeigt habe, besteht in jeder Lage eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems zwischen den Systempunkten $A$ ... und den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten A ...




eine ein-zweideutige Verwandtschaft dritten Grades.[1]) In dieser entspricht dem Kreise $k$ — wie im allgemeinen jedem durch den Pol gehenden Kreise — im System der Krümmungsmittelpunkte eine zirkulare Kurve dritter Ordnung, die in Δ einen Doppelpunkt hat und $k$ im Pole berührt. Betrachten wir nun das Büschel von zirkularen Kurven dritter Ordnung, die durch A, B, Γ gehen und Δ zum Doppelpunkt haben, so schneidet jede Kurve des Büschels den Kreis $k$ noch in zwei Punkten einer Involution. Die Doppelpunkte dieser Involution entsprechen den Kurven des Büschels, die $k$ berühren, bestimmen also auf $k$ *zwei* reelle oder konjugiert imaginäre Lagen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ des gesuchten Pols.

1) Über die Krümmungsmittelpunkte der Bahnkurven in ebenen ähnlich-veränderlichen Systemen, diese Zeitschrift 36. Band S. 129.

Das betrachtete Büschel enthält aber drei Kurven, deren jede in eine Gerade und einen Kreis ausartet, so die Gerade $A\Delta$ verbunden mit dem Kreis $\mathsf{B\Gamma\Delta}$ usw. Bezeichnet also $A'$ den zweiten Schnittpunkt dieses Kreises mit $k$, so ist $A$, $A'$ ein Paar der Involution. Schneidet ferner $k$ die Kreise $\mathsf{\Gamma A\Delta}$ und $\mathsf{AB\Delta}$ zum zweiten Mal bezw. in $B'$ und $C'$, so bilden $B$, $B'$ und $C$, $C'$ zwei weitere Punktpaare, und die Achse der durch zwei dieser drei Paare bestimmten Involution schneidet $k$ in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$.

Das ähnlich-veränderliche System kann also im vorliegenden Fall in der Tat zwei verschiedene Momentanbewegungen ausführen, befindet sich daher in einer *Verzweigungslage.*

Liegen die Punkte $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$, $\mathsf{\Gamma}$ gleichfalls auf einem durch $\Delta$ gehenden Kreise, so ist sein zweiter Schnittpunkt mit $k$ der gesuchte Pol, der in diesem Sonderfall, in dem die vorige Involution zu einer parabolischen wird, *eindeutig* bestimmt ist.

---

# Erwiderung auf Herrn Riebesells Abhandlung „Über die Kommutation des Stromes in Gleichstromgeneratoren".

Von Gustav Mie in Greifswald.

Herr Riebesell[1]) widmet der in meiner Arbeit[2]) „Über die Kurzschlußstromkurve eines Gleichstromankers", wie ich wohl sagen darf, ziemlich gründlich erledigten Angelegenheit noch einmal mehr als einen ganzen Druckbogen. Ob wirklich eine so große Menge von Worten für eine Sache von so geringer Wichtigkeit nötig war? Denn diese ist schließlich doch nur, daß Herr Riebesell nun auch eingesehen hat, daß die früher von ihm „widerlegten" Resultate der Arbeit von Arnold und mir vom Jahre 1899 doch durch und durch richtig sind.

Herrn Riebesells viele Worte scheinen mir nur dazu zu dienen, diese klare und einfache Sachlage unklar zu machen. So sagt er von *unserer* Arbeit von 1899, die er nun also durchweg anerkennen muß, trotzdem, „sie sei keineswegs fehlerfrei gewesen". Aber angeben kann er keine Fehler. Er erhebt nur einige ganz kleinliche Einwände, und selbst diese sind unbegründet. Denn einen saloppen Ausdruck, wie den, „eine Potenzreihe werde für $x = 1$ divergent", wo man streng korrekt nur sagen durfte, „der Punkt $x = 1$ liege auf dem Konvergenzkreis der

1) Diese Zeitschrift Bd. 58, S. 337. 2) Desgl. Bd. 58, S. 37.

Reihe", einen Fehler zu nennen, das ist doch offenbar Haarspalterei. Und daß für den Fall: „$r$ eine ganze Zahl" in der Arbeit von 1899 ein Fehler stehen soll, kann Herr Riebesell nur deswegen sagen, weil er diesen Fall selber nicht durchgerechnet hat. Ich vermag wenigstens keinen Fehler zu finden und habe bei meiner neuen Durchrechnung von 1905 genau dasselbe wiederbekommen, wie 1899. Die Zweifel endlich, ob ich zu meinen richtigen Resultaten auch auf einem richtigen Wege gekommen sei, hätte Herr Riebesell besser nicht veröffentlicht. Denn hier beweist er wieder durch mehrere Entgleisungen, die ich für Mathematiker nicht besonders zu nennen brauche, daß ihm manche recht einfachen mathematischen Dinge unbekannt oder doch ungeläufig sind.

Das mußte ich Herrn Riebesell leider schon in meiner zitierten Arbeit nachweisen. Herr Riebesell antwortet darauf in der Einleitung seiner neuen Abhandlung: Ich werde „in streng sachlicher Weise meine Entgegnung auf die *größtenteils völlig unberechtigten* Angriffe dieses Herrn bringen", und damit ist die Sache dann für ihn erledigt. Denn späterhin kommt die Sprache überhaupt nicht mehr auf meine Widerlegung der in seiner Dissertation enthaltenen Trugschlüsse, aus denen freilich zu erkennen war, daß Herrn Riebesell die fundamentalen Begriffe der Funktionenlehre (ich nenne nur den des singulären Punktes) vollständig unklar waren. Nur auf eine von mir nebenher gemachte Bemerkung, daß er ein gewisses Integral (in der Dissertation wird es $\int_0^1 \mathfrak{A} \cdot dx$ genannt) „in einem Atemzuge divergent nenne *und* ihm einen bestimmten endlichen Wert zuschreibe", antwortet Herr Riebesell (S. 352): „Diese Behauptung widerspricht dem wirklichen Sachverhalt". Dabei steht wörtlich in der Dissertation auf S. 25: Die Verfasser „erhalten für $C^*$, wie wir noch zeigen werden, den Wert: $\left[\int_0^x \mathfrak{A} \cdot dx\right]_{x=1}$. $C^*$ ist also dann gleich der Summe der nach hypergeometrischen Funktionen fortschreitenden Teilintegrale, genommen für $x = 1$." Ein paar Zeilen weiter heißt es: „$\int_1^x \mathfrak{A} \cdot dx$ hat keinen Sinn, es ist divergent." Ich will gerne zugeben, daß Herr Riebesell auch im folgenden öfter wiederholt, das Integral sei divergent, oder, wie er lieber sagt, es sei sinnlos. Wenn er aber dann dazu sagt, wenn man die Divergenz nicht beachte, so bekomme man den Wert $C^*$ heraus, so ist das doch eben die Konfusion, die ich

ihm vorwerfe. In Wirklichkeit ist nämlich die Sache äußerst einfach: Das Integral $\int_0^x \mathfrak{A}\,dx$ ist ja eine ganz vernünftige analytische Funktion, und sie wird im Punkte $x = 1$ unendlich von derselben Ordnung, wie $(1 - x)^{-\tau}$. Wenn Herrn Riebesell die Methoden der Funktionentheorie nicht ganz ungeläufig wären, so hätte er das an den bei der Berechnung des Integrals auftretenden hypergeometrischen Funktionen sofort sehen müssen und damit denn auch schon auf dem in seiner Dissertation S. 25, 26 eingeschlagenen Wege mein Resultat richtig nachprüfen können.

Wenn man nun die Lage der Sache kennt, so muß man sich einigermaßen über die folgenden Sätze wundern, die Herr Riebesell in der Einleitung seiner neuen Abhandlung schreibt: „In meiner Dissertation habe ich diese älteren Arbeiten[1]) einer Kritik unterzogen. Auf einen dabei von mir begangenen Fehler habe ich in der E. T. Z. 1906, Heft 3 hingewiesen. Die *Integrationskonstante* der Kurzschlußdifferentialgleichung *ist nämlich nicht gleich Null*, wie ich glaubte, sondern im allgemeinen *von Null verschieden.* Wie ich bereits dort angezeigt habe, hat mich dieser Umstand veranlaßt, *neue Methoden* (sic!) *zur Auflösung der Kurzschlußdifferentialgleichung* auszuarbeiten." Dazu will ich noch folgendes sagen: *Nachdem* Herr Riebesell im Herbst 1905 *von mir* durch Vermittelung seines Lehrers erfahren und, wie ich später hörte, auch eingesehen hatte, auf was für Trugschlüssen seine Kritik unserer Arbeit beruhte, erschien noch *mehrere Wochen nachher*, nämlich am 30. November 1905 in der E. T. Z. an auffälliger Stelle ein mit *Rll* unterzeichneter Auszug aus seiner Dissertation, worin es ohne Einschränkung heißt: „Der Verfasser zeigt, daß die Herren Arnold und Mie Fehler bei der Lösung der Gleichung gemacht haben. Durch die neuen Resultate gestalten sich die *technischen Folgerungen* der genannten Herren wesentlich anders." Dann stand Februar 1906 im 3. Heft der E. T. Z. in einer gelegentlichen brieflichen Mitteilung des Herrn Riebesell gegen einen Herrn Hahnemann unter anderem auch die Bemerkung, daß unsere Folgerungen doch richtig seien. Am Schluß dieses Briefes hieß es: „Bei einer Prüfung meiner Arbeit hat es sich herausgestellt, daß bei der Bestimmung der Konstanten $C''$ ein Fehler begangen wurde, nach dessen Beseitigung sich $C''$ *als im allgemeinen von Null verschieden* ergibt, also tritt $\tau > 1$ als erste Bedingung für die Funkenfreiheit auf. Die genaue Bestimmung habe *ich* durch

1) D. h. die Arbeit von Arnold und mir von 1899.

verschiedene neue Methoden in einwandfreier Weise durchgeführt, diese Untersuchungen werde ich demnächst in der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlichen." Ob Herr Riebesell mit Bewußtsein so handelt oder aus Unklarheit, kann ich nicht beurteilen.

Ähnlich ist es, wenn Herr Riebesell in der Einleitung seiner neuen Arbeit sehr wichtig davon spricht, daß „*er* die ganze Frage von einem viel allgemeineren Gesichtspunkt aus behandelt habe", und ebenso später, daß „*er* festzustellen versucht habe, weswegen die Bedingung $\tau > 1$ oft in der Praxis nicht bestätigt gefunden werde". Im weiteren Verlauf der Abhandlung werden dann freilich häufig die späteren Arbeiten von Herrn Arnold zitiert, der diese Frage längst theoretisch sehr eingehend behandelt hat, und über den Herr Riebesell in seiner Dissertation auch nur dann wesentlich „hinausgeht", wenn er seine Untersuchungen, wie auf S. 41, verkehrt wiedergibt.

Ich hoffe in diesen Zitaten zugleich eine Erklärung dafür gegeben zu haben, weswegen ich auf Herrn Riebesells Dissertation möglichst mit nicht mißzuverstehenden Worten erwiderte. Anders war wohl keine Aussicht, die Sache klar zu stellen. *Nunmehr ist aber die Angelegenheit für mich vollständig erledigt, und ich werde Herrn Riebesell auf nichts mehr erwidern.*

---

## Antwort auf Herrn Mies Erwiderung.

Von Paul Riebesell in Hamburg.

Es ist Herrn Mie gewiß sehr peinlich, daß er in seiner ersten[1]) und zweiten[2]) Abhandlung Fehler begangen hat, allein er sollte lieber eingestehen, daß er sich versehen hat, als Entschuldigungen vorbringen, die seine Lage nur verschlimmern. Denn wie liegt die Sache? In seiner ersten Abhandlung hatte Herr Mie behauptet, die Stromintensität „*i ist mit Hilfe der drei Potenzreihen* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ *zu berechnen, welche für* $x = 1$ *divergent werden. Wir müssen also für die Berechnung von i gegen Ende des Kurzschlusses eine andere Reihenentwicklung suchen*". In meiner Dissertation hatte ich dagegen bewiesen, daß die Reihenentwicklung für $i$ für $x = 1$ *konvergent* ist, und in meiner Erwiderung[3]) auf die zweite Abhandlung von Herrn Mie es als Fehler

1) E. T. Z. 1899.
2) Diese Zeitschrift Bd. 58, S. 37.
3) Diese Zeitschrift Bd. 58, S. 337.

bezeichnet, daß dieser die Potenzreihe für $i$ für divergent erklärt und *aus diesem Grunde* eine andere Reihenentwicklung aufgestellt habe. Jetzt leugnet Herr Mie, daß er hierbei einen Fehler begangen habe, und erklärt, mit dem „saloppen" Ausdrucke „eine Potenzreihe werde für $x = 1$ divergent", habe er gemeint, „der Punkt $x = 1$ liege auf dem Konvergenzkreise der Potenzreihe". Damit begeht er den neuen Fehler, anzunehmen, daß eine Potenzreihe, bei der der Punkt $x = 1$ auf dem Konvergenzkreise liegt, zur Berechnung des Wertes der Reihe für $x = 1$ unbrauchbar sein *müsse.*

Die Behauptung, daß für den Fall $\tau =$ einer ganzen Zahl in der Arbeit von 1899 ein falsches Integral angegeben ist, halte ich auch jetzt noch aufrecht, denn die dortige Formel (24) stimmt mit der Formel (28) von 1906 nicht überein.

Auf die von mir S. 338, Z. 10—24; S. 349, Z. 14—22; S. 349, Z. 27 — S. 352, Z. 9 v. u.; S. 353, Z. 4; S. 354, Z. 13—33 nachgewiesenen Fehler, insbesondere auf das böse Versehen bei der Bestimmung der Konstanten $C'$ geht Herr Mie mit keinem Worte ein. Statt dessen behauptet er, daß mir in meiner Erwiderung mehrere „Entgleisungen" passiert seien, die „er für Mathematiker nicht besonders zu nennen brauche". Angriffe dieser Art, bei denen ganz im allgemeinen Anschuldigungen erhoben werden, sind bis jetzt unter Mathematikern nicht üblich gewesen, und ich halte sie auch für durchaus unzulässig. Herr Mie hätte wahrlich die Pflicht gehabt, wie ich es getan habe, ganz bestimmte Stellen zu nennen, wo sich Fehler finden sollen.

Ebenso steht es mit den Bemerkungen des Herrn Mie über das Verhältnis meiner Untersuchungen zu denen des Herrn Arnold. Da Herr Mie in den §§ 7—11 meiner Arbeit, in denen ich zu Resultaten komme, die den seinigen ganz entgegengesetzt sind, aber der elektrotechnischen Praxis entsprechen, nicht das Geringste beanstandet hat, genügt es mir, darauf hinzuweisen, daß besonders das bereits in meiner Dissertation ausgesprochene Prinzip der Berücksichtigung der Hauptgleichung auch von anderer Seite neuerdings gegen die alten Theorien geltend gemacht wird; ich hoffe hierauf bald ausführlich an anderer Stelle zurückkommen zu können.[1]) Außerdem hat die einzige Tatsache, auf die Herr Mie hier Bezug nimmt, nämlich die angeblich „verkehrte Wiedergabe" von Äußerungen des Herrn Arnold, schon von anderer kompetenter Seite Anerkennung gefunden.[2])

1) C. Menges, E. T. Z. 1906, S. 1127.

2) G. Benischke, Elektrotechnik und Maschinenbau (Wien) 47. Heft, 1906.

Endlich macht Herr Mie mir den Vorwurf, ich solle es verschwiegen haben, daß er mich selbst durch Vermittlung meines Lehrers auf die „Trugschlüsse in meiner Dissertation" hingewiesen habe. Die hierin liegende Anschuldigung weise ich auf das entschiedenste zurück. Es lag für mich keine Veranlassung vor, Herrn Mie zu nennen, denn Herr Mie hat zwar am 26. September 1905 auf der Naturforscherversammlung in Meran meinem Lehrer *ohne jede nähere Begründung* mitgeteilt, meine Bestimmung der Konstanten $C''$ sei falsch, dieser war aber schon Ende August 1905 von anderer Seite auf die bedenkliche Stelle in meiner Arbeit hingewiesen worden, und ich hatte, sofort nachdem ich hiervon Kenntnis erhielt, begonnen, meine Untersuchungen einer Nachprüfung zu unterziehen. Ich scheue mich nicht einzugestehen, daß es längere Zeit gedauert hat, bis ich zur vollen Klarheit über den Sachverhalt gekommen bin, — einer Klarheit, die Herr Mie meines Erachtens noch heute nicht besitzt, wie das aus dem dritten Absatz seiner Erwiderung deutlich hervorgeht, und so erklärt es sich wohl hinreichend, daß ich gegen das Erscheinen der Note in der E. T. Z. vom 30. November 1905, die ich auf Veranlassung der Redaktion bald nach meiner Promotion (Juli 1905) verfaßt hatte, keinen Einspruch erhoben habe. An derselben Stelle habe ich aber bald darauf meinen Fehler öffentlich eingestanden, und wenn ich dabei gesagt habe, daß *ich* die genaue Bestimmung jener Konstanten „durch neue Methoden in einwandfreier Weise durchgeführt habe", so entspricht das durchaus der Wahrheit; denn Herr Mie hatte in seiner ersten Arbeit weder die Bestimmung *durchgeführt*, da er ohne jede nähere Begründung nur das Resultat gab, geschweige denn *in einwandfreier Weise* durchgeführt, da schon die kurze Begründung, die er gab, auf der falschen Annahme beruhte, die Reihe für $i$ sei in dem Punkte $x = 1$ divergent. Darüber, daß *meine* Lösungsmethoden von der Methode des Herrn Mie ganz verschieden, also *neu* sind, kann ebenfalls kein Zweifel bestehen.

Hamburg, 23. März 1907.

# Bemerkung zu den Sommerfeldschen Ausführungen „Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen".

Von A. TIMPE in Danzig-Langfuhr.

In seinem Nachtrag zu der Abhandlung „Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen"[1]) untersucht Herr A. Sommerfeld das ebene Problem der Spannungsverteilung in einem Parallelstreifen, an dessen oberem und unterem Rande zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte $P$ angreifen, und gelangt zu Näherungsformeln:

$$(1)\qquad \begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{2P}{\pi}\dfrac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{2P}{\pi}\dfrac{x^2(h-y)}{(x^2+(h-y)^2)^2}, \\ \sigma_y = -\dfrac{2P}{\pi}\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{2P}{\pi}\dfrac{(h-y)^3}{(x^2+(h-y)^2)^2}, \\ \tau = -\dfrac{2P}{\pi}\dfrac{y^2 x}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{2P}{\pi}\dfrac{(h-y)^2 x}{(x^2+(h-y)^2)^2}, \end{cases}$$

die im wesentlichen mit der von J. H. Michell[2]) gegebenen Lösung für die durch zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte beanspruchte Kreisscheibe übereinstimmen.[3]) Ich habe in einem Aufsatze, der demnächst in der „Zeitschr. d. V. d. Ing." erscheint, dasselbe Problem in Anknüpfung an die in meiner Dissertation[4]) entwickelte allgemeine Lösung des Spannungsproblems für den Parallelstreifen behandelt und zwar unter Anwendung der für die numerische Rechnung geeigneteren Fourierschen *Reihen*. Die Diskussion der Spannungsverteilung ist dort für den *ganzen* Streifen (soweit merkliche Spannungen vorhanden sind) numerisch bis zu Ende durchgeführt. An dieser Stelle möchte ich nur folgendes bemerken: Die Schwierigkeit der Randbedingung, wonach die Normalspannung längs der beiden Kanten überall gleich null, nur in den Druckpunkten gleich unendlich sein soll, wurde in zwei Schritten bewältigt. An die Spitze wurden die angeschriebenen Formeln (1) gestellt, die die verlangten „Verzerrungskerne" (Singularitäten) liefern; die dadurch hereinkommenden nicht gewollten Spannungen auf den beiden Kanten wurden dann nach dem in meiner Dissertation ent-

1) Diese Zeitschr. Bd. 54 (1907), S. 318.

2) London Math. Soc. Proc. 32 (1900), p. 46, 57.

3) Als Spannungstrajektorien ergeben sich nämlich, was Herr Sommerfeld nicht bemerkt zu haben scheint, die beiden Kreisbüschel, die die Druckpunkte zu Grundpunkten haben.

4) Diese Zeitschr. Bd. 52 (1905), S. 348.

wickelten Verfahren mittels gewöhnlicher Fourierentwicklungen entfernt.[1]) Die zehn ersten Koeffizienten dieser Entwicklungen habe ich mit dem *harmonischen Analysator* für das Gebiet $-5h < x < 5h$ bestimmt; der übrige Teil des Streifens kann, wie das Resultat zeigt, nach Überlagerung eines gleichförmigen longitudinalen Druckes als spannungsfrei angesehen werden. Das Ergebnis läßt sich dahin aussprechen, daß über die Verteilung (1) die Lösung

$$(2)\quad \begin{cases} \sigma_x = \sum\limits_1^{\infty} \left[\left(\frac{a_n}{\lambda_n} - b_n y\right) \mathfrak{Sin}\, \lambda_n y + \left(-\frac{2b_n}{\lambda_n} + a_n y\right) \mathfrak{Cof}\, \lambda_n y\right] \cos \lambda_n x, \\ \sigma_y = \sum\limits_1^{\infty} \left[\left(\frac{a_n}{\lambda_n} + b_n y\right) \mathfrak{Sin}\, \lambda_n y - a_n y\, \mathfrak{Cof}\, \lambda_n y\right] \cos \lambda_n x, \\ \tau = \sum\limits_1^{\infty} \left[\left(-\frac{b_n}{\lambda_n} + a_n y\right) \mathfrak{Sin}\, \lambda_n y - b_n y\, \mathfrak{Cof}\, \lambda_n y\right] \sin \lambda_n x, \end{cases}$$

eine entsprechende Lösung mit $h - y$ statt $y$ und schließlich noch die Lösung $\sigma_x = c_1$, $\sigma_y = c_2$, $\tau = 0$ zu überlagern ist; hierin ist $\lambda_n = \frac{2n\pi}{10h}$, die Konstanten $a$, $b$, $c$ sind mit der Last $P$ direkt und mit der Höhe $h$ umgekehrt proportional und nehmen für $P = 10000$, $h = 36$ folgende Werte an:

$a_1, a_2, \ldots, a_{10} = 24{,}46;\ 6{,}199;\ 2{,}569;\ 1{,}156;\ 0{,}5447;\ 0{,}2333;\ 0{,}09870;\ 0{,}03850;\ 0{,}01560;\ 0{,}006682.$

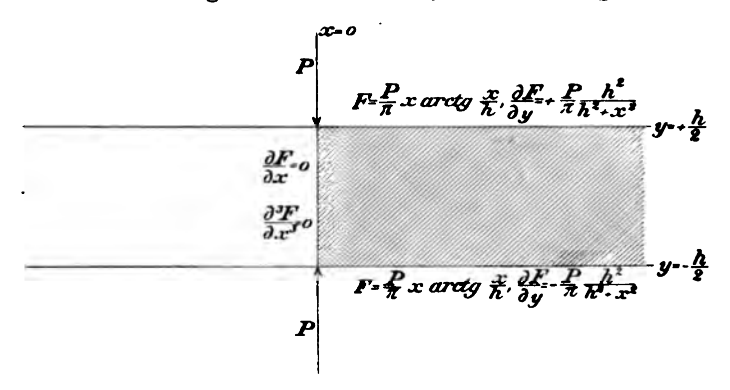
$b_1, b_2, \ldots, b_{10} = 6{,}983;\ 2{,}973;\ 1{,}538;\ 0{,}7838;\ 0{,}3982;\ 0{,}1795;\ 0{,}07872;\ 0{,}03159;\ 0{,}01305;\ 0{,}004522.$

$c_1 = -49{,}9;\ c_2 = 27{,}7.$

Ich möchte hier nun noch kurz darlegen, daß dasselbe Lösungsverfahren auch im Gewande der Fourierschen *Integrale* anwendbar ist. Die Lösung (1) liefert auf den Kanten $y = 0$, $y = h$, die aber im folgenden mit $y = -\frac{h}{2}$, $y = +\frac{h}{2}$ bezeichnet werden mögen, die Normalspannung $-\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{h^3}{(h^2 + x^2)^2}$ und die Tangentialspannung $\pm \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{h^2 x}{(h^2 + x^2)^2}$, sowie im Unendlichen verschwindende Spannungen; ferner ist die $y$-Achse Symmetrieachse. Das zu überlagernde Lösungssystem $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau$

1) Allgemein dürfte es sich bei elastischen Problemen, bei denen gewisse Singularitäten vorgeschrieben sind, empfehlen, unter Anwendung der bekannten Formeln für die „typischen Verzerrungskerne" (vgl. Love, Elastizität, §§ 132, 141, 52) zunächst diese Kerne herauszulösen und dann die den modifizierten übrigen Bedingungen entsprechende Lösung zu bestimmen.

muß demnach so beschaffen sein, daß $\sigma_y = \frac{2P}{\pi} \frac{h^3}{(h^2+x^2)^2}$, $\tau = \mp \frac{2P}{\pi} \frac{h^2 x}{(h^2+x^2)^2}$ für die Kanten $y = \mp \frac{h}{2}$ und daß $\sigma_x = \sigma_y = \tau = 0$ für $x = \infty$; überdies muß die $y$-Achse wieder Symmetrieachse sein. Die entsprechende Spannungsfunktion $F$ ist daher bei Betrachtung des Halbstreifens $x \geqq 0$ außer der Gleichung $\Delta\Delta F = 0$ folgenden Bedingungen zu unterwerfen: Für $x = 0$ muß wegen der Symmetrie der Spannungsverteilung $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0$ sein. Auf den Rändern $y = \mp h$ ergibt die Beziehung $-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \tau = \mp \frac{2P}{\pi} \frac{h^2 x}{(h^2+x^2)^2}$ durch Integration die Bedingung: $\frac{\partial F}{\partial y} = \mp \frac{P}{\pi} \frac{h^2}{h^2+x^2} + \text{const}$; da $\frac{\partial F}{\partial y}$ im Unendlichen wegen $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ auf beiden Rändern den gleichen Wert hat, ist die Integrationskonstante




ebenfalls auf beiden Rändern die gleiche und kann gleich 0 gesetzt werden. Auf den Rändern $y = \mp h$ ergibt sich ferner aus der Beziehung $\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2P}{\pi} \frac{h^3}{(h^2+x^2)^2}$ durch Integration die Relation

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2P}{\pi} h^3 \left[\frac{x}{2h^2(h^2+x^2)} + \frac{1}{2h^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{h}\right],$$

wobei wegen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ für $x = 0$ die Integrationskonstante in jedem Falle gleich 0 gesetzt ist, und hieraus durch abermalige Integration die Bedingung

$$F = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{h} + \text{const};$$

die Integrationskonstante ist hier, da im Unendlichen durchweg $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, für beide Ränder die gleiche und kann gleich 0 gesetzt werden.[1]) — Das ganze Bedingungsschema ist in Fig. 1 angeschrieben.

1) Durch die Betrachtung der Verhältnisse im Unendlichen wurde ich auf

Wir können nun sämtlichen Bedingungen genügen, indem wir $F$ in folgender Form ansetzen:

$$(3)\qquad F = \int\limits_0^x d\lambda \int\limits_0^\infty d\alpha \cos\lambda x \cdot [A_1(\lambda,\alpha)\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y + A_2(\lambda,\alpha)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y + A_3(\lambda,\alpha)\,y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y + A_4(\lambda,\alpha)\,y\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y].$$

Die Differentialgleichung und die Randbedingungen auf $x = 0$ sind dann ohne weiteres erfüllt. Sollen auch die vier Bedingungen auf den Rändern $y = \mp \frac{h}{2}$ erfüllt sein, so müssen die vier Funktionen $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ so bestimmt werden, daß

$$\int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_0^\infty d\alpha \cos\lambda x \cdot \left[A_1\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda h}{2} - A_2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda h}{2} - A_3\frac{h}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda h}{2} + A_4\frac{h}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda h}{2}\right] = \frac{P}{\pi}x\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{h},$$

$$\int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_0^\infty d\alpha \cos\lambda x \cdot \left[A_1\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda h}{2} + A_2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda h}{2} + A_3\frac{h}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda h}{2} + A_4\frac{h}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda h}{2}\right] = \frac{P}{\pi}x\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{h},$$

$$\int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_0^\infty d\alpha \cos\lambda x \cdot \left[-A_1\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda h}{2} + A_2\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda h}{2} + A_3\left(\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda h}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda h}{2}\right) - A_4\left(\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda h}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda h}{2}\right)\right] = -\frac{P}{\pi}\,\frac{h^2}{h^2+x^2},$$

$$\int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_0^\infty d\alpha \cos\lambda x \cdot \left[A_1\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda h}{2} + A_2\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda h}{2} + A_3\left(\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda h}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda h}{2}\right) + A_4\left(\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda h}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda h}{2}\right)\right] = \frac{P}{\pi}\,\frac{h^2}{h^2+x^2}.$$

Die rechten Seiten der beiden ersten Gleichungen können wir zunächst durch $\frac{P}{\pi}x\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{h}\cdot e^{-kx}$ ersetzen, mit dem Vorbehalt, später $k$ gegen 0 konvergieren zu lassen. Nach dem Theorem

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_0^\infty d\alpha \cos\lambda x \cos\lambda\alpha\, f(\alpha)$$

---

einen Vorzeichenfehler geführt, der Herrn **Sommerfeld** bei Aufstellung der entsprechenden Randbedingung unterlaufen ist. Sein Bedingungsschema entspricht dem Falle des in unendlicher Entfernung durch abwärts gerichtete Kräfte gehaltenen Streifens, der in den Punkten $x = 0$, $y = \pm\frac{h}{2}$ durch zwei nach oben wirkende Vertikalkräfte beansprucht wird.

können wir dann obige Bedingungen ersetzen durch

$$A_1 \mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2} - A_2 \mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2} - A_3 \frac{h}{2} \mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2} + A_4 \frac{h}{2} \mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2}$$

$$= \frac{2P}{\pi^2} \cos \lambda \alpha \cdot \alpha \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{h} \cdot e^{-k\alpha},$$

$$A_1 \mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2} + A_2 \mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2} + A_3 \frac{h}{2} \mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2} + A_4 \frac{h}{2} \mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2}$$

$$= \frac{2P}{\pi^2} \cos \lambda \alpha \cdot \alpha \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{h} \cdot e^{-k\alpha},$$

$$- A_1 \lambda \mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2} + A_2 \lambda \mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2} + A_3 \left(\mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda h}{2} \mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2}\right)$$

$$- A_4 \left(\mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda h}{2} \mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2}\right) = - \frac{2P}{\pi^2} \cos \lambda \alpha \frac{h^2}{h^2 + \alpha^2},$$

$$A_1 \lambda \mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2} + A_2 \lambda \mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2} + A_3 \left(\mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda h}{2} \mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2}\right)$$

$$+ A_4 \left(\mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda h}{2} \mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2}\right) = \frac{2P}{\pi^2} \cos \lambda \alpha \frac{h^2}{h^2 + \alpha^2}.$$

Man übersieht leicht, daß

$$A_2 = A_3 = 0,$$

und $A_1$, $A_4$ erhalten dann folgende Werte:

$$A_1 = \frac{2P}{\pi^2} \cos \lambda \alpha \frac{\alpha \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{h} \cdot e^{-k\alpha} \left[\mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda h}{2} \mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2}\right] - \frac{h^2}{h^2 + \alpha^2} \cdot \frac{h}{2} \mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2}}{\mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2} \mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda h}{2}},$$

$$A_4 = \frac{2P}{\pi^2} \cos \lambda \alpha \frac{\frac{h^2}{h^2 + \alpha^2} \mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2} - \lambda \alpha \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{h} \cdot e^{-k\alpha} \mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2}}{\mathfrak{Cof}\frac{\lambda h}{2} \mathfrak{Sin}\frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda h}{2}}.$$

Diese Werte sind in (3) einzuführen, und die gewünschte Spannungsfunktion ist damit gefunden. Bei Beschränkung auf eine gewisse Umgebung von $x = 0$ würde man jedenfalls wieder eine geeignete Annäherung und so eine zweite Approximation für die Lösung des ursprünglichen Problems ableiten können, die Wiederholung des Verfahrens würde eine dritte Approximation liefern u. s. f. Auf die Durchführung dieses Ansatzes bin ich nicht eingegangen, da die Reihenmethode praktisch doch viel schneller zum Ziele führt.

# Kleinere Mitteilungen.

## Neues von der dezimalen Winkelteilung.

(Vgl. diese Zeitschrift Bd. 46, S. 484, 485; Bd. 47, S. 266, 492; Bd. 48, S. 136; Bd. 49, S. 97, 384.)

Es geht uns die Nachricht zu, daß am 12. Mai d. J. in Toulouse ein Verein zur Verbreitung der dezimalen Methoden gegründet worden ist, mit J. de Rey Pailhade, dem bekannten eifrigen Förderer dieser Methoden an der Spitze.[1])

Folgende Beschlüsse sind bereits gefaßt worden:

1. Alle Entschließungen werden dem Vorstand des Bureau international des poids et mesures mitgeteilt.

2. Die Herausgeber von Landkarten sollen aufgefordert werden, auf allen neuen Karten neben dem sonst etwa gewählten Gradnetz auch ein solches in Dezimalteilung des Viertelskreises anzubringen.

Ferner ist beschlossen worden, die Hersteller von mathematischen Instrumenten mit geteilten Kreisen zu ersuchen, daß sie ihren Vorrat an Instrumenten mit alter (sexagesimaler) Teilung allmählich ausgehen lassen und in Zukunft ihren Abnehmern Kreise mit neuer Teilung (Zehnteilung des Viertelskreises oder rechten Winkels) empfehlen. Die neue Winkelteilung wird sich auf diese Weise langsam Bahn brechen, ohne Beunruhigung der Geister und ohne Schädigung der Fabrikanten.

# Bücherschau.

**Th. Albrecht. Bestimmung der Längendifferenz Potsdam—Borkum und der Polhöhe auf Station Borkum im Jahre 1904.** Veröff. d. k. preuß. geod. Instit. Neue Folge Nr. 24. I u. 48 S. 4°. Berlin 1906.

Die Längenbestimmung Potsdam-Borkum fügt den nordwestlichsten Vermessungspunkt der preußischen Triangulation in das mitteleuropäische Längennetz ein. „Ein solcher Anschluß erwies sich besonders aus dem Grunde wünschenswert, weil Emden—Borkum den Ausgangspunkt einer Reihe über-

1) Zweigvereine sollen in den größeren Städten Frankreichs und anderer Länder gebildet werden. Die Mitglieder bezahlen keinen Beitrag. Wer Mitglied werden will, hat sich zu wenden an M. le Président du Comité pour la propagation des Méthodes décimales, Toulouse (18, rue Saint-Jacques).

seeischer Kabel bildet und daher die Möglichkeit geschaffen wurde, in späteren Zeiten von da aus weitere Längenbestimmungen mit außerdeutschen Stationen ausführen zu können." Instrumente und Beobachtungsmethoden waren die gleichen, wie sie in den Vorjahren vom Geodätischen Institut zur Anwendung gelangten und die sich bei diesen Arbeiten aufs beste bewährten. Das Detail ist einschließlich der Beobachter, der Herren Th. Albrecht und B. Wanach, identisch mit jenem der wichtigen Längenbestimmung Potsdam—Greenwich (Vgl. Näheres diese Ztschr. Bd. 54, S. 104); selbst das Sternprogramm konnte ungeändert übernommen werden; die Zahl der Abende, die sich auf die Zeit zwischen 1904 Juni 10 und Juli 25 verteilt, beträgt 14. Als erwähnenswerte Daten zählen wir die folgenden auf: Stromzeit der 556 km langen Leitung Potsdam—Berlin—Emden—Borkum $s = +0^s.029$; für die Uhrkorrektion aus einem Stern ergibt sich der mittlere Fehler zu $\pm 0^s.025$ und für ein Abendresultat der Länge kommt $\pm 0^s.020$ m. F. zum Vorschein. Das Endergebnis der Längenbestimmung wird schließlich

Borkum, alter Leuchtturm (Blitzableiter) westlich vom Turm des Geodätischen Instituts in Potsdam:

$$25^m\ 35^s.181 \qquad \text{m. F.}\ \pm 0^s.006.$$

An dem größeren der Längenbestimmungs-Instrumente (8.1 cm Öffnung, 92 cm Brennweite) führte dann Herr Albrecht in Borkum an 5 Abenden eine Polhöhenbestimmung nach der Horrebow-Methode aus (Messung einer kleinen Höhendifferenz zwischen zwei im Nord- und Südzweig des Meridians kurz nacheinander kulminierenden Sternen). Albrecht benutzte 14 Sternpaare, deren Deklinationen, soweit sie nicht im neuen Auwersschen Fundamental-Katalog vorkommen, in aller Strenge aus dem in den Sternverzeichnissen angehäuften reichlichen Material abgeleitet worden sind. Die 46 einzelnen Beobachtungen ergeben als definitive Breite für denselben Punkt, auf den sich oben die Länge bezieht:

$$\varphi = +53^\circ 35' 17''.94 \qquad \text{m. F.}\ \pm 0''.058.$$

Straßburg i. E. WIRTZ.

---

**J. Bauschinger. Die Bahnbestimmung der Himmelskörper.** Mit 84 Figuren im Text. XVI u. 653 S. gr. 8°. Leipzig 1906, W. Engelmann.

Die theoretische Astronomie verfügt nicht eben über zahlreiche vollständige Lehrbücher der Bahnbestimmung der Himmelskörper. Das Hauptwerk war bisher Th. v. Oppolzers „Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten"[1]), dessen Wert die bequemen Tafelanhänge bedeutend erhöhen. Als gleich ausgezeichnet gilt J. C. Watsons „Theoretical astronomy"[2]), während die vor kurzer Zeit erschienene zweite Auflage von W. Klinkerfues' „Theoretischer Astronomie"[3]) weniger Beifall fand.

Bei dieser Sachlage verdient das soeben erschienene Werk von J. Bauschinger umsomehr Beachtung, als es einmal aus berufenster Feder

1) I. Bd., 2. Aufl. Leipzig 1882. II. Bd. Leipzig 1880.
2) Philadelphia 1868. 3) Braunschweig 1899.

[illegible] der Verf. ist Leiter des Kgl. Astronomischen Recheninstituts in [illegible] und anderseits auch insofern über Oppolzer hinausgeht, als es [illegible] auf Kometen- und Planetenbahnen beschränkt, sondern außer [illegible] auch Satelliten und Doppelsterne in den Kreis seines Lehr[illegible] zieht.

Der Stoff zerfällt in sieben Hauptstücke, deren erstes die unerläßlichen [illegible] aus der Sphärik und die Hilfsrechnungen zur Verbesserung der [illegible] bringt. Besonders hervorgehoben seien die Behandlung der Prä[illegible] und [illegible] der Äquinoktien, und die eingehende Darstellung, [illegible] passieren doch gerade bei der Verbesserung [illegible] Beobachtungen wegen Aberration dem Anfänger nur zu [illegible]

[illegible] (Die heliozentrische Bewegung) wird eingeleitet durch [illegible] der Kegelschnitte, der die Besprechung der Keplerschen [illegible] an die Spitze folgt, und zwar der Reihe nach für die Ellipse, [illegible] und die Hyperbel. Ein besonderer Abschnitt stellt die Be[illegible] wahren Bahnen (Ellipsen oder Hyperbeln) dar, deren Be[illegible] sich dadurch sehr einfach gestaltet, daß man von der Parabel [illegible] die nahe bei 1 gelegene Exzentrizität sucht. Statt der bei [illegible] recht bequemen Barkerschen Tafel zur Ermittlung der [illegible] in der parabolischen Bewegung zieht der Verf. die von [illegible] Gauß und Leverrier empfohlene umgekehrte Anordnung [illegible] den Argumenten $M$ oder $\log M$ die wahren Anomalien $v$ angibt. [illegible] wird ein wesentlich geringerer Umfang erzielt, ohne daß man [illegible] einbüßt. Die „geozentrische Bewegung" (Teil III) [illegible] nicht nur auf die Anweisung zur Berechnung einer Ephe[illegible] des Lambertschen Krümmungssatzes, sondern dis[illegible] eigenen Kapitel die scheinbare Bahn und ihre ausgezeich[illegible] Analytisch wird das Eintreten eines Doppelpunktes, einer [illegible] von Klinkerfues angegebene Beziehung zwischen Schleife [illegible] untersucht, und die Grenzkurve für den Zodiakus einer [illegible] abgeleitet.

[illegible] Vorbereitungen kann die Bahnbestimmung (Teil IV) in [illegible] werden. An erster Stelle findet die elliptische Bahn[illegible] drei Beobachtungen ihre Erledigung, die sich wesent[illegible] anschließt und die Enckesche Formulierung berück[illegible] Analyse hat eine kurze Darstellung erfahren [illegible] Methode, durch ein Beispiel erläutert. Weiter [illegible] die Fabritiussche Form der Hypothesenrechnung durch[illegible] Bahnbestimmung mit Hilfe der Gibbsschen Formeln [illegible] gelehrt; [bei dieser Gelegenheit sei auf die [illegible] von J. Frischauf: „Die Gauß-Gibbssche [illegible] Der Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen [illegible] gewidmet. Bauschinger macht nachdrücklich darauf [illegible] im Vergleich zur Bahnbestimmung aus drei [illegible] Methode nur im Notfall, d. h. nur im Aus[illegible] geozentrische Örter liegen nahe in einem

größten Kreis, der durch den mittleren Erdort hindurchgeht) gebrauchen dürfe. Einen längeren Abschnitt, als sonst wohl üblich, widmet der Verf. den direkten Methoden der Bahnbestimmung. Zunächst dem Verfahren von J. Glauser, das auf die unmittelbare Auswertung einer geozentrischen und einer heliozentrischen Distanz aus nur drei Beobachtungen ausgeht, während die Laplacesche Methode der Bahnbestimmung aus den geozentrischen Polarkoordinaten und deren Differentialquotienten zwei Gleichungen zwischen der geozentrischen und heliozentrischen Distanz des Himmelskörpers abzuleiten lehrt. Die Bestimmung der Elemente aus den Koordinaten eines Ortes und ihren Geschwindigkeiten ist dann rasch erledigt. Eine rechenflüchtigere Umformung hat Laplaces Methode durch H. Bruns erfahren.

Wesentlich geringere Arbeit erfordert die Ermittlung einer parabolischen oder parabelnahen Kometenbahn. Von den zahlreichen zu diesem Zwecke erdachten Methoden hat heutigen Tages die nach Olbers oder richtiger Lambert-Olbers benannte Methode sich allen andern überlegen erwiesen und wird daher auch fast ausschließlich angewendet. Als Unbekannte tritt in diesem Problem die geozentrische Distanz der ersten Beobachtung auf, die durch eine einfache Hypothesenrechnung gefunden wird; die geozentrischen Beobachtungen allein legen ferner das Verhältnis der dritten und ersten geozentrischen Distanz und damit die Bahnelemente fest. Kurz und hinreichend wird der sog. Ausnahmefall gelehrt, der dann eintritt, wenn die drei geozentrisch beobachteten Örter des Kometen in einem größten Kreise mit dem mittleren Erdort liegen. Ohne Voraussetzung einer Exzentrizität würde in diesem Falle eine Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen unmöglich sein; bei parabolischen Bahnen aber, bei denen nur mehr fünf Elemente ermittelt zu werden brauchen, läßt sich auch dann noch das Verhältnis der beiden äußeren geozentrischen Distanzen aufstellen. Nachdem hierauf die Berechnung parabelnaher Bahnen und die Bestimmung einer Kreisbahn gelehrt worden ist, gibt der Schluß dieses Teiles eine kurz gefaßte Geschichte der Bahnbestimmung.

Der V. Teil enthält im ersten Kapitel die Ausgleichungsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate); die weiteren Abschnitte wenden diese Disziplin auf die Bahnverbesserung an, zunächst auf die Bahnverbesserung durch Variation der Elemente, die man bei allen gut beobachteten Himmelskörpern zur Bestimmung definitiver Bahnen heranziehen muß. Minder genaue, aber in vielen Fällen ausreichende Resultate liefert die Variation der geozentrischen Distanzen.

Der VI. Teil beschäftigt sich mit der Theorie der speziellen Störungen und bringt die mechanische Integration als Vorbereitung. Eingehende Darstellung erfährt die Berechnung der speziellen Störungen in den Elementen, in den Polarkoordinaten und in den rechtwinkligen Koordinaten, Methoden, die alle drei je nach der zu untersuchenden Bahn sich häufiger Verwertung erfreuen. Ganz besondere Verhältnisse treten bei der Störungsrechnung für Kometen auf; diese Himmelskörper unterliegen bisweilen in unmittelbarer Nähe der großen Planeten, z. B. des Jupiter, so gewaltigen Störungen, daß ihre Berechnung Schwierigkeiten unterliegt, die man nach dem Vorgange von Laplace dadurch zu vermindern sucht, daß man während des Verweilens des Kometen in der Wirkungssphäre des

störenden Planeten diesen als Hauptkörper betrachtet, um den sich der Komet in einer meist hyperbolischen Bahn herumschwingt; die Sonne wirkt dann nur als störender Körper und nicht selten darf ihr Einfluß noch vernachlässigt werden. Wichtig und bequem ist für Identitätsuntersuchungen zweier Kometen die Tisserandsche Kometeninvariante; man versteht darunter einen einfachen Ausdruck, der sich zusammensetzt aus großer Halbachse, Parameter und Neigung der Kometenbahn gegen die Jupiterbahnebene, und der auch dann konstant bleibt, wenn die Kometenbahn selbst während eines Durchganges des Kometen durch die Wirkungssphäre des Jupiter eine vollständige Umänderung erfahren hat. Zur Ableitung dieses Theorems benutzt der Verf. den von Seeliger gegebenen elementaren Beweis.

Der VII. und letzte Teil ist der Bahnbestimmung der Meteore, Satelliten und Doppelsterne gewidmet. Für Meteorschwärme wird die Bahnbestimmung dadurch erleichtert, daß wir für sie die Parabel als Bahn setzen können; die Beobachtung braucht also nur die Richtung der Bewegung des Körperchens festzulegen; denn ein Punkt der Bahn ist identisch mit dem Erdort zur Zeit der Wahrnehmung. Allgemeiner noch läßt sich die kosmische Bahn bei Feuerkugeln ableiten, da hier die beobachtete Geschwindigkeit ein Kriterium für den Charakter des Kegelschnitts abgibt. Eigentümlicherweise scheinen die großen und hellen Feuerkugeln hyperbolische Bahnen zu bevorzugen.

Die Bahnbestimmung der Satelliten pflegt man am bequemsten, den besonderen Verhältnissen Rechnung tragend, in der Weise anzuordnen, daß man zunächst aus zwei vollständigen Beobachtungen bei bekannter Umlaufszeit um den Hauptplaneten eine Kreisbahn ableitet und diese dann auf Grund weiterer Beobachtungen differentiell verbessert. Ein verwandtes Problem bietet die Bahnbestimmung der Doppelsterne dar. Neben den graphischen Lösungen der Aufgabe (Klinkerfues, Zwiers) findet die rechnerisch heute allgemein verwendete analytische Methode nach Seeliger eingehende Darstellung. Außer den direkt zu beobachtenden Doppelsternen existieren noch Fixsterne, auf deren Duplizität wir noch bis vor 40 Jahren nur aus der Veränderlichkeit ihrer scheinbaren eignen Bewegung am Himmel schließen konnten (Sirius, Procyon). Es erwächst daher das Problem, aus den absoluten Koordinaten eines Sternes mit veränderlicher Eigenbewegung die Bahn abzuleiten, die er um den Schwerpunkt des aus ihm selbst und einem dunkeln Begleiter bestehenden Systems beschreibt. Wie die Veränderlichkeit der scheinbaren Bewegung, so deutet auch die Veränderlichkeit der Geschwindigkeit im Visionsradius, die uns das Spektroskop durch die Linienverschiebung (Dopplersches Prinzip) verrät, auf eine Duplizität hin. Auch aus derartigen Beobachtungen kann man, wenn auch nicht eindeutig, eine Bahn ableiten (Methoden von Lehmann-Filhés und Schwarzschild).

Die im Vorstehenden versuchte Inhaltsangabe des Werkes soll einen Begriff geben von der Reichhaltigkeit und der Klarheit der Anordnung des Stoffes. Das Buch ist gleich wertvoll als Studien- wie als Nachschlagewerk; denn der Verfasser nimmt allenthalben Rücksicht auf die historische Entwicklung der Lösungen der verschiedenen Probleme und bringt die [illegible] Nachweise für die Originalabhandlungen. Schließlich sei noch

darauf aufmerksam gemacht, daß schon im Jahre 1901 eine direkt zu dem Buche gehörende Tafelsammlung[1]) erschienen ist, die nach sachlicher und typographischer Disposition zu dem besten gehört, was wir zur Zeit an astronomischen Tabellenwerken besitzen.

Druckfehler: S. 230 Zeile 9 v. o. Statt sin $C$ lies cos $C$.
„ 597 „ 2 v. u. „ Rosenberger lies Rosenberg.

Straßburg i. E. WIRTZ.

---

**Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln** nebst mathematischen und naturwissenschaftlichen Hilfstafeln. Für höhere Schulen und Privatgebrauch zusammengestellt von Professor Dr. **Emil Greve** in Itzehoe. Glogau 1901, Karl Flemming.

Die Sammlung enthält die Briggsschen Logarithmen der natürlichen Zahlen 1—10000, die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von Minute zu Minute; ferner die Quadrate, Kurven, Quadrat- und Kubikwurzeln der Zahlen 1 bis 100. Außer den Tafeln der natürlichen Logarithmen der Zahlen 1 bis 120 und der natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen enthält das Buch noch die meisten der auch sonst üblichen mathematischen und naturwissenschaftlichen Hilfstafeln.

Bei sämtlichen Tafeln sind die Trennungslinien der senkrechten Spalten, sowie die durch Aufrundung entstandenen Endziffern in roter Farbe gedruckt, was von großem Nachteil für die Augen ist. Proportionaltäfelchen für die Differenzen 1 bis 4 dürften wohl selbst im Schulgebrauch entbehrlich sein.

Stuttgart. P. WERKMEISTER.

---

**Henselins Rechentafel.** Das große Einmaleins bis 999 mal 999 nebst einer Kreisberechnungstabelle. Zweite Auflage. Berlin 1904, C. Regenhardt. Geb. ℳ 6.00.

Die vorliegende Rechentafel oder besser Produktentafel enthält die Produkte aller ein-, zwei- und dreistelligen Zahlen mit eben solchen, ist also in bezug auf den Umfang mit den bekannten Crelleschen Tafeln zu vergleichen. Diese enthalten jedes Produkt von Zahlen, die kleiner als 1000 sind, doppelt; die Henselinsche Tafel dagegen enthält jedes Produkt nur einmal, was einerseits eine Reduktion der Crelleschen Tafel auf die Hälfte bedeutet, andrerseits aber für die Division einen Nachteil mit sich bringt. Ein Vorteil gegenüber den Crelleschen und auch andern Produktentafeln liegt darin, daß die Produkte nicht in zwei (Crelle) oder gar drei Teile (Riem) zerlegt wurden, abgesehen davon, daß die beiden ersten Ziffern — wie bei den meisten fünfstelligen Logarithmentafeln — der Übersichtlichkeit wegen nicht bei sämtlichen Produkten angegeben sind.

Ähnlich wie das „Zahlenbuch" von C. Cario und H. C. Schmidt (Aschersleben 1896), das in den Hauptgesichtspunkten mit der Henselinschen Tafel übereinstimmt, ist diese mit einem Rand-Index versehen, der aber hier entschieden bequemer ist. Während bei der ersteren das Aufschlagen einer

1) J. Bauschinger, Tafeln zur theoretischen Astronomie. Mit zwei lithographierten Tafeln. Gr. 8°, IV und 148 S. Leipzig 1901, W. Engelmann.

bestimmten Seite beide Hände — jedenfalls die rechte Hand — erfordert, läßt sich bei der vorliegenden Tafel „mit einem Griff“ der **linken** Hand die gewünschte Seite aufschlagen, und zwar **stets**, da die Indexstreifen auf der Rück- und Vorderseite bezeichnet sind.

Ist z. B. das Produkt 231 mal 752 gesucht, so schlägt man mit Hilfe des mit $\frac{2}{7}$ bezeichneten Index die beiden Doppelseiten auf, welche die Produkte der Zahlen 200 bis 300 mit den Zahlen 700 bis 800 enthalten. Ein Index $\frac{7}{2}$ ist nicht vorhanden, aus diesem Grunde ist es nötig, daß, wenn die Tafel zum Dividieren benutzt werden soll, zur Bestimmung der zweiten Indexziffer eine kleine Kopfrechnung der eigentlichen Tafelrechnung vorausgeht. Groß ist dieser Übelstand nicht, da allgemein die Rechentafeln mehr zum Multiplizieren als zum Dividieren benutzt werden.

Der Eindruck, den man beim ersten Blick in die Henselinsche Rechentafel erhält, ist bei dem Zahlengewirr ein — fast möchte man sagen — abschreckender; der Grund hierzu liegt einerseits darin, daß unnötig viel Ziffern fett gedruckt sind (das Fettdrucken der Endziffern in **Zwischenreihen** ist sicher wertlos), andrerseits in der nicht ganz glücklichen Wahl der Ziffernform. Nachdem die sog. alten englischen Ziffern bei den gebräuchlichsten Logarithmentafeln sich als äußerst zweckmäßig erwiesen haben, wäre zu wünschen, daß sie auch in Tafeln wie der vorliegenden zur Anwendung kämen.

Vermöge ihrer vorteilhaften Anordnung und der dadurch ermöglichten einfachen und raschen Handhabung darf man jedoch diese Rechentafel als eine der besten Produktentafeln bezeichnen, jedenfalls ist sie dem ihr am nächsten stehenden Zahlenbuch von Cario-Schmidt vorzuziehen.

Stuttgart. P. Werkmeister.

---

**Logarithmisch-trigonometrische und andre für Rechner nützliche Tafeln,** zunächst für Techniker, sowie für den Schulgebrauch und für praktische Rechner überhaupt von weil. Dr. **Moritz Rühlmann** und Professor Dr. **Moritz Richard Rühlmann.** 13. vermehrte und verbesserte Auflage. Leipzig 1905, Julius Klinkhardt. Preis ℳ 2.50.

In der Einleitung findet man unter anderem Angaben über die Genauigkeit der den Tafeln entnommenen Werte.

Tafel I enthält die Briggsschen Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 100, 10000 bis 15000 und 1500 bis 10000.

In Tafel II sind die Logarithmen der goniometrischen Funktionen angegeben; von $0^0$ bis $3^0$ von 10 zu 10 Sekunden, von $3^0$ an von Minute zu Minute. Bei dieser Tafel wäre zu wünschen, daß die Gradzahlen durch größere Ziffern hervorgehoben würden, um einen rascheren Überblick zu ermöglichen. Die „Neuerung“, bestehend in der Einführung von negativen Kennziffern, dürfte kaum Nachahmung finden; die seitherige Schreibweise ist doch bei uns zu sehr in die Rechenpraxis eingedrungen, um zugunsten der vorgeschlagenen verlassen zu werden.

Anhangsweise sind der Tafel II die beiden Hilfstafeln zur gegenseitigen Verwandlung von gemeinen und natürlichen Logarithmen beigegeben.

Tafel III gibt die natürlichen Werte der goniometrischen Funktionen von Minute zu Minute; durch Zusammenfassen sämtlicher Werte für einen Grad auf einer Seite erscheint diese Tafel sehr übersichtlich.

Die Länge der Kreisbögen (für den Radius 1) für einzelne Grade (von 0° bis 360°), Minuten und Sekunden sind in Tafel IV ebenfalls auf sechs Stellen angegeben.

Unter V und VI sind Tafeln zur Verwandlung der Minuten und Sekunden in Dezimalbrüche des Grades und die Tafel der natürlichen Logarithmen einiger Zahlen untergebracht.

Der Tafel VII können für die Durchmesser 1,0 bis 10,0 und 10 bis 1000 die Kreisumfänge, Kreisinhalte, Quadrate, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln entnommen werden.

In VIII und IX findet man Tafeln für barometrische Höhenmessungen sowie für Maß- und Gewichtsvergleichungen. Tabellen aus der Zinseszins- und Rentenrechnung, Mortalitätstafeln und Tafeln mit einer überaus großen Anzahl von Konstanten aus Astronomie, Physik und Chemie beschließen den reichen Inhalt des Buch, der ihm zusammen mit dem handlichen Format noch weitere Freunde — besonders in Technikerkreisen — gewinnen dürfte.

Auf einen Übelstand soll jedoch aufmerksam gemacht werden, dem vielleicht bei späteren Auflagen — wenigstens bei einigen Tafeln — abgeholfen werden kann. Bei sämtlichen Tafeln sind nämlich fünf und auch sechs Ziffern ohne Unterbrechung nebeneinander gedruckt. Das Zusammenfassen der Ziffern in Gruppen zu zwei und drei bezw. drei und drei, wie es in den meisten andern Tafelsammlungen üblich ist, würde aber die Übersichtlichkeit der Tafeln wesentlich erhöhen. Bei sechsstelligen Tafeln sollte man es jedenfalls nicht unterlassen, eine passende Gruppierung der Ziffern vorzunehmen.

Stuttgart. P. Werkmeister.

---

**Reduktionskurven zur Gauß-Poggendorffschen Spiegelablesung.** Herausgegeben von Dr. **A. Schweitzer.** Zürich 1901, E. Speidel. M 1.—

Bezeichnet man bei der Gauß-Poggendorffschen Methode den Abstand der Skala vom Spiegel mit $d$, die Skalenablesung mit $s$ und den entsprechenden Ausschlagswinkel mit $\varphi$, so benützt man zur Bestimmung von $\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$ und $\sin\frac{\varphi}{2}$ die bekannten Reihen

$$\varphi = \frac{1}{2D}\left(s - \frac{1}{3}\frac{s^3}{D^2} + \cdots\right),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2D}\left(s - \frac{1}{4}\frac{s^3}{D^2} + \cdots\right)$$

und

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4D}\left(s - \frac{11}{32}\frac{s^3}{D^2} + \cdots\right).$$

Bezeichnet man noch mit $s_1$, $s_2$ und $s_3$ die reduzierten Skalenablesungen, so hat man, um auf diese zu kommen, die Reduktionen

$$s - s_1 = \frac{1}{3}\frac{s^3}{D^2} - \frac{1}{5}\frac{s^5}{D^4} + \cdots,$$

$$s - s_2 = \frac{1}{4}\frac{s^3}{D^2} - \frac{1}{8}\frac{s^5}{D^4} + \cdots,$$

und

$$s - s_3 = \frac{11}{32}\frac{s^3}{D^2} - \frac{431}{2048}\frac{s^5}{D^4} + \cdots$$

zu bestimmen.

Die bekanntesten und eingehendsten Reduktionstabellen dieser Art sind die numerischen Tafeln von Dr. P. Czermak (Berlin 1890). Diese Tafeln haben zwei Eingänge, für Skalenabstand und für Skalenablesung, und enthalten die Reduktionswerte für Abstände zwischen 1000 und 4000 mm und für Ablesungen zwischen 0 und 500 mm mit Intervallen von 10 mm (bei den größeren Abständen 20 mm).

Die vorliegenden graphischen Tafeln liefern die drei Reduktionen für Skalenabstände von 1000 bis 2500 mm und für Skalenablesungen von 50 bis 600 mm. Die Tafeln sind kartesische Tafeln mit gewöhnlichen Maßstäben; es sind, um den Maßstab der gesuchten Reduktionen ändern zu können, nicht diese, sondern die Skalenabstände durch Isoplethen (von 100 zu 100 mm) dargestellt, so daß von „Reduktionskurven" — im engern Sinne — nicht die Rede sein kann. Bei jeder der drei Tafeln sind drei Scharen von Isoplethen gezeichnet, entsprechend drei verschiedenen Maßstäben für die Reduktionen, so daß diese auf 0,001 bezw. 0,01 und 0,1 zu erhalten sind.

Um bei den gesuchten Reduktionen eine der Größe der Skalenablesungen entsprechende Genauigkeit zu erhalten, hätte die Anwendung einer passenden Anamorphose, z. B. logarithmische Transformation, dieselben Dienste geleistet wie die drei Scharen von Isoplethen; es ließen sich dann die eigentlichen Reduktionskurven zeichnen, was einige Vorteile mit sich bringen würde.

Für den praktischen Gebrauch müssen die Tafeln durch Hervorheben einzelner Linien (oder Flächenstreifen) noch hergerichtet werden.

Stuttgart. P. Werkmeister.

---

**Abgekürzte Multiplikations-Rechentafeln** für sämtliche Zahlen von 2 bis 1000. Nebst einem Anhang, enthaltend die Quadratzahlen von 1 bis 1000. Entworfen und herausgegeben von **A. Ernst.** Braunschweig 1901, Friedrich Vieweg und Sohn.

Ähnlich wie die Rechentafeln von A. L. Crelle, zerfallen die obigen in 998 einzelne Tafeln, von welchen, wie bei Crelle, je zwei auf einer Seite, jedoch *unter*einander, stehen. Jedes dieser Täfelchen, die mit den Zahlen (Multiplikatoren) 2—1000 überschrieben sind, zerfällt in zwei Teile; der eine davon enthält als Eingang die Einer des Multiplikanden, der andere die Zehner bzw. Hunderter. Hat man z. B. die Zahl $a$ mit einer dreistelligen Zahl $b$ zu multiplizieren, so entnimmt man dem ersten Teil der mit $a$ überschriebenen Tafel das Produkt von $a$ mit dem Einer von $b$ und fügt hierzu das dem zweiten Teil entnommene Produkt von $a$ mit dem Zehner und Hunderter von $b$.

Da die Rechentafeln von A. L. Crelle, trotz ihres großen Formats und ihres hohen Preises, wohl die weiteste Verbreitung gefunden haben, und da der Verfasser selbst sie zum Vergleich heranzieht, so sollen sie auch hier als Maßstab dienen.

Außer dem Haupteingang für den Multiplikator, der bei beiden Tafeln derselbe ist, besitzt die Crellesche Tafel noch zwei Eingänge, den einen für die Hunderter, den andern für die Einer *und* Zehner; die vorliegende Tafel dagegen besitzt noch drei getrennte Eingänge für Einer, Zehner und Hun-

derter. Wenn man bedenkt, daß durch diese Anordnung der Umfang der Crelleschen Tafel auf etwa die Hälfte reduziert ist, so fällt der weitere Eingang der Tafel nicht schwer ins Gewicht, vollends bei der klaren und übersichtlichen Form der einzelnen Täfelchen. Bei Crelle kann das Produkt einer Zahl mit einer dreistelligen anderen Zahl unmittelbar der Tafel entnommen werden, wobei allerdings die beiden letzten Ziffern der letzten Spalte rechts entnommen werden müssen, was aber — bei der übersichtlichen Gruppierung der horizontalen Reihen — ohne weiteres (jedenfalls ohne „Lineal") geschehen kann, und zwar bei richtiger Anwendung der Tafel (kleiner Finger und Zeigefinger der linken Hand!) *fehlerlos*. Dieser Zusammensetzung des Produkts aus zwei Teilen entspricht bei der Ernstschen Tafel die Addition des Einer-Produkts zu dem Zehner-(Hunderter-)Produkt, „einer so einfachen Operation, wie sie jeder Schüler im Kopf ausführen kann." Wenn auch die Addition zweier Zahlen im allgemeinen als eine „einfache Operation" bezeichnet werden kann, so darf man doch nicht vergessen, daß sie an Einfachheit verliert, wenn die beiden zu addierenden Zahlen nicht *direkt untereinander* stehen, sondern durch verschiedene Zahlenreihen voneinander getrennt sind, wie es hier der Fall ist. Sicher ist die darin liegende Fehlerquelle bedeutend größer als die mit der Crelleschen Einrichtung verbundene. Daß die Addition selbst von geübteren Rechnern zuweilen in Form einer Nebenrechnung auszuführen ist, wird sich nicht umgehen lassen, da sonst von mechanischer Rechenarbeit kaum mehr die Rede sein könnte.

Ein praktischer Vergleich der beiden Tafeln in bezug auf Schnelligkeit in der Handhabung wird schwerlich zu gunsten der Ernstschen Tafel ausfallen, so daß ein Verdrängen der bewährten Crelleschen Tafel auch durch diese neue Tafel nicht zu erwarten ist.

Stuttgart. P. Werkmeister.

---

**Vier- und fünfstellige Logarithmentafeln** nebst einigen physikalischen Konstanten. Braunschweig 1904, Fr. Vieweg u. Sohn. ℳ —.80

Das Buch ist aus dem Bedürfnis entstanden, für bestimmte Rechnungen eine Tafelsammlung zu haben, welche nur die Logarithmen der natürlichen Zahlen enthält. Der Inhalt ist demnach folgender: Vierstellige Logarithmen der Zahlen 1 bis 1000; fünfstellige Logarithmen der Zahlen von 1000 bis 10000; trigonometrische Zahlen und Formeln. Auf den beiden letzten Seiten sind in gedrängter Übersicht die wichtigsten physikalischen Konstanten untergebracht.

Zur Vereinfachung der Interpolationsarbeit wurde für die Interpolationstafeln die schon von A. M. Nell (1866) in Anwendung gebrachte Anordnung benützt, die darauf beruht, daß für eine horizontale Reihe die Logarithmendifferenz meist konstant ist. Die Proportionalteile, die in andern Logarithmentafeln untereinander stehen, sind hier nebeneinander und zwar für jede Horizontalreihe angegeben; das Ermitteln der jeweiligen Logarithmendifferenz kommt damit in Wegfall.

In bezug auf Druck und Anordnung im einzelnen kann die Tafel empfohlen werden.

Stuttgart. P. Werkmeister.

---

**Sechsstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln** nebst Hilfstafeln, einem Anhang und einer Anweisung zum Gebrauch der Tafeln. Von **S. Stampfer,** Professor; neu bearbeitet von Professor **E. Doležal.** Zwanzigste Auflage. Schulausgabe. Wien 1904, K. Gerolds Sohn.

Die an den Tafeln vorgenommenen Änderungen beziehen sich hauptsächlich auf die Form und Gruppierung der Ziffern. Für die Ziffern wurden die alten englischen Typen gewählt, die auch bei den fünfstelligen Tafeln von F. G. Gauss zur Anwendung gekommen sind. Die Ziffern sind zu je dreien gruppiert, wodurch große Übersichtlichkeit erreicht wurde.

Tafel I enthält die dekadischen Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 10000, Tafel II die dekadischen Logarithmen der trigonometrischen Funktionen; beachtenswert ist, daß die Logarithmen für die Werte von $0^0\,0'\,0''$ bis $0^0\,0'\,10''$ von 0,1 zu 0,1 Sekunde angegeben sind, für die ersten 6 Minuten von Sekunde zu Sekunde; ferner von 5 Minuten bis 3 Grad von 10 zu 10 Sekunden, von 3 Grad ab von Minute zu Minute. Die mit D. 1″ und D. c. 1″ bezeichneten Spalten enthalten die Logarithmendifferenzen für 1 Sekunde; Interpolationstafeln sind nicht beigegeben; die bei mehr als fünfstelligen Logarithmentafeln sowieso größere Arbeit bei der Interpolation, kann bequem mit dem Rechenschieber ausgeführt werden. In Tafel II findet man die natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen für die Winkel der ersten Quadranten (von Minute zu Minute), ebenfalls auf 6 Dezimalen. Die Tafel IV gibt die Länge der Kreisbogen für den Halbmesser 1 für einzelne Grade, Minuten und Sekunden. In Tafel V sind die Längen der Sehnen für den Halbmesser von zehn zu zehn Minuten für die Winkel von $0^0$ bis $180^0$ zusammengestellt. Die Tafeln VI, VII und VIII enthalten die Quadrate der Zahlen 1 bis 1000, die Quadrat- und Kubikwurzeln aller Zahlen von 1 bis 100 und noch die ersten 6 Potenzen der Zahlen von 1 bis 100.

In einem Anhange sind, außer einer Zusammenstellung der Formeln aus Goniometrie, ebener und sphärischer Trigonometrie, eine Anzahl von Konstanten aus Mathematik, Astronomie, Geodäsie und Physik beigegeben. Maß- und Münz-Vergleichungstabellen beschließen den reichen Inhalt des Buches.

Stuttgart. P. Werkmeister.

**Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Dezimalen.** Bearbeitet von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. **Th. Albrecht,** Abteilungsvorsteher im Kgl. Preuß. Geodätischen Institut. Neunte Auflage. Berlin, P. Stankiewicz.

Obwohl diese fünfstelligen Logarithmentafeln auch für den Schulgebrauch als mustergültig bezeichnet werden müssen, so werden und sollen ihre Vorteile gegenüber ähnlichen fünfstelligen Tafeln doch hauptsächlich dem praktischen Rechner dienen. Die praktischen Rechnungen erfordern abwechselnd vier-, fünf-, sechs- und siebenstellige Tafeln; aus diesem Grunde suchte der Verfasser die Anordnungen der beliebten sechs- und siebenstelligen Tafeln von Bremiker auch bei fünfstelligen Tafeln anzuwenden.

Tafel I enthält in übersichtlicher Weise die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000; die Tafel ist nur mit einem Eingang versehen, im

Gegensatz zu andern Tafeln mit horizontalem und vertikalem Eingang. Die Tafel I enthält noch die Werte $S$ und $T$ zur gegenseitigen Umwandlung der Logarithmen des Bogens und des Sinus bezw. der Tangente. Die Ziffern der Proportionaltäfelchen sind in dieser Tafel, wie auch in den andern, kleiner gehalten als die Ziffern der eigentlichen Tafelwerte, wodurch ein stärkeres Hervortreten der letzteren erreicht wurde.

Die Tafeln II und III enthalten die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, in der Anordnung ganz wie die Tafeln von Bremiker; es sind demnach in Tafel II die Logarithmen der Sinus und Tangenten gegeben von $0^{\circ}$ bis $3^{\circ}$ von Sekunde zu Sekunde, und in Tafel III die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von Minute zu Minute. Mit Rücksicht auf astronomische Rechnungen sind die Sekanten und Kosekanten ebenfalls aufgenommen.

Tafel IV enthält die Additions- und Subtraktionslogarithmen; auch diese Tafel hat nur einen Eingang. Die Anordnung ist so, daß zunächst auf rund zwanzig Seiten die Werte $B = \log(x + 1)$ zu den Argumenten $A = \log x$ angegeben sind, während die beiden letzten Seiten die Werte $B = \log\frac{1}{1-x}$ zu den Argumenten $C = \log x$ enthalten; diese Anordnung auf den beiden letzten Seiten ermöglicht eine Entnahme von $C$ aus der Tafel ohne jede Interpolation. Der Unterschied in der Rechnung mit der Größe $A$ und der Größe $C$ liegt nur darin, daß erstere zum Logarithmus der kleineren, diese dagegen zum Logarithmus der größeren Zahl zu addieren ist.

Außer den vier Haupttafeln enthält das Buch noch eine Tafel zur Verwandlung der natürlichen Logarithmen in gemeine und umgekehrt, eine Tafel zur Verwandlung von Bogenmaß in Zeitmaß; ferner eine Quadrattafel der Zahlen von 1 bis 1000 und noch eine Tafel der numerischen Werte der trigonometrischen Funktionen.

In einem Anhange ist eine wertvolle Zusammenstellung der wichtigsten Formeln aus der Goniometrie, der ebenen und sphärischen Trigonometrie, der Algebra, der Differentialrechnung und der Ausgleichungsrechnung gegeben. Noch findet man unter „Konstanten" nützliche Angaben über oft gebrauchte Größen aus der Mathematik, der Geodäsie, der Astronomie und der Physik.

Eine Gruppierung der Ziffern, wie sie z. B. in der F. G. Gaußschen Tafel vorgenommen ist, fehlt bei sämtlichen Tafeln.

Stuttgart. P. Werkmeister.

# Neue Bücher.

## Analysis.

1. Burkhardt, Heinrich, Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Leipzig Teubner.
2. Cappilleri, Alfons, Einführung in die Ausgleichungsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate). Leipzig u. Wien, Deuticke. ℳ 3.—.
3. Helmert, F. R., Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Meßinstrumente. 2. Aufl. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. ℳ 16.—.
4. Weitbrecht, Wilh., Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. (Sammlung Göschen Nr. 302.) Leipzig 1906, Göschen. geb. ℳ —.80.

S. auch 93, 103, 104, 107.

## Astronomie, Geodäsie, Nautik.

5. Albrecht, M. F., u. Vierow, C. S., Lehrbuch der Navigation u. ihrer mathematischen Hilfswissenschaften. Für die K. preuß. Navigationsschulen. 9. Aufl. bearb. von G. Holz. Hrsg. im Auftrage des K. Ministeriums f. Handel u. Gewerbe. Berlin, Decker. ℳ 14.—; geb. in Leinw. ℳ 16.—.
6. Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung. Bestimmung der Längendifferenz Potsdam-Brocken im J. 1906. Versuche über die Anwendbarkeit der drahtlosen Telegraphie bei Längenbestimmungen. (Veröffentlichung des Kgl. preuß. geodät. Inst. Neue Folge Nr. 31.) Berlin, Stankiewicz.
7. Eggert, O., Einführung in die Geodäsie. Leipzig Teubner. geb. in Leinw. ℳ 10.—.
8. Galle, A., Geodäsie. (Sammlung Schubert XXIII.) Leipzig, Göschen. geb. ℳ 8.—.
9. Gauss, Karl Friedrich, Werke, 7. Band. Hrsg. von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Leipzig 1906, Teubner.
10. Gnau, E., Astronomie in der Schule. 1. Teil. Leipzig, Quelle & Meyer. ℳ —.80.
11. Holzmüller, G., Elementare kosmische Betrachtungen über das Sonnensystem und Widerlegung der von Kant und Laplace aufgestellten Hypothesen über dessen Entwicklungsgeschichte. Einige Vorträge. Leipzig, Teubner. ℳ 1.80.
12. Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. III. Band. Landes-Vermessung und Grundaufgaben der Erd-Messung. 5. erweiterte Aufl. bearb. von C. Reinhertz. Mit Vorwort v. E. Hammer. Stuttgart, Metzler. ℳ 15.—.
13. Kerl, Otto, „Voranschläge" der Genauigkeit beim trigonometrischen Punkteinschalten. Diss. Berlin.
14. Láska, W., Lehrbuch der Astronomie u. der mathematischen Geographie, 2. Aufl. 1. Tl.: Sphärische Astronomie. Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten. Bremerhaven u. Leipzig, v. Vangerow. ℳ 5.—; geb, ℳ 6.—.
15. Meyermann, Br., Vermessung der Umgebung des Orionnebels. (Abh. Ges. Wiss. Göttingen, math.-physik. Klasse, Neue Folge, Bd. 4, Nr. 5.) Berlin, 1906, Weidmann. ℳ. 3 50.

16. Poincaré, H., Leçons de mécanique céleste, professées à la sorbonne. Tome II, Ire partie. Développement de la fonction perturbatrice. Paris, Gauthiers-Villars. Frcs 6.—.
17. Rohrbach, Karl, Sternkarten in gnomonischer Projektion zum Einzeichnen von Meteorbahnen, Nordlichtstrahlen, Kometenschweifen, leuchtenden Wolken, Zodiakallicht und anderen Himmelserscheinungen, zugleich Repetitionsatlas f. das Studium der Sternbilder. 3. verm. Aufl. Gotha, Thienemann. ℳ 1.40.

S. auch 2, 3, 4, 97.

### Biologie.

18. Pearson, Karl, A mathematical theory of Random Migration. With the assistance of John Blakerman. London, Dulau. 5 s.

### Darstellende Geometrie.

19. Barchanek, Klemens, Lehr- u. Übungsbuch der darstellenden Geometrie f. Oberrealschulen. 2te im Sinne des Normallehrplanes gekürzte Auflage. Wien, Tempsky. geb. K. 3.20.
20. Bartlett, G. M., Numerical problems in descriptive geometry, for class and drawing room practice. Revised edition. Ann Arbor, Bartlett. Cloth. $ 0.50.
21. Haeder, Otto, jun., Die Schnell-Perspektive (Haeder-Perspektive) und Skizzieren. Für technische Lehranstalten u. zum Selbstunterricht. Duisburg a. Rh. Selbstverlag. (Düsseldorf, Schwann.) geb. in Leinw. ℳ 2.—.
22. Körber, Strahlendiagramm zur vereinfachten Herstellung perspektivischer Zeichnungen. Zum Gebrauch f. Architekten, Ingenieure usw. 2. Aufl. Berlin, Ernst & Sohn. In Rolle ℳ 2.—.
23. Loria, Gino, Vorlesungen über darstellende Geometrie. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte. Erster Teil: Die Darstellungsmethoden. (Teubners Sammlung, Band XXV, 1.) Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. ℳ 6.80.

S. auch 66, 95, 103, 104, 107.

### Geometrie.

24. Fourrey, E., Curiosités géométriques. Paris, Vuibert et Nony.

S. auch 36.

### Geschichte, Biographien.

25. Ahrens, W., Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi u. M. H. Jacobi. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. ℳ 7.50.
26. Ahrens, W., C. G. J. Jacobi als Politiker. Ein Beitrag zu seiner Biographie. Leipzig, Teubner. ℳ 1.20.
27. Cantor, Moritz, Vorlesungen üb. Geschichte der Mathematik. Erster Band: Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. ℳ 24.—.
28. Festakt der Universität Basel zur Feier des zweihundertsten Geburtstages Leonhard Eulers. Festbericht, erstattet im Auftrage E. E. Regenz der Universität von dem Rektor Professor Dr. John Meier. Basel, Universitätsdruckerei.
29. Hering, Kurt, Das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine 1706—1906. (Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissensch. mit Einschluß ihrer Anwendungen. XXIII. Heft.) Leipzig. Teubner. ℳ 1.60.
30. Schulz-Euler, S., Leonhard Euler. Ein Lebensbild zu seinem 200. Geburtstage, nach Quellen u. Familienpapieren bearb. Frankfurt a. M., Schulz. ℳ 1.50.

31. Slaby, A., Otto von Guericke. Festvortrag, aus Anlaß der Grundsteinlegung des Deutschen Museums zu München gehalten im Wittelsbach-Palais am 13. November 1906. Berlin, Springer. *M.* — 60.

32. Wangerin, A., Franz Neumann u. sein Wirken als Forscher u. Lehrer. („Die Wissenschaft". Heft 19.) Braunschweig, Vieweg u. Sohn. *M.* 5.50, geb in Leinw. *M.* 6 20.

**Mechanik.**

33. Baker, W. M., A key to elementary Dynamics. London, Bell. 10 s. 6 d.

34. Crain, Rudolf, Schraubenräder mit geradlinigen Eingriffsflächen. Diss. Techn. Hochschule Berlin.

35. Dziobeck, O., Die Grundlagen der Mechanik. Berlin, Mittler & Sohn. *M.* 6.—; geb. *M.* 7.—.

36. Emch, Arnold, Kinematische Gelenksysteme u. die durch sie erzeugten geometrischen Transformationen. Mit Anwendungen. Progr. Solothurn, Lüthy. *M.* 2.—.

37. Felgenträger, W., Theorie, Konstruktion u. Gebrauch der feineren Hebelwage. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. *M.* 8.—.

38. Fischer, Otto, Kinematik organischer Gelenke. („Die Wissenschaft" Heft 18.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. *M.* 8.—; geb. in Leinwand *M.* 9.—.

39. Föppl, August, Vorlesungen über technische Mechanik. Fünfter Band: Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. *M.* 10.—.

40. Glinzer, E., Kurzes Lehrbuch der Festigkeitslehre f. Baugewerkschule u. Baupraxis. 3., vielfach umgearb. u. verm. Aufl. vom „Grundriß der Festigkeitslehre". Leipzig, Degener.

41. Heun, Karl, Lehrbuch der Mechanik, I. Teil: Kinematik, mit einer Einleitung in die elementare Vektorrechnung. (Sammlung Schubert XXXVII.) Leipzig 1906, Göschen. geb. *M.* 8.—.

42. Lévy, M., La statique graphique et ses applications aux constructions. 3e éd. Partie I: Principes et applications de statique graphique pure. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 22.

43. Lorenz, Hans, Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder, Wasser- und Dampfturbinen, Schleuderpumpen u. -Gebläse, Turbokompressoren, Schraubengebläse u. Schiffspropeller. München u. Berlin, Oldenbourg. geb. *M.* 8.—.

44. Mägis, A., Beitrag zur Dynamik der Wirbelstürme. Solothurn, Lüthy. *M.* 2.

45. Müller-Breslau, Heinr., Die graphische Statik der Baukonstruktionen. II. Bd. 1. Abtlg. 4., verm. Aufl. Stuttgart, Kröner. *M.* 16; geb. *M.* 18.—.

46. Schlink, W., Statik der Raumfachwerke. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. *M.* 9.—.

47. Seemann, Alfred, Die Müllerschen Schieberdiagramme für Steuerungen ortfester Dampfmaschinen. 2., umgearb. Aufl. München 1906, Ackermann.

48. Stephan, P., Die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch f. mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch f. Studierende höherer technischer Lehranstalten. 2. Teil. Festigkeitslehre u. Mechanik der flüssigen u. gasförmigen Körper. Leipzig u. Berlin 1906 Teubner. *M.* 7.—.

49. Wittenbauer, Ferd., Aufgaben aus der technischen Mechanik. I. Bd. Allgemeiner Teil. Berlin, Springer. *M.* 5.—.

S. auch 16, 17, 103, 104, 107.

**Physik, Geophysik, physikalische Chemie.**

50. [illegible], Lavoro, La ionizzazione e la convezione elettrica nei gas. (Attualità scientifiche N. 9) Bologna, Zanichelli. L. 5.

51. [illegible], Wilh., Physikalische Messungsmethoden. (Sammlung Göschen [illegible]) Leipzig, Göschen. geb. *M.* —.80.

52. Brillouin, Marcel, Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. 1ère partie. Généralités. Viscosité des liquides. Paris 1907, Gauthier-Villars. Frs. 9.

53. Brüsch, Wilh., Die Beleuchtungsarten der Gegenwart. („Aus Natur u. Geisteswelt", 108. Bändchen.) Leipzig 1906, Teubner. *M.* 1.—; geb. *M.* 1.25.

54. Bryan, G. H., Thermodynamics, an introductory treatise dealing mainly with first principles and their direct applications. (Teubners Sammlung Band XXI.) Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. *M.* 7.—.

55. Chappuis, James et Berget, Alphonse, Leçons de Physique générale. Cours professé à l'école centrale des Arts et Manufactures. 2e éd. entièrement refondue. T. I. Instruments de mesure. Pesanteur. Elasticité. Statique des liquides et des gaz. Chaleur. Paris, Gauthier-Villars.

56. Crookes, William, Strahlende Materie od. der vierte Aggregatzustand. Vortrag. Deutsch hrsg. v. Heinrich Gretschel. 4. unveränd. Neudr. Leipzig, Quandt & Händel. *M.* 1.50.

57. Dohle, Wilh., Lehrbuch der Experimentalphysik f. den Gebrauch an höheren Lehranstalten. 4., verb. Aufl. Stuttgart. Grub.

58. Duhem, Pierre, Recherches sur l'élasticité. De l'équilibre et du mouvement des milieux vitreux. Les milieux vitreux peu déformés. La stabilité des milieux élastiques. Propriétés générales des ondes dans les milieux visqueux. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 12.—.

59. Emden, R., Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische u. meteorologische Probleme. Leipzig u. Berlin, Teubner.

60. Enzyklopädie der mathem. Wiss. mit Einschluß ihrer Anwendungen. V. Bd. Physik. 2. Tl. 2. Heft. Leipzig, Teubner. *M.* 3.—.
— dasselbe 1. Tl. 4. Heft. Ebd. *M.* 3.60.

61. Frommel, Wilhelm, Radioaktivität. (Sammlung Göschen Nr. 317.) Leipzig, Göschen. geb. *M.* —.80.

62. Gehrcke, E., Die Anwendung der Interferenzen in der Spektroskopie und Metrologie. („Die Wissenschaft" Heft 17.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. *M.* 5.50; geb. in Leinwand *M.* 6.20.

63. Graetz, L., Die Elektrizität u. ihre Anwendungen. 13. u. 14. Aufl. Stuttgart, Engelhorn. geb. in Leinw. *M.* 8.—.

64. Grotthus, Theodor von, Abhandlungen über Elektrizität und Licht. (Ostwalds Klassiker Nr. 152.) Hrg. v. R. Luther und A. v. Öttingen. Leipzig 1906, Engelmann. geb. *M.* 3.—.

65. Handbuch der Physik 2. Aufl. Hrsg. v. A. Winkelmann. Leipzig, Barth.
I. Bd. 1. Hälfte. Allgemeine Physik. *M.* 17.—.
III. Bd. 2. Hälfte Wärme. *M.* 20 —.

66. Hartwig, Th., Das Stereoskop u. seine Anwendungen. („Aus Natur u. Geisteswelt" 135. Bändchen.) Leipzig, Teubner. *M.* 1.—; geb. *M.* 1.25.

67. Hecker, O., Beobachtungen an Horizontalpendeln über die Deformation des Erdkörpers unter dem Einfluß von Sonne u. Mond. (Veröffentlichg. des Kgl. preuß. geodät. Instituts. Neue Folge Nr. 32.) Berlin, Stankiewicz.

68. Korn, Arthur, Elektrische Fernphotographie und Ähnliches. 2. Aufl. Leipzig, Hirzel. *M.* 2.—.

69. Krauss, Fritz, Die Thermodynamik d. Dampfmaschinen. Berlin, Springer. *M.* 3.—.

70. Kuenen, J. P., Die Zustandsgleichung der Gase u. Flüssigkeiten u. die Kontinuitätstheorie. („Die Wissenschaft" Heft 20.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. *M.* 6.50, geb. *M.* 7.10.

71. Kunz, Jacob, Theoretische Physik auf mechanischer Grundlage. Stuttgart, Enke. *M.* 12.—.

72. Lamb, Horace, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsche autorisierte Ausgabe (nach der 3. englischen Auflage) besorgt v. Johannes Friedel. (Teubners Sammlung Bd. XXVI.) Leipzig u. Berlin, Teubner.

73. Lehmann, O., Die scheinbar lebenden Kristalle. Anleitung zur Demonstration ihrer Eigenschaften sowie ihrer Beziehungen zu anderen flüssigen u. zu den festen Kristallen, in Form eines Dreigesprächs. Eßlingen, Schreiber. In Leinw. kart. ℳ 2.20.

74. Lommel, E. v., Lehrbuch der Experimentalphysik. 12. u. 13., neubearb. Aufl., hrsg. v. Walt. König. Leipzig, Barth. ℳ 6.60; geb. in Leinw. ℳ 7.50.

75. Mahler, G., Physikalische Formelsammlung. (Sammlung Göschen Nr. 136.) Leipzig, Göschen. geb. ℳ —.80.

76. Meyerhoffer, W., Gleichgewichte der Stereomeren. Mit einem Begleitwort von J. H. van't Hoff. Leipzig u. Berlin 1906, Teubner, ℳ 2.40.

77. Mie, Gustav, Moleküle, Atome, Weltäther. („Aus Natur u. Geisteswelt", 58. Bändchen.) 2. Aufl. Leipzig, Teubner. ℳ 1.—; geb. ℳ 1.25.

78. Moriondo, Ezio, Principî di termodinamica grafica. Torino. L. 3.

79. Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 10., umgearb. u. verm. Aufl., hrsg. v. Leop. Pfaundler. In 4 Bänden. 2. Bd. 1. Abt. 3. Buch. Die Lehre v. der strahlenden Energie (Optik). Von Otto Lummer. Braunschweig, Vieweg & Sohn. ℳ 15 —

80. Pictet, Raoul, Die Entwicklung der Theorieen u. der Verfahrungsweisen bei der Herstellung der flüssigen Luft. Weimar, Steinert. ℳ 1.80; geb. ℳ 2.30.

81. Poincaré, Lucien, The new Physics and its evolution. (International Scientific Series.) London, Paul. 5 s.

82. Poynting, J. H., and Thomson, J. J., A textbook of Physics. Properties of Matter. 4th ed., carefully revised. London, Griffin. 10 s. 6 d.

83. Righi, Augusto, La moderna teoria dei fenomeni fisici (radioattività, ioni, elettroni). 3ª edizione considerevolmente ampliata. (Attualità scientifiche N. 3.) Bologna, Zanichelli. L. 5.

84. —, Sull' ipotesi della natura elettrica e della materia: lezione inaugurale (12 aprile 1907). L. 2.

85. Righi, A. u. Dessau, B., Die Telegraphie ohne Draht. 2. vervollst. Aufl. Braunschweig, Vieweg & Sohn. ℳ 15; geb. ℳ 16.50.

86. Schacht, Johannes, Zur Energielehre im physikalischen Unterricht. Progr. 4. Realschule Berlin, Weidmann. ℳ 1.—.

87. Schuster, Arthur, Einführung in die theoretische Optik. Autorisierte deutsche Ausgabe, übersetzt von Heinrich Konen. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. ℳ 13.—.

88. Strehl, Karl, Einführung in die beugungstheoretische Optik. Berlin, Central-Zeitg. f. Optik u. Mechanik. ℳ —.50.

89. Töpler, Aug., Beobachtungen nach einer neuen optischen Methode. (Ostwalds Klassiker Nr. 157.) Hrsg. v. A. Witting. Leipzig 1906, Engelmann. geb. ℳ 1.50.

90. —, Beobachtungen nach der Schlierenmethode. (Ostwalds Klassiker Nr. 158.) Hrsg. v. A. Witting. Leipzig 1906, Engelmann. geb. ℳ 3.

91. Vater, Rich., Einführung in die Theorie u. den Bau der neueren Wärmekraftmaschinen (Gasmaschinen). („Aus Natur und Geisteswelt", 21. Bändchen.) 2. Aufl. Leipzig 1906, Teubner. ℳ 1.—; geb. ℳ 1.25.

92. Weyrauch, Jakob J., Grundriß der Wärmetheorie. Mit zahlreichen Beispielen und Anwendungen. Nach Vorträgen an der Kgl. Technischen Hochschule in Stuttgart. Zweite Hälfte. Stuttgart, Wittwer. ℳ 16.—.

S. auch 3, 6, 37, 44, 101, 102, 107.

## Versicherungsmathematik.

93. Broggi, U., Traité des assurances sur la vie, avec développements sur le calcul des probabilités. Traduit de l'Italien par S. Lattès. Avec une préface de M. Achard. Paris, Hermann. Frs. 7.50.

### Tafeln, Rechen-Apparate und -Maschinen.

94. BURRAU, CARL, Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument (Kreis- u. Hyperbelfunktionen). Berlin, Reimer. geb. ℳ 4.
95. LÁSKA, W., u. ULKOWSKI, F., Atlas der Nomographie — Collection de Nomogrammes. I. Blatt. Lemberg 1906, (Wissenschaftl. Antiquariat). ℳ 3.—.
96. RICHTER, O., Dreistellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. Leipzig, u. Berlin, Teubner. ℳ —.20.
97. SEIFFERT, O., Vierstellige polygonometrische Tafeln zur Berechnung u. Sicherung der Koordinatenunterschiede mit der Rechenmaschine. Braunschweig, Vieweg & Sohn. ℳ 2 50.
98. ULLRICH, E., Der Rechenstab in der Textilindustrie. Wien, Deuticke. ℳ 1.20.
99. ZIMMERMANN, H., Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. 5. Aufl. Berlin, Ernst & Sohn. geb. in Leinw. ℳ 5.—.

### Verschiedenes.

100. AUERBACH, FELIX, Das Zeißwerk und die Karl-Zeiß-Stiftung in Jena, ihre wissenschaftliche, technische u. soziale Entwicklung u. Bedeutung, für weitere Kreise dargestellt. 3., verm. Aufl. Jena, Fischer. ℳ 2.40; geb. ℳ 3.—.
101. BOUASSE, H., Bases physiques de la musique. (Scientia No. 28.) Paris, Gauthier-Villars. Fr. 2.
102. HAGENBACH, AUG., Die Stellung der Physik zu den Naturwissenschaften und der Technik. Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ —.80.
103. MARC, LUDW., Aufgaben aus der höheren Mathematik, technischen Mechanik u. darstellenden Geometrie, welche bei der Vorprüfung für Bau-, Maschinen-, Elektro-, Kultur- u. Vermessungs-Ingenieure sowie Architekten an der Kgl. technischen Hochschule zu München vom J. 1901 ab gestellt worden sind. München, Lachner. ℳ 2.—.
104. MARC, L., u. KOCH, K., Lösungen zu den Aufgaben aus der höheren Mathematik, technischen Mechanik u. darstellenden Geometrie, f. Bau-, Maschinen-, Elektro-, Kultur- und Vermessungs-Ingenieure sowie Architekten. München, Lachner. ℳ 6.—.
105. RIOLLOT, J., Les carrés magiques, contribution à leur étude. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 5.
106. SCHUBERT, HERMANN, Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken u. Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Große Ausgabe. 3. Aufl. I. Bd. Zahl-Probleme. Leipzig, Göschen. geb. ℳ 4.—.
107. WEBER, H., und WELLSTEIN, J., Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch f. Lehrer u. Studierende. III: Angewandte Elementar-Mathematik. Leipzig, Teubner. geb. ℳ 14.—.
108. WEINSTEIN, B., Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Vorlesungen gehalten an der Universität Berlin. Leipzig u. Berlin, Teubner, geb. in Leinw. ℳ 8.

---

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

D'ADHÉMAR, R., Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles. (Scientia 29.) Paris, Gauthier-Villars. cartonné Frs. 2.—.

AHRENS, W., Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. ℳ 7.50.

Ahrens, W., C. G. J. Jacobi als Politiker. Leipzig, Teubner. ℳ 1.20.

Amaduzzi, L., La ionizzazione e la convezione elettrica nei gas, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 50.

Arnoux, Gabriel, Arithmétique graphique. Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques. (Essais de psychologie et de métaphysique positives.) Paris, Gauthier-Villars. Frs. 7.50.

Bachmann, Fr., und Kanning, R., Rechenbuch für höhere Mädchenschulen. 3. Heft. 6. Schuljahr. Leipzig, Freytag. geb. ℳ —.70.

Bahrdt, W., Physikalische Messungsmethoden, s. N. B. 51.

Barchaneck, Klemens, Lehr- und Übungsbuch der darstellenden Geometrie für Oberrealschulen, s. N. B. 19.

Bolzano, Bernard, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.

Bopp, Karl, Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vicentio in vergleichender Bearbeitung. (Abh. zur Geschichte der mathem. Wiss. XX. Heft, 2. Stück.) Leipzig, Teubner. ℳ 10.—.

Bouasse, H., Bases physiques de la musique, s. N. B. 101.

Brillouin, M., Leçons sur la viscosité, s. N. B. 52.

Broggi, U., Assurances sur la vie, s. N. B. 93.

Brüsch, W., Die Beleuchtungsarten der Gegenwart, s. N. B. 53.

Bryan, G. H., Thermodynamics, s. N. B. 54.

Burkhardt, Heinrich, Vorlesungen über die Elemente der Differential- u. Integralrechnung u. ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Leipzig, Teubner.

Burrau, C., Tafeln der Funktionen Cosinus u. Sinus, s. N. B. 94.

Cantor, M., Geschichte der Mathematik, I, s. N. B. 27.

Cappilleri, A., Ausgleichungsrechnung, s. N. B. 2.

Chandler, G. H., Elements of the infinitesimal calculus. 3d ed., rewritten. New York, Wiley & Sons. Cloth. $ 2.—.

Chappuis, J. et Berget, A., Leçons de physique générale. T. I, s. N. B. 55.

Crain, R., Schraubenräder, s. N. B. 34.

Crantz, P., Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. I. („Aus Natur u. Geisteswelt", 120. Bändchen.) Leipzig 1906, Teubner. ℳ 1.—; geb. ℳ 1.25.

Czuber, Emanuel, Vorlesungen über Differential- u. Integralrechnung. 2. Band. Zweite, sorgfältig durchgesehene Aufl. Leipzig 1906, Teubner. geb. ℳ 12.—.

Donle, W., Experimentalphysik, s. N. B. 57.

Duhem, P., Recherches sur l'élasticité, s. N. B. 58.

Durège, H., Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. In 5. Aufl. neu bearb. v. Ludwig Maurer. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. ℳ 10.—.

Dziobek, O., Mechanik, s. N. B. 35.

Eggert, O., Geodäsie, s. N. B. 7.

Emden, R., Gaskugeln, s. N. B. 59.

Enriques, Federigo, Fragen der Elementargeometrie. Deutsche Ausgabe von Hermann Fleischer. II. Teil: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. ℳ 9.—.

Die Enthüllungsfeier des Hauck-Denkmals in der Halle des Hauptgebäudes der Technischen Hochschule zu Berlin am 14. Nov. 1906. Mit einem Bilde des Denkmals. Leipzig 1906, Teubner.

Felgenträger, W., Feinere Hebelwage, s. N. B. 37.

Fenkner, Hugo, Lehrbuch der Geometrie f. den Unterricht an höheren Lehranstalten. Mit e. Vorwort v. Krumme. In 2 Tln. 1. Teil. Ebene Geometrie. 5. verb. u. verm. Aufl. Berlin, Salle. ℳ 2.20.

Festakt der Universität Basel zur Feier des zweihundertsten Geburtstages Leonhard Eulers. Festbericht, erstattet im Auftrage E. E. Regenz der Universität von dem Rektor Professor Dr. John Meier. Basel, Universitätsbuchdruckerei.

Fischer, K. T., Vorschläge zur Hochschulausbildung der Lehramtskandidaten f. Physik. (Sonderabdruck aus: Natur u. Schule, VI. Bd.) Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ — 80.

Fischer, O., Kinematik organischer Gelenke, s. N. B. 38.

Föppl, A., Technische Mechanik, V, s. N. B. 39.

Fourrey, E., Curiosités géométriques, s. N. B. 24.

Frommel, W., Radioaktivität, s. N. B. 61.

Galle, A., Geodäsie, s. N. B. 8.

Gauss, C. Fr., Werke, VII, s. N. B. 9.

Gehrcke, E., Die Anwendung der Interferenzen ..., s. N. B. 62.

Glinzer, E., Festigkeitslehre, s. N. B. 40.

Goldscheid, Rud., Der Richtungsbegriff u. seine Bedeutung f. die Philosophie. (Sonderabdruck aus Ostwalds Annalen der Naturphilosophie, 6. Band.) Leipzig, Veit & Co.

Grotthuss, Th. v., Abhandlungen üb. Elektrizität u. Licht, s. N. B. 64.

Haeder, O., Schnell-Perspektive u. Skizzieren, s. N. B. 21.

Hagenbach, Aug., Die Stellung der Physik zu den Naturwissenschaften u. der Technik. Leipzig u. Berlin, Teubner. ℳ —.80.

Hammer, E., Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Zum Gebrauch beim Selbstunterricht u. in Schulen besonders als Vorbereitung auf Geodäsie u. sphärische Astronomie. 3. erweiterte Auflage. Stuttgart, Metzler. ℳ 10.60.

Hankel, Hermann, Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen. (Ostwalds Klassiker Nr. 153.) Hrg. v. Philip E. B. Jourdain. Leipzig 1905, Engelmann. geb. ℳ 1.80.

Hartwig, Th., Das Stereoskop ..., s. N. B. 66.

Hecker, O., Beobachtungen an Horizontalpendeln ..., s. N. B. 67.

Hecker, O., Seismometrische Beobachtungen in Potsdam in der Zeit vom 1. Januar bis 31. Dezember 1906. (Veröffentlichung des Kgl. preuß. geodät. Institutes. Neue Folge Nr. 30.) Berlin, Stankiewicz' Buchdruckerei.

Heiberg, J. L., und Zeuthen, H. G., Eine neue Schrift des Archimedes. (Sonderabdruck aus: Bibliotheca mathematica (3) 7.) Leipzig, Teubner.

Heilermann-Diekmann, Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Algebra an den höheren Schulen, neu bearbeitet von Karl Knops. I. Teil. 12. Aufl. Essen, Bädeker. geb. in Leinw. ℳ 2.25.

Helmert, F. R., Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, s. N. B. 3.

Henniger, Karl Anton, Chemisch-analytisches Praktikum, als Leitfaden bei den Arbeiten im chemischen Schullaboratorium, Ausgabe A. 2., teilweise umgearbeitete Aufl. Braunschweig, Vieweg & Sohn. ℳ 1.50; geb. ℳ 2.—.

—— dasselbe, Ausgabe B. 2., völlig umgearbeitete Auflage. Ebenda. ℳ 1.50, geb. ℳ 2.—.

Hering, K., Das 200-jährige Jubiläum der Dampfmaschine, s. N. B. 29.

Hesse, Otto, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. 4. Auflage, revidiert und ergänzt von S. Gundelfinger. Leipzig 1906, Teubner. geb. ℳ 6.—.

Heun, K., Mechanik, I, s. N. B. 41.

Hočevar, Franz, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für die unteren Klassen der Gymnasien und verwandten Lehranstalten. 6. Aufl. Wien 1906, Tempsky. K. 1.60; geb. K. 2.10.

Höhm, Ferdinand, Geometrische Anschauungslehre für die I. bis IV. Klasse der Mädchen-Lyzeen. I. und II. Wien, Tempsky. I. Teil 1 K., II. Teil 80 h.

Holzmüller, G., Elementare kosmische Betrachtungen über d. Sonnensystem, s. N. B. 11.

Jackson, Lambert Lincoln, The educational significance of sixteenth century Arithmetic from the point of view of the present time. (Contributions to Education No. 8.) New York, 1906, Teachers College, Columbia University.

Jacobi, C. G. J., Neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichung erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl von Veränderlichen. Hrsg. von G. Kowalewski. (Ostwalds Klassiker Nr. 156.) Leipzig 1906, Engelmann. geb. M 4.—.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. III. 5. Aufl., s. N. B. 12.

Junker, Fr., Höhere Analysis. 1. Tl. Differentialrechnung. (Sammlung Göschen Nr. 87.) 3., verbesserte Aufl. Leipzig 1906, Göschen. geb. M —.80.

Kerl, O., „Voranschläge" der Genauigkeit beim trigonometrischen Punkteinschalten. Diss. Berlin.

Klein, F., Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen, bearbeitet von Rud. Schimmack. Teil 1, Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig, Teubner.

Koppe-Diekmann, Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. Ausgabe für Reallehranstalten. III. Teil. 3. Aufl. bearb. von Karl Knops. Essen, Bädeker. M 3.20.

Korn, A., Elektrische Fernphotographie, 2. Auflage, s. N. B. 68.

Kübler, J., Das Gleichgewichtsverhältnis der Materie zum Weltraum und die dadurch bedingte stufenweise Entwicklung. Vortrag, gehalten in der 78. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Stuttgart 1906. Leipzig 1906, Teubner. M 1.—.

Kuenen, J. P., Die Zustandsgleichung der Gase und Flüssigkeiten ..., s. N. B. 70.

Kuhn, Fr., Fragen und Aufgaben aus dem Anfangskapitel der Planimetrie. München und Berlin 1906, Ackermann.

Kunz, J., Theoretische Physik . . ., s. N. B. 71.

Lamb, H., Lehrbuch der Hydrodynamik, s. N. B. 72.

Lanner, Alois, Neuere Darstellungen der Grundprobleme der reinen Mathematik im Bereiche der Mittelschulen. Berlin 1907, Salle. M 3.—.

Láska, W., Lehrbuch der Astronomie und mathematischen Geographie, I, s. N. B. 14.

Leon, Alfons, Die erste italienische Weltausstellung, ihr Schauplatz und ihre Vorgeschichte. Wien, Hölder.

Leon, A., Über das elastische Gleichgewicht derjenigen gleichmäßig sich drehenden Drehungskörper, deren Hauptspannungsrichtungen die Koordinatenrichtungen sind. (Aus den Sitzungsber. der kaiserl. Ak. der Wiss. Wien, Nov. 1906.) Wien 1906, Hölder.

Lesser, Oskar, Die Entwicklung des Funktionsbegriffes und die Pflege des funktionalen Denkens im Mathematikunterricht unserer höheren Schulen. (Sonderabdruck aus der Festschrift zur 50-Jahrfeier der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. 1907). Frankfurt a. M., Knauer. M 1.80.

Lorenz, H., Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder, s. N. B. 43.

Loria, Gino, Vorlesungen über darstellende Geometrie, s. N. B. 23.

Mahler, G., Physikalische Formelsammlung, s. N. B. 75.

Maillet, Edmond, Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 12.—.

Mair, David, A school course of Mathematics. Oxford, Clarendon Press. 3 s. 6 d.

Malina, Franz, Über Sternbahnen und Kurven mit mehreren Brennpunkten. Wien, Seidel & Sohn. M 1.—.

Massau, J., Discours sur les ballons dirigeables suivi d'une note sur l'aviation. (Extrait des Ann. de l'Ass. des Ing. sortis des Écoles spéciales de Grand (3) 2, p. 357.) Mons 1904.

Massau, J., Note sur les pièces chargées de bout. (Extrait des Ann. des l'Ass. des Ing. sortis des Écoles spéciales de Gand t. 3 (1904), 3e fasc.) Mons 1905.

Meyer, K., Naturlehre (Physik und Chemie) für höhere Mädchenschulen, Lehrerinnen-Seminare und Mittelschulen. 4., verb. und verm. Auflage. Leipzig 1906, Freytag. geb. ℳ 2.20.

Meyer, Rudolf, Kleines mathematisches Wörterbuch in 2 Teilen. I. Russisch-Deutsch. II. Deutsch-Russisch. Dorpart 1906, Schledt.

Meyerhoffer, W., Gleichgewichte der Stereomeren, s. N. B. 76.

Meyermann, Br.. Vermessung der Umgebung des Orionnebels, s. N. B. 15.

Mie, G., Moleküle, Atome, Weltäther, s. N. B. 77.

Minkowski, Hermann, Diophantische Approximationen, eine Einführung in die Zahlentheorie. (Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen: II.) Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. ℳ 8.—.

Müller, Heinrich, Einführung in die Differential- und Integralrechnung. Zum Gebrauch an höheren Schulen. Leipzig und Berlin, Teubner. kart. ℳ 1.20.

Nafravnik, Franz, Vollständig gelöste Maturitätsaufgaben aus der Mathematik. Für Schüler der obersten Klassen an Realschulen und Gymnasien, sowie zum Selbststudium. Wien und Leipzig, Deuticke.

Nilsen, Niels, Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten. Leipzig 1906, Teubner. ℳ 3.60.

Nušl, Fr. et Frič, Josef Jan, Deuxième étude sur l'appareil circumzénithal. (Bull. international de l'Acad. des sc. de Bohême, 1906.) Prag 1906.

Osgood, W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie. (Teubners Sammlung Bd. XX: 1.) I 2. Leipzig, Teubner. ℳ 7.60.

Petronievics, Branislav, Die typischen Geometrien und das Unendliche. Heidelberg, Winter. ℳ 3.—.

Picard, Émile, et Simart, Georges, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. T. II. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 18.—.

Poincaré, H., Leçons de mécanique céleste, s. N. B. 16.

Pollack, Walter, Über die philosophischen Grundlagen der wissenschaftlichen Forschung, als Beitrag zu einer Methodenpolitik. Berlin, Dümmler. ℳ 2.50; geb. ℳ 3.50.

Richert, Paul, Die ganzen rationalen Funktionen der ersten drei Grade und ihre Kurven. Exponentialreihen höherer Grade. Progr. 3. Realschule Berlin. Berlin, Weidmann. ℳ 1.—.

Richter, O., Dreistellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, s. N. B. 96.

Righi, A., La moderna teoria dei fenomini fisici, s. N. B. 83.

Riollot, J., Les carées magiques, s. N. B. 105.

Rohrbach, C., Sternkarten in gnomonischer Projektion, s. N. B. 17.

Salmon, George, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Wilhelm Fiedler. 7. Auflage. 1. Teil. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. ℳ 10.—.

Schacht, J., Zur Energielehre im physikalischen Unterricht, s. N. B. 86.

Schafheitlin, Paul, Synthetische Geometrie der Kegelschnitte, für die Prima höherer Lehranstalten bearbeitet. Leipzig und Berlin, Teubner. geb. ℳ 1.80.

Scheele, Fritz, Über die Dandelinschen Kugeln. Progr. 10. Realschule Berlin. Berlin, Weidmann. ℳ 10.—.

Schlink, W., Statik der Raumfachwerke, s. N. B. 46.

Schubert, H., Mathematische Mußestunden, s. N. B. 106.

Schubert, Hermann, und Schumpelick, Adolf, Arithmetik für Gymnasien. Zugleich fünfte Auflage von Schuberts Sammlung von Aufgaben usw. 1. Heft: Für mittlere Klassen. Leipzig, Göschen. brosch. ℳ 1.80; geb. ℳ 2.25.

—— Ausgewählte Resultate zur Arithmetik für Gymnasien. Erstes Heft. Ebenda. ℳ —.60.

SCHÜLKE, A., Differential- und Integralrechnung im Unterricht. Leipzig und Berlin, Teubner. ℳ 1.—.

SCHUSTER, A., — KONEN, H., Einführung in die theoretische Optik, s. N. B. 87.

SEEMANN, A., Schieberdiagramme, s. N. B. 47.

SERRET, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung. 3. Auflage, bearbeitet von Georg Scheffers. 1. Bd. Differentialrechnung. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. ℳ 13.—.

SICKENBERGER, A., Übungsbuch zur Algebra. 1. Abteilung. 5. Aufl., bearbeitet von Alexander Schmid. München 1906, Ackermann.

SLABY, A., Otto von Guericke, s. N. B. 31.

SOMMER, J., Vorlesungen über Zahlentheorie. Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Leipzig und Berlin, Teubner. geb. in Leinw. ℳ 11.—.

STEPHAN, P., Die technische Mechanik, II, s. N. B. 48.

Sternkörper, Abhandlungen über die regelmäßigen. Abhandlungen von L. Poinsot (1809), A. L. Cauchy (1811), J. Bertrand (1858), A. Cayley (1859), übersetzt und herausgegeben von Robert Haußner. (Ostwalds Klassiker Nr. 151.) Leipzig 1906, Engelmann. geb. ℳ 2.80.

Technik und Schule. Beiträge zum gesamten Unterrichte an technischen Lehranstalten. Herausgegeben von M. Girndt. I. Band, 3. Heft. Leipzig und Berlin, Teubner. ℳ 1.60.

THIEME, HERM., Leitfaden der Mathematik für Gymnasien. 1. Teil: Die Unterstufe. 3. Auflage. Leipzig, Freitag. geb. ℳ 1.60.

THIEME, H., Leitfaden der Mathematik für Gymnasien. II., Die Oberstufe. 2. Auflage. Wien, Tempsky. geb. ℳ 1.60.

TÖPLER, A., Beobachtungen nach einer neuen optischen Methode, s. N. B. 89.

TÖPLER, A., Beobachtungen nach der Schlierenmethode, s. N. B. 90.

TREUTLEIN, P., Mathematische Aufgaben aus den Reifeprüfungen der badischen Mittelschulen. (Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen.) I. Teil: Aufgaben. Leipzig und Berlin, Teubner. geb. ℳ 2.80.

ULRICH, GEORG, Der Begriff des Raumes. Progr. 7. Realschule Berlin. Berlin, Weidmann. ℳ 1.—.

VATER, R., Die neueren Wärmekraftmaschinen, s. N. B. 91.

VEBLEN, OSTWALD and LENNES, N. J., Introduction to infinitesimal Analysis. Functions of one real variable. New York, Wiley & Sons. Cloth. $ 2.—.

VOLK, K. G., Die Elemente der neueren Geometrie, unter besonderer Berücksichtigung des geometrischen Bewegungsprinzips. Für die oberen Klassen höherer Lehranstalten und zum Selbststudium. Leipzig und Berlin, Teubner. kart. ℳ 2.—.

WANGERIN, A., Franz Neumann, s. N. B. 32.

WEBER, H., und WELLSTEIN, J., Encyklopädie der Elementar-Mathematik, III, s. N. B. 107.

WEINSTEIN, B., Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften, s. N. B. 108.

WEITBRECHT, W., Ausgleichungsrechnung, s. N. B. 4.

WEYRAUCH, J. J., Grundriß der Wärmetheorie, II, s. N. B. 92.

WHITEHEAD, A. N., The Axioms of Descriptive Geometry. (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics Nr. 5). Cambridge, University Press. 2 s. 6 d.

WINTER, W., Stereometrie. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. 4. Aufl. München 1906, Ackermann.

WITTENBAUER, F., Aufgaben aus der technischen Mechanik, I, s. N. B. 49.

# Abhandlungsregister 1905—1906.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

## Abkürzungen.

A.A.E.I. Atti dell' Associazione elettrica italiana, Torino 9—10.
A.A.K. Astronomische Abhandlungen, Kiel 8; 10.
A.A.M.V. Annuario astrometeorologico, Venezia 21.
A.A.N. Atti della R. Accad. delle Scienze fisiche e matem., Napoli (2) 12.
A.A.P. Atti della R. Accad. di Scienze, Lettere e Arti, Padova (3) 6.
A.A.P.L. Archiv für Anatomie u. Physiologie, Leipzig 1903.
A.A.P.M. Atti dell' Accad. Peloritana, Messina 16—17; 20.
A.A.P.N. Atti dell' Accademia Pontaniana, Napoli (2) 10.
A.A.T. Atti della R. Accad. di Scienze, Torino 40.
A.A.W. Anzeiger der k. k. Akad. der Wissensch., Wien 1905—06.
A.B.A. Abhandlungen der K. Preuß. Akad. der Wissensch., Berlin 1904.
A.C.J. American Chemical Journal, Baltimore 34—36.
A.C.P. Annales de Chimie et de Physique, Paris (8) 6—8.
A.C.P.M. Atti dei Congressi dei Professori di Matematica, Livorno 2.
A.D.M. Annali di Matematica pura ed applicata, Milano (3) 11—12.
A.D.P.N. Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaft, Berlin 2.
A.D.S.H. Aus dem Archiv der deutschen Seewarte, Hamburg 28.
A.E.N. Annales de l'École normale supérieure, Paris (3) 22—23.
A.E.N.Y. The American Electrician, New-York 17.
A.F. Comptes Rendus de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, Paris 1905.
A.F.G.P. Archiv für die gesamte Physiologie, Bonn 91.
A.F.S. Acta Societatis fennicae, Helsingfors 29; 33.
A.F.S.P. Archiv für Schulpraxis, Paderborn 6.
A.G.C. Atti dell' Accademia Gioënia di Scienze naturali, Catania (4) 18.
A.G.G. Abhandlungen der K. Gesellsch. der Wissensch., Göttingen (2) 4.
A.G.G.W. Abhandl. der Geograph. Gesellschaft, Wien 6.
A.G.L. Abhandl. der K. Sächs. Gesellschaft der Wissensch., Leipzig 29.
A.G.L.J. The American Gas Light Journal, New-York 82.
A.G.M.W. Abhandl. zur Geschichte der math. Wissenschaften, Leipzig 18.
A.Gr. Archiv der Mathem. und Physik, Leipzig (3) 9—10.
A.H. Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Hamburg 33—34.
A.H.G. Annales hydrographiques, Paris 25—26.
A.H.M.C. Anales hidrograficos de marina, Chile 24.
A.J. American Inventor, Washington 7—9.
A.I.V. Atti dell' Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia 34.
A.J.B. The Astronomical Journal, Boston 24—25.
A.J.C. The Astrophysical Journal, Chicago. 21—24.
A.J.M. The American Journal of Mathematics, Baltimore 28.
A.J.P.W. The American Journal of Psychology, Worcester Mass. 14.
A.J.S. The American Journal of Science, New Haven, (4) 19; 21; 22.
A.J.W. Assekuranzjahrbuch, Wien 1905.
A.K. Aktuaren, Kjöbenhavn 1.
A.M. Acta Mathematica 29—30.
A.M.A.F. Arkif för Mathem., Astronomie och Fysik, Stockholm 2—3.

**A.M.C.** Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Kristiania 25; 27.
**A.M.S.G.** Astronom. Mitteil. der K. Sternwarte Göttingen 9; 10; (2) 3.
**A.M.T.** Archives du Musée Teyler, Haarlem (2) 9—10.
**A.N.** Archives Néerlandaises, Haarlem (2) 10—11.
**A.N.G.G.** Abhandl. der naturforsch. Gesellschaft, Görlitz 25.
**A.N.K.** Astronomische Nachrichten, Kiel 169—172.
**A.N.L.** Annalen der Naturphilosophie, Leipzig 4—5.
**A.N.P.** L'Aéronaute, Paris 35.
**A.O.** Archives d'Ophthalmologie, Paris 1901.
**A.ofM.** Annals of Mathematics, Cambridge Mass. (2) 7—8.
**A.P.B.** Bulletin der K. K. Akad. der Wissensch., Petersburg (5) 18—22.
**A.P.L.** Annalen der Physik, Leipzig (4) 17—20.
**A.P.M.** Mémoires der K. K. Akad. der Wissensch., Petersburg (8) 14; 16; 17.
**A.P.T.** Archiv für Post und Telegraphen, Berlin 30; 1905.
**A.S.A.** Anales de la Sociedad cientifica Argentina, Buenos Ayres 60—61.
**A.S.A.P.** Annaes Scientificos de Academia polytechnica, Porto 1.
**A.S.B.** Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Louvain 29—30.
**A.S.G.** Archives des Sciences physiques et Naturelles, Genève (4) 16; 19—22.
**A.S.J.C.** Anuario de Santiago de Chile 3.
**A.S.M.F.** Annales de la Société météorologique de France 53—54.
**A.S.U.J.** Annales Scientifiques de l'Université, Jassy 3—4.
**A.T.** Annales de la faculté, Toulouse (2) 7—8.
**A.T.I.L.** Archives trimestrielles de l'Institut Grandducal, Luxembourg 1906.
**A.T.B.P.** Annales des Travaux publiques de Belgique, Bruxelles 62; 1905.
**A.U.G.** Annales de l'Université, Grenoble 17.
**A.U.L.** Universitets Arskrift, Lund 40; (2) 1.
**A.V.A.** Archief voor Verzekeringswetenschap, Amsterdam 7.
**A.Z.** Allgemeine Zeitung, Beilage, München 1905.
**A.Z.B.** Apothekerzeitung, Berlin 18.
**B.A.** Bulletin astronomique, Paris 22—23.
**B.A.B.** Bulletin de l'Académie Roy. des Sciences, des Lettres et des Beaux Arts, Bruxelles 1905—06.
**B.A.Co.** Oversigt af K. Danske Videnskabs Selskabet, Kjöbenhavn 1905.
**B.A.G.** Beiträge zur alten Geschichte, Leipzig 1.
**B.A.G.S.** Bulletin of the American Geographical Society, New York 38.
**B.A.J.V.C.** Bulletin de l'Assemblée des Ingénieurs des Voies de Communications, Petersburg 1903.
**B.B.L.** Bolletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche, Genova 9.
**B.B.S.P.** Bote und Bibliothek zur Selbstausbildung, Petersburg 3.
**B.B.S.W.** Bulletin of the Bureau of Standards, Washington 1—2.
**B.C.J.M.P.** Boletin del Cuerpo de Ingenieros de Minos del Peru, Lima 33.
**B.C.N.** Bolletino del Collegio dei Ingegneri ed Architetti, Napoli 20.
**B.C.Z.** Biochemische Zeitschrift 1.
**B.D.** Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris (2) 29—30.
**B.D.G.J.** Boletin da Direcção geral da Instrucção publica, Lisboa 4.
**B.D.M.** Bolletino di Matematica, Bologna 4—5.
**B.F.F.** Öfversigt af Finska Vetenskaps Societetens Förhandlingar, Helsingfors 46.
**B.G.C.** Bolletino delle Sedute dell' Accademia Gioënia, Catania 89.
**B.G.H.D.** Bulletin de Géographie historique et descriptive, Paris 1902.
**B.G.L.** Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissensch., Leipzig 57.
**B.G.Z.** Badische Gewerbezeitung, Karlsruhe 36.
**Bi.** Biometrica, Cambridge 4.
**B.I.C.** Bulletin international de l'Académie des Sciences, Krakau 1905—06.
**B.I.G.B.** Bayr. Industrie- und Gewerbeblatt, München 1905.
**B.I.P.P.** Bulletin de l'Institut polytechnique, Petersburg 1.
**B.L.B.** Bulletin de Laboratoire biologique, Petersburg 6.
**B.Li.O.** Bulletin ot the Lick Observatory, Lick, Calif. 75.
**B.L.O.** Bulletin of Laws Observatory, Laws Missouri 5.
**B.M.** Bibliotheca mathematica, Leipzig (3) 6.
**B.M.B.** Der Baumeister, Berlin 1.
**B.M.E.** Bulletin des Sciences mathém. et physiques élémentaires, Paris 10 bis 11.
**B.M.S.M.I.** Bolletino mensile della Società meteorologica italiana, Torino (2) 22; 24; 1904—06.

**B.P.A.** Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, Straßburg 1—2.
**B.S.B.A.** Bulletin de la Société Belge d'Astronomie, Bruxelles 10—11.
**B.S.C.I.** Bulletin de la Société des Sciences de la Charente Inférieure, La Rochelle 1901.
**B.S.C.P.** Bulletin de la Société Chimique de France, Paris (3) 25.
**B.S.F.P.** Bulletin de la Société française de Physique. Paris 1905—06.
**B.S.G.I.** Bolletino della Società geografica italiana, Roma, 1906.
**B.S.I.E.** Bulletin de la Société internationale d'Électriciens, Paris (2) 5—6.
**B.S.I.M.** Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse 1905.
**B.S.M.F.** Bulletin de la Société Mineralogique de la France, Paris 26.
**B.S.R.A.** Bulletin de la Société Russe d'Astronomie, Petersburg 10—11.
**B.S.S.I.** Bolletino della Società sismologica italiana, Roma 8.
**B.S.S.N.F.** Bulletin de la Société des Sciences Naturelles, Fribourg 11.
**B.S.V.** Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles, Lausanne (5) 31; 41.
**B.T.A.M.** Bulletin technologique de la Société des anciens Élèves des Arts et Métiers, Paris 2.
**B.U.K.** Universitätsnachrichten, Kiew 1905.
**B.U.P.** Bulletin of the University, Princeton 13.
**B.U.V.** Universitätsnachrichten, Warschau 1903.

**C.** Casopis, Prag 35.
**C.A.A.** Verslagen der Zittingen der K. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam 14.
**C.A.E.** Zentralblatt für Akkumulatoren- und Elementenkunde, Halle 7.
**C.B.** Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft, Berlin, 38—39.
**C.C.E.** Cronache delle Civiltà elleno-latina, Roma 1.
**C.E.T.** Canadian Engineer, Toronto 1901—02.
**C.M.N.Y.** Cassiers Magazine, New York 21.
**C.N.** The Chemical News, New York 92—93.
**Co.** Cosmos, Paris 47—48.
**C.P.L.** Communications from the Physical Laboratory of the University, Leiden 85.
**C.R.** Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences, Paris 141 bis 143.
**Cr.** Journal für reine und angewandte Mathematik, Berlin 129.
**C.T.B.** Ciel et Terre, Bruxelles 1902—03.
**C.T.L.** Czasopismo techniczne, Lemberg 21—23.

**D.A.W.** Denkschriften der K. K. Akademie der Wissensch., Wien 77.
**D.F.Z.** Deutsche Forstzeitnng, Neudamm 16—17.
**D.M.** Der Mechaniker, Berlin 14.
**D.M.Z.** Deutsche Mechanikerzeitung, Berlin 1902—03; 1906.
**D.R.** Deutsche Revue, Stuttgart 30.
**D.T.Z.** Deutsche Töpfer- und Zieglerzeitung, Berlin 33.
**D.T.Z.B.** Deutsche Technikerzeitung, Berlin 22.
**D.V M.** Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Leipzig 14 bis 15.
**D.V.N.** Verhandlungen der deutschen Naturforscherversammlung, Leipzig 77.
**D.W.B.** Das Weltall, Berlin 5—6.
**D.Z.R.** De Zee, Rotterdam 26—27.

**E.B.** Emporium, Bergamo 15—16.
**E.B.B.** Elektrische Bahnen u. Betriebe, München 1.
**E.B.R.** Engineering and Building Record, New York 51—52.
**E.C.** The Engineer, Chicago 42.
**E.C.I.** Elektrochemical Industry 4.
**E.C.Z.** Elektrochemische Zeitschrift, Berlin 12—13.
**E.E.L.** The electrical Engineer, London 35—36.
**E.M.** L'Enseignement mathématique, Paris 7—8.
**E.M.J.** The Engineering and Mining Journal, New York 80.
**E.M.L.** Electrical Magazine, London 4.
**E.M.N.** The Engineering Magazine, New York 24.
**E.M.W.** The English Mechanic and World of Science, London 80—82.
**E.P.** Electricestvo, Petersburg 23; 29.
**E.R.** Electrical Review, London 40; 47; 56; 57.
**E.R.L.** Engineering Review, London 12.
**E.R.N.Y.** Electrical Review, New York 46—47.
**E.T.** Educational Times, London 56—57.
**E.T.K.** Elektrisk Tidskrift, Kristiania 16.
**E.T.L.** Electrical Times, London 21—22.
**E.T.R.** Elektrotechnische Rundschau, Frankfurt a. M. 22.
**E.W.L.** Erdbebenwarte, Laibach 1; 3.

**F.M.** Annales de la Faculté, Marseille 15.
**F.T.K.** Fysiskt Tidskrift, Kjöbenhavn 3—4.

**G.B.** Giornale di Matematiche. Napoli 43.
**G.B.H.** Gewerbeblatt für das Großherzogtum Hessen, Darmstadt 66.

G.E. Glückauf, Essen 41.
G.J. Geographical Journal, London 23 bis 24.
G.K.B. Gartenkunst, Berlin 5.
G.L. Gaea, Leipzig 39.
G.M.B. Gaceta matematica, Bucuresci, 11—12.
G.M.T. Gasmotorentechnik, Berlin 2—4.
G.Z. Geographische Zeitschrift, Leipzig 10.
G.Z.B. Gießereizeitung, Berlin 2.

H.A. The horseless Age, New York 16.
H.E.B. Himmel und Erde, Berlin 18.
H.H. Hansa, Hamburg 42.
H.T.B. Hydrotekt, Berlin 2.
H.V.C. Handelungen van Vlaamsch Natuur- en Geneeskundig Congress 1900; 1901; 1903; 1904.

I. Időrjaras, Budapest 9.
I.B. L'Industrie, Bruxelles 1901.
I.C.T. L'Ingegneria civile e le Arti industriali, Torino 28.
I.E.P. L'Industrie électrique, Paris 11; 14; 15.
I.I.M. Ingegneria e Industria, Milano 10; 16.
I.K. Ingeniören, Kjöbenhavn 12—13.
I.W. Ingenieur Weekblad, s'Gravenhage 18—20.
I.Z.K. Illustrierte Zeitschrift für Kleinbahnen und Straßenbahnen, Berlin 9.

J.A.C.S. Journal of the American Chemical Society, Laston 89.
J.A.E.S. Journal of the Association of Engineering Societies, Philadelphia 26; 28.
J.B.A.A. Journal of the British Astronomical Association, London 15.
J.B.H. Jahrbuch für Berg- und Hüttenwerke in Sachsen, Freiberg 1903.
J.C.P. Journal de Chimie et de Physique, Paris 3—4.
J.C.S. Journal of the Chemical Society of London 87; 89.
J.D.S. Journal des Savants, Paris 1906.
J.E.P. Journal de l'École Polytechnique, Paris (2) 10.
J.E.S.T. Journal of the Electrical Society, Tokyo 1903.
J.F.I. Journal of the Franklin Institution, Philadelphia 153; 156; 159—161.
J.G.C. Journal of Geography, Chicago 2.
J.G.L. Journal of Gaslighting, London 89—91.
J.I.A. Journal of the Institute of Actuaries, London 38—39.
J.E.E. Journal of the Institute of Electric Engineers, London 35.
J.M. Journal de Mathématiques pures et appliquées, Paris (6) 1.
J.M.P. Journal des Mines, Petersburg 78.
J.N.K. Jahresbericht des Naturwiss. Vereins, Krefeld 1905—06.
J.P. Journal de Physique théorique et appliquée, Paris (4) 4—5.
J.P.C. The Journal of Physical Chemistry, Ithaca 9—10.
J.P.R. Jahrbuch für Photographie und Reproduktionstechnik, Halle 19.
J.P.V.F. Jahresbericht des Physik. Vereins, Frankfurt a. M. 1900—01; 1904—05.
J.Q.C. Journal of the Quckett Microscopical Club, London 9.
J.R.A. Journal of the Royal Artillery, Woolwich 32.
J.R.E. Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, Leipzig 2—3.
J.R.M.S. Journal of the Royal Microscopical Society, London 1905.
J.R.P.C.G. Journal der Russ. Physikochemischen Gesellschaft, Petersburg 34—35.
J.S.G. Jahresberichte der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur, Breslau 83.
J.S.M.S. Journal of the Scottish Meteorological Society, Edinburgh (3) 22.
J.U. Jahreshefte des Vereins für math. Naturwissensch., Ulm 12.
J.U.T. Journal of the College of Science, Tokyo 20—21.
J.W.S.E. Journal of the Western Society of Engineers, Chicago 8.
J.Z.M.E. Jahrbuch der Zentralanstalt für Erdmagnetismus, Wien (2) 40.

K.K. Kriegsjaa, Kristiania 26.
Kn.L. Knowledge, London (2) 2.
K.W. Die Kultur, Wien 4.
K.Z. Kriegstechnische Zeitschrift, Berlin 8.

L.E.P. L'Électricien, Paris 30.
L.M.G. La Machine, Genève 5.

M.A. Mathematische Annalen, Leipzig 59—60.
M.A.A. Verhandelingen van de R. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam 9.
M.A.C.M. Memorias de la Real Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales, Madrid 23.
M.A.G. Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens, Wien 23—24; 32.
M.A.G.S. Mitteilungen aus dem Gebiete des Seewesens, Pola 33.
M.A.Ly. Mémoires de l'Académie des Sciences, Lyon (3) 8.
M.A.M. Memorie della R. Accad. delle Scienze, Modena (3) 5.

**M.A.S.** Memoirs of the Royal Astronomical Society, London 57.
**M.A.T.** Memorie della R. Accademia delle Scienze, Torino (2) 55.
**M.A.T.P.** Abhandlungen der K. K. Tschechischen Franz-Joseph-Akademie, Prag 1905.
**M.B.H.** Marineblad, Helder 20.
**M.C.K.** Memoirs of the College of Science and Engineering, Kyoto 1.
**M.D.L.** Mitteilungen der Deutschen Landwirtschaftsgesellschaft, Berlin 20.
**M.E.C.** Mitteilungen der Erdbebenkommission der K. K. Akad., Wien (2) 14.
**M.Eg.** Marine Engineering, London 10.
**M.F.I.** Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Berlin 29—31; 33.
**M.F.L.** Mitteilungen aus Finsens medicin. Lysinstitut, Kjöbenhavn 2.
**M.G.** Metallographist, Boston 6.
**M.G.G.M.** Mitteilungen der Geograph. Gesellschaft, München 1.
**M.G.S.** Mathematical Gazette, Stroud 3.
**M.H.** Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien 16.
**M.H.P.** Mémoires d'Hydrographie, Petersburg 24.
**M.I.** Moniteur industriel, Charleroi 1902.
**M.I.B.** Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto, Bologna (6) 2.
**M.K.L.** Monatsschrift für katholische Lehrerinnen, Paderborn 1904.
**M.L.** Muzeum, Lemberg 19.
**M.M.** The Messenger of Mathematics, London (2) 35.
**M.M.F.** The American Math. Monthly, Springfield 12—13.
**M.M.G.I.** Mitteilungen des Militärgeographischen Instituts, Wien 22; 24.
**M.M.P.** Messager météorologique, Petersburg 1903.
**M.N.A.S.** Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, London 65—66.
**M.N.I.** Meddelanden från R. Vetenskaps Akademiens Nobel Institut, Stockholm 1.
**Mon.** The Monist, New York 14.
**M.P.G.Z.** Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft, Zürich 1906.
**M.P.L.** Mathematikai és physikai Lapok, Budapest 11; 13.
**M.P.M.** Natuur- en geneeskundig Congres 10.
**M.R.B.** Marine-Rundschau, Berlin 1906.
**M.S.** Mitteilungen des Naturwissensch. Vereins von Steiermark, Graz 42.
**M.S.It.** Memorie della Società Italiane detta dei XL, Roma (3) 13—14.
**M.S.L.** Mémoires de la Société Royale des Sciences, Liège (8) 2.
**M.S.M.T.** Mémoires de la Section militaire topographique de l'État-major, Petersburg 59.
**M.S.O.** Denkschriften der Math. Abteilung der Neuruss. Gesellschaft, Odessa 28.
**M.S.R.M.** Mémoires de la Société Russe de Mineralogie, Petersburg (2) 42.
**M.S.S.I.** Memorie della Società dei Spettroscopisti Italiani, Catania 33—34.
**M.T.E.** Mathematikai és természettudományi értesitő, Budapest 21; 23; 24.
**M.T.M.** Il Monitore tecnico, Milano 8.
**M.V.A.P.** Mitteilungen von Freunden der Astronomie und Kosmischen Physik, Berlin 15—16.
**M.V.E.D.** Mitteilungen der Vereinigung für Erdkunde, Dresden 1906.
**M.V.N.** Meddelanden från K. Vetenskaps Akademiens Nobelinstitut, Stockholm 1.
**M.V.N.I.** Mededelingen en Verhandelingen van het Kon. Nederland. Meteorolog. Instituut, Amsterdam 1906.
**M.W.B.** Motorwagen, Berlin 5—6; 8.
**M.W.M.** The Mechanical World, Manchester 37—38.
**M.W.R.** Monthly Weather Review, Washington 28; 30—31; 33—34.
**M.yR.M.** Memorias y Revista de la Sociedad Cientifica „Antonio Alzate" Mejico 19—20; 22—23.
**M.Z.** Meteorologische Zeitschrift, Wien 22—23.
**N.** Nature, London 72—74.
**N.A.** Nouvelles Annales de Mathématiques, Paris (4) 5—6.
**N.A.U.** Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum, Upsala (4) 1.
**N.A.W.** Nieuw Archief voor Wiskunde Amsterdam (2) 7.
**N.B.** Naturen, Bergen 27.
**N.C.A.** The nineteenth Century and After, London 57.
**N.C.P.** Il Nuovo Cimento, Pisa (5) 10—11.
**N.F.P.** Neue freie Presse, Wien 1905.
**N.F.W.** Naturfreund, Witten 1905.
**N.G.G.** Nachrichten von der K. Gesellsch. der Wissenschaften, Göttingen 1905.
**N.J.M.** Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie, Stuttgart 21.
**N.L.A.** Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Roma 58.
**N.M.B.** Naturwissensch. Mitteilungen, Budapest 35.
**N.M.L.** Nautical Magazine, London 74.
**N.O.** Natur und Offenbarung, Münster 48; 51.

**N.R.** Naturwissenschaftliche Rundschau, Braunschweig 20—21.
**N.T.N.I.** Natuurkundig Tijdschrift voor Nederland. Indië, Batavia 65.

**O.** The Observatory, London 28.
**Ö.C.Z.** Österreichische Chemikerzeitung, (2) 8—9.
**Ö.W.Ö.B.** Österreichische Wochenschrift für den Öffentlichen Baudienst 10—11.
**Ö.Z.Z.O.M.** Österreichische Zentralzeitung für Optik u. Mechanik, Wien 1.

**P.** Prometheus, Berlin 14; 15; 17.
**P.A.** Popular Astronomy, Northfield 13—14.
**P.A.Bo.** Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, Boston 41—42.
**P.A.I.E.E.** Proceedings of the American Institution of Electrical Engineers, New York 24.
**P.A.M.D.R.** Publikationen des Astronomisch-Meteoronomischen Observatoriums, Rostock 3.
**P.A.S.C.E.** Proceedings of the American Society of Civil Engineers, New York 31.
**P.A.S.F.** Publications of the Astronomical Society for the Pacific, San Francisco 17.
**P.C.P.S.** Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge 13.
**P.E.M.S.** Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Edinburgh 23.
**P.E.S.W.P.** Proceedings of Engineers Society of Western Pennsylvania, Pittsburg 17.
**P.F.W.** Przeglad filozof. Warszawa 5.
**P.G.R.** Schriften der Physikalisch-Ökonomischen Gesellschaft, Königsberg 46.
**P.G.M.** Petermanns Geographische Mitteilungen, Gotha 50; 52.
**P.I.A.S.** Proceedings of the Iowa Academy of Science, Des Moines 9—10.
**P.I.M.E.** Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, London 1905.
**P.I.S.F.** Publicazioni del R. Instituto di Studi superiori pratici e di Perfezionamento in Firenze, Arcetri 19.
**Pit.** Il Pitagora, Palermo 12.
**P.J.G.** Preisschriften der Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig 37.
**P.L.M.S.** Proceedings of the London Mathematical Society, London (2) 3.
**P.M.** Philosophical Magazine, London [illegible] 11.
**P.M.C.E.** Proceedings of the incorporated Association of Municipal and County Engineers, London 31.

**P.M.J.M.** Physikomathemat. Jahrbuch, Moskau 2.
**P.M.R.** Periodico di Matematica, Livorno (3) 3.
**P.N.I.** Proceedings of the United States Naval Institution, Annapolis M. D. 30.
**Pol.** Il Politecnico, Milano 50.
**P.P.S.** Proceedings of the American Philosophical Society, Philadelphia 45.
**P.P.S.L.** Proceedings of the Physical Society, London 19—20.
**P.R.** The Physical Review, New York 21—23.
**P.R.I.** Proceedings of the Royal Institution of Great Britain, 17.
**P.R.I.P.** Pubblicazioni del R. Osservatorio Palermo (2) 1.
**P.R.S.E.** Proceedings of the Royal Society, Edinburgh 24—26.
**P.R.S.L.** Proceedings of the Royal Society, London 74; 76—78.
**P.S.B.** Procès-verbaux de la Société des Sciences, Bordeaux 1904—05.
**P.S.D.** Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society, Dublin (2) 11.
**P.S.M.** Popular Science Monthly, New York 63—64.
**P.T.M.** Summary of the Proceedings of the Tokyo Physicomath. Society, Tokyo 2—3.
**P.T.R.S.C.** Proceedings and Transactions of the Royal Society of Canada, Montreal (2) 11.
**P.T.W.** Przeglad technicki, Warszawa 41—43.
**P.U.B.** Princeton University Bulletin 13—14.
**P.W.L.** Pages Weekly, London 7.
**P.Z.** Physikalische Zeitschrift, Göttingen 6—7.
**P.Z.B.** Pädagogische Zeitung, Berlin 30—31.

**Q.J.** Quarterly Journal of Mathematics, London 36.
**Q.J.M.S.** Quarterly Journal of the Meteorological Society, London 31—32.

**R.A.** Revue d'Artillerie, Paris 67.
**R.A.A.** Reports of the Australasian Association for the Advancement of Science, London 9—10.
**R.A.G.** Rivista di Artigleria e Genio, Roma 1905.
**R.A.L.R.** Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, Roma (5) 15.
**R.A.M.** Revista de la Reale Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales, Madrid 1; 3.
**R.A.N.** Rendiconti della Reale Accademia delle Scienze, Napoli (3) 11—12.
**R.A.T.T.** Revue Ac. Trav. Tamines 1902.

**R.B.A.** Reports of the British Association for the Advancement of Science 75.
**R.C.L.** Revista de Ciencias, Lima 9.
**R.C.M.P.** Rendiconti del Circolo matematico, Palermo 20—22.
**R.E.** The Railway Engineer, London 26.
**R.F.H.I.** Report of the Fishery and Hydrographical investigations on the North Sea, London 1902—03.
**R.F.M.** Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali, Pavia 6—7.
**R.G.O.** Revue générale des Sciences, Paris 16—17.
**R.I.B.** Rendiconti delle Sessioni dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto, Bologna (2) 9.
**R.I.I.** Recueil de l'Institut des Ingénieurs de Voies de Communication, Petersburg 60.
**R.I.P.** Revue industrielle, Paris 36.
**R.I.R.** Rivista d'Italia, Roma 1902.
**R.I.Z.** Riga'sche Industriezeitung, Riga 31.
**R.M.B.** Revista maritima brazileira, Rio de Janeiro 1906.
**R.M.M.** Revue de Métaphysique et de Morale, Paris 13—14.
**R.M.R.** Rivista marittima, Roma 38.
**R.M.S.** Revue de Mathématiques spéciales, Paris 15—16.
**R.N.** Revue néphologique, Bruxelles 1906.
**R.P.W.** Revue de Physique, Warschau 3.
**R.S.** Revue Scientifique, Paris (5) 3—6.
**R.S.M.** Sammelschrift der Sewtschenkogesellschaft der Wiss., Lemberg 10.
**R.T.E.B.** Rivista elettrotecnica emiliana, Bologna 5.
**R.T.I.** Rivista tecnica italiana, Rom 3.
**R.T.M.** Rassegna tecnica, Messina 2; 5.
**R.T.P.** La Revue technique, Paris 26.
**R.T.T.** Rivista tecnica, Torino 2.
**R.U.M.** Revue universelle des Mines, Liège 10; 12.

**S.** Science, New York (2) 22—24.
**S.A.** Scientific American, New York 89.
**S.A.B.** Sitzungsberichte der K. Preuß. Akad. der Wissensch., Berlin 1905—06.
**S.A.M.** Sitzungsberichte der math. phys. Klasse der K. Bayr. Akademie der Wissenschaften, München 35.
**S.A.W.** Sitzungsber. der math. naturw. Klasse der K. K. Akad. der Wissenschaften, Wien 114.
**S.F.P.** Société Française de Physique, Paris 235—238; 240—243; 245—250.
**S.G.B.** Sitzungsberichte der K. Böhm. Gesellsch. der Wissensch, Prag 1905.
**S.G.M.** Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaft, Marburg 1905.
**S.G.W.** Sitzungsber. der physik.-medizinischen Gesellschaft, Würzburg 1905.
**S.I.** Annual Reports of the Smithsonian Institution, Washington 1904.
**S.I.D.** Sitzungsberichte der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis, Dresden 1906.
**S.I.I.** Steven's Institute Indicator, Hoboken 18—19.
**S.L.** Sirius, Leipzig 38.
**S.M.** Bulletin de la Société Mathématique de France, Paris 33—34.
**S.M.Am.** Bulletin of the American Math. Society, New York 12.
**S.M.B.** Sitzungsber. der Berliner Math. Gesellschaft, Berlin 1906.
**S.M.H.** Mitteilungen der Math. Gesellschaft Hamburg 4.
**S.M.M.** Sammelschrift der Math. Gesellschaft, Moskau 25.
**S.M.P.E.** Sitzungsberichte der physikal. medizin. Sozietät, Erlangen 37.
**S.M.Q.** School of Mines Quarterly, New York 24.
**S.N.J.** Sitzungsberichte der Naturforschergesellsch., Jurjew 14.
**S.P.G.** Mémoires de la Société de Physique et d'Historie naturelle, Genève (4) 21.
**S.P.M.** Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society, Manchester 49—50.
**S.V.N.M.** Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwissensch. Kenntnisse, Wien 41; 45—46.
**S.W.** Shipping World 1905.

**T.A.A.** Rad Jugoslavenske Akad., Agram 161.
**T.A.E.S.** Transactions of the American Electrochemical Society, Philadelphia 7.
**T.A.S.C.E.** Transactions of the American Society of Civil Engineers, New York 49; 55.
**T.A.S.M.E.** Transactions of the American Society of mechanical Engineers, New York 23—24.
**T.A.W.** Transactions of the Wisconsin Academy of Science, Arts and Letters, Madison 15.
**T.C.B.H.** Technisches Zentralblatt für Berg- und Hüttenwesen, Berlin 13.
**T.C.I.** Transactions of the Canadian Institute, Toronto 32.
**T.C.P.S.** Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge 20.
**T.C.S.C.E.** Transactions of the Canadian Society of Civil Engineers, 1901.
**T.F.S.** Transactions of the Faraday Society 1.

**Z. M. M.** Zeitschrift des Mitteleuropäischen Motorwagenvereins, Berlin 4.
**Z. Ö. G.** Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien, Wien 53.
**Z. P.** Zeitschrift für phys.-chem. Unterricht, Berlin 18—19.
**Z. P. C.** Zeitschrift für physikal. Chemie Leipzig 45—55.
**Z. P. K.** Zeitschrift für Philosophie und philosoph. Kritik, Leipzig 121.
**Z. P. P.** Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane, Leipzig 37; 39; 40.
**Z. P. P. L.** Zeitschrift für Philosophie und Pädagogik, Langesalza 10.
**Z. S.** Zeitschrift für Math. und Physik, Leipzig 52—53.
**Z. T. S.** Zeitschrift für Transportwesen und Straßenleben, Berlin 22.
**Z. U. B. B.** Zement und Beton, Berlin 4.
**Z. V. W.** Zeitschrift für Vermessungswesen, Wien 2.
**Z. W. M.** Zeitschrift für wissenschaftl. Mikroskopie, Leipzig 22.
**Z. W. P.** Zeitschrift für wissenschaftl. Photographie, Leipzig 1; 3.

### Pädagogik der angewandten Mathematik.

**1.** *F. v. Dalwigk.* Beiträge zur Frage des Unterrichts in angewandter Mathematik an der Universität. D.V.M. 15. 349.

Siehe auch 268; 597.

### Logikkalkul.

**2.** *H. Poincaré.* Les mathématiques et la logique. R.M.M. 13. 815; 14. 17.

**3.** *A. Padoa.* Logica matematica e matematica elementare. A.C.P.M. 2. 186.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**4.** *F. P. Cantelli.* Calcolo della probabilità. Pit 12. 68.

**5.** *C. V. L. Charlier.* Researches into the theory of probability. A.U.L. (2) 1. Nr. 5.

**6.** *N. Herz.* Die Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Z.Ö.G. 53. 961.

**7.** *F. P. Cantelli.* Sui fondamenti del calcolo della probabilità. Pit 12. 21; 33.

**8.** *H. Piéron.* Les contradictions du calcul des probabilités. R.S. (5) 4. 662.

**9.** *G. de Massas.* A propos du calcul des probabilités. R.S. (5) 4. 788.

**10.** *E. Borel.* Remarques sur certaines questions de probabilité. S.M. 33. 123.

**11.** *A. Deltour.* Sur une question de probabilitès. N.A. (4) 6. 100.

**12.** *L. v. Bortkiewicz.* Wahrscheinlichkeitsrechnung und Erfahrung. Z.P.K. 121. 71.

**13.** *W. Voss.* Falsche Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zufall. G.L. 39. 65.

**14.** *F. Mentré.* Les racines historiques du probabilisme rationnel de Cournot. R.M.M. 13. 485.

**15.** *G. Lechalas.* A propos de Cournot: Hasard et déterminisme. R.M.M. 14. 109.

**16.** *F. Schuh.* Over een uitbreiding van den regel der totale waarschijnlijkheid en enkele toepassingen. N.A.W. (2) 7. 238.

**17.** *H. F. Lipps.* Die Bestimmung der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen eines Gegenstandes. B.G.L. 57. 1.

**18.** *C. Burali-Forti.* Sulla curva della probabilitá. A.A.T. 41. 129.

**19.** *A. Loiselle et H. Piéron.* La question des séries pour le calcul des probabilités. R.S. (5) 4. 536.

**20.** *E. Macquart.* Examen critique des divers procédés de répartition proportionnelle en matière électorale. R.S. (3) 4. 545; 584.

**21.** *J. C. Kluyver.* Een vraagstuk van meetkundige waarschijnlijkheid. C.A.A. 14. 325.

**22.** *H. Pearson.* The problem of random walk. N. 72. 294; 342. *Lord Rayleigh* 318.

**23.** *M. E. Mellet.* Sur l'application du calcul des probabilités à la critique des déterminations des poids atomiques. A.S.G. (4) 22. 185.

Siehe auch 63; 78; 582; 1808; 3741 bis 3742.

### Methode der kleinsten Quadrate.

**24.** *P. Mansion.* Sur la théorie purement algébrique des moindres carrés. A.S.B. 30. A. 78.

**25.** *Mansion.* Sur la méthode des moindres carrés dans le Nachlass de Gauss. A.S.B. 30. A. 169.

**26.** *A. Abetti.* Sulla trattazione coi minimi quadrati di 2 casi speciali di

equazioni di condizione. M.S.S.J 33. 235.

27. *E. Lindelöf.* Über die Ermittelung der Genauigkeit der Beobachtungen bei der Analyse periodischer Erscheinungen und in der Methode der kleinsten Quadrate. A.F.S. 29. Nr. 9.

28. *J. Schnöckel.* Graphisch-analytische Ausgleichung eines ebenen Linienzuges nach der Methode der kleinsten Quadrate. Z.S. 52. 430.

## Fehlerrechnung.

29. *L. Gérard.* Théorie des erreurs B.M.E. 10. 291.

30. *F. Y. Edgeworth.* The law of error. T.C T.S. 20. 36; 113.

31. *C. V. L. Charlier.* Über das Fehlergesetz. A.M.A.F. 2. Nr. 8.

32. *C. V. L. Charlier.* Die zweite Form des Fehlergesetzes. A.M.A.F. 2. Nr. 15.

33. *W. Gibson.* Tables facilitating the computation of probable errors. Bi. 4. Nr. 4.

34. *J. Midzuhara.* An analytical determination of the law of linearly combining a series of indirect observation-equations so that the probable errors of the unknown quantities become minime. A.J.B. 25. 17.

35. *W. F. Meyer.* Eine auf unendliche Produkte sich beziehende Fehlerabschätzungsregel. A.M. 30. 93.

36. *G. Holtsmark.* Über eine Anwendung der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie auf Größen, welche sich nicht rein zufällig ändern. Z.S. 52. 410.

37. *L. Krüger.* Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen. V.P.G.J. (2) 18.

38. *F. R. Helmert.* Über die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreihen. S.A.B. 1900. 594.

39. *K. Nitz.* Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen. Z.S. 53. 1.

40. *J. W. Rasch.* Het meten van een cilinder. N.A.W. (2) 7. 271.

41. *A. Klingatsch.* Die Fehlerkurven der photographischen Punktbestimmung. A.A.W. 1906. 346.

42. *F. Rögel.* Note über den Ausgleich von Streckenmessungen. S.G.B. 1905. Nr. 30.

43. *V. Gama.* Détermination de l'erreur probable d'un côté d'un polygone. M.y R.M. 22. 95.

44. *Noudin.* Compensation des erreurs instrumentales dans les opérations topographiques. R.T.P. 26. 871.

45. *L. Arndt.* Sur le dégré de precision des résultats déduits des observations de chronomètres de poche. B.S.V. 31. 340.

Siehe auch 1808—09; 1874; 1909; 3184 bis 3191.

## Politische Arithmetik.

46. *P. Faure.* Theorie mathématique de la représentation proportionelle. R.S. (5) 5. 174.

47. *A. de St. Germain.* La théorie de la représentation proportionelle. R.S. (5) 5. 343.

Siehe auch 20; 2759—61; 3580.

## Kaufmännische Arithmetik.

48. *F. Unger.* Gewerbliches Rechnen. Z.H. 37. 314. 402.

Siehe auch 2751—56; 2762—64; 3741.

## Rentenrechnung.

49. *H. W. Curjel.* On joint life annuities. J.I.A. 38. 353.

50. *J. Spencer.* On the determination of the rate of interest in an annuity-certain. J.I.A. 38. 280.

51. *N. T. Bertelsen* and *J. F. Steffensen.* A table for determining the rate of interest in an annuity-certain. A.K. 1. 41.

52. *F. Bell.* On the retrospective method of valuation. J.I.A. 39. 17.

53. *H. W. Monley.* On the valuation of staff-pensions fund. J.I.A. 38. 101.

54. *E. C. Thomas.* Staff-pension funds. J.I.A. 38. 276.

Siehe auch 2749—50.

## Statistik.

55. *T. Hartwig.* Menschliche Massenerscheinungen vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung. W.F.A. 5. 584.

56. *G. J. D. Monnier.* Geconcentreerde en gespecificeerde statistiek. A.V.A. 7. 422.

57. *J. P. van der Stok.* Over frequentie-krommen von meteorologische grootheden. C.A.A. 14. 270.

58. *J. P. van der Stok.* Over frequentie-krommen van barometerstanden. C.A.A. 14. 548.

Siehe auch 617; 634—35.

### Biometrie.

**59.** *C. E. Wasteels.* Over het bepalen der variatie en correlatie. H.V.C. 1901. 194.

**60.** *C. E. Wasteels.* Over den variatiemeter. H.V.C. 1904. 18.

**61.** *C. E. Wasteels.* Over de ligging der maxima in variatiecurven en het voorkomen der Fibonacci-getallen. H.V.C. 1903. 148.

**62.** *A. D. Darbishire.* On the difference between physiological and statistical laws of heredity. S.P.M. 50. Nr. 11.

**63.** *C. E. Wasteels.* De variatiecurven met betrekking tot de polynomiale waarschijnlijkheidswet. H.V.C. 1900. 33.

**64.** *P. Bartels.* Untersuchungen und Experimente an 1500 Schädeln über die Grundlagen und den Wert der anthropologischen Statistik. Z.M.A. 7. 81.

**65.** *M. Stefanowska* et *H. Chrétien.* Recherches statistiques sur l'évolution de la taille du lin. C.A. 141. 900.

### Sterblichkeit.

**66.** *W. F. H. Liefrink-Teupken.* De nieuwe sterftetafels van der laatsten tijd. A.V.A. 7. 325.

**67.** *C. Goldziher.* Un critérium pour l'application de la loi de mortalité de Gompertz-Makeham. C.R. 141. 677.

**68.** *M. v. Lerch.* Über die Berechnung der Summen diskontierter Zahlen für eine nach dem Makeham'schen Gesetze fortschreitende Sterbetafel. Z.S. 53. 168.

### Versicherungsmathematik.

**69.** *D. C. Fraser.* A comparison of various methods of grouping whole-life assurances for valuation. J.I.A. 38. 385.

**70.** *H. A. van den Belt.* Een kenmerk waaraan een reeks waargenomen getallen moet voldoen om afgerond te kunnen worden met behulp van de formule $W_x = A + Bc^x$. A.V.A. 7. 470.

**71.** *C. L. Landré.* Het rekenen met toe-en by leven uittredenden. A V.A. 7. 398.

**72.** *T. G. Ackland.* Further notes upon the application of Mr. Lidstones method to the case of joint endowment assurances. J.I.A. 38. 61.

**73.** *T. G. Ackland* and *J. Bacon.* On the valuation of whole life industrial assurances with allowance for lapses. J.I.A. 38. 539.

**74.** *J. M. Vaz Dias.* Eine Methode zur Berechnung des Rücklaufwertes. A.J.W. 1904. II. 50.

Siehe auch 68.

### Spiele.

**75.** *P. Cattaneo.* Su un noto giuoco d'azzardo. B.D.M. 5. 15.

**76.** *M. Cashmore.* Chess magic squares. R.B.A. 75. 350.

**77.** *N. J. Lennes.* On the motion of a ball on a billiard table. M.M.F. 12. 152.

**78.** *C. Jonet.* La probabilité à la roulette. R.S. (5) 4. 632.

**79.** *W. J. Wisselink.* Een vraagstuk met oplossing over een spelletje met speelkarten. V.W.A. 20. 250.

**80.** *P. Cattaneo.* Esercizi di calculo combinatorio applicato ai giuoche colle carte. P.A. 12. 122.

**81.** *P. Mansion.* Sur le calcul de l'avantage du banquier au jeu de baccara. A.S.B. 30. A. 113.

**82.** *W. A. Wijthoff.* A modification of the game of nim. N.A.W. (2) 7. 199.

### Numerisches Rechnen.

**83.** *V. V. Bobynin.* Methodes employées par les calculateurs extraordinaires pour resoudre les problèmes compliqués. E.M. 7. 343.

**84.** *L. Federsen.* Nogle regler for tal. I.K. 12. 254.

**85.** *J. Plassmann.* Teilbruchreihen für Umrechnungen. M.V.A.P. 15. 26.

**86.** *Milarch.* Elementare Berechnung der Logarithmen. Z.H. 37. 43.

**87.** *N. Quint.* Elementaire berekening van logarithmen. W.T. 2. 15; 57.

**88.** *E. B. Escott.* Computation of logarithms. E.T. 57. 487.

**89.** *M. Cashmore.* Computation of $\pi$. R.B.A. 75. 350.

**90.** *G. Witt.* Zur Berechnung der elliptischen Integrale. A.N.K. 169. 385.

**91.** *K. Bauer.* Rechenvorteile, Schnellrechnen, Taktrechnen. M.K.L. 1904. 306.

Siehe auch 3526—32.

### Rechenproben.

**92.** *O. Biermann.* Eine Divisionsprobe. M.Z. 16. 365.

### Analytische Näherungsmethoden.

**93.** *G. Peano.* Sulle difference finite. R.A.L.R. (3) 15 A. 71.

94. *S. A. Corey.* A method of approximation. M.M.F. 13. 137.

95. *H. L. Rice.* A differential method generally applicable to all solutions proceding by successive approximations and especially available when these approximations practically fail to converge. P.A. 13. 370.

96. *J. Rius y Casas.* Extraccion de raices por sustracciones sucesivas. R. T.M. 5. 92.

97. *J. E. A. Steggall.* On a binominal approximation. M.G.S. 3. 267.

98. *C. Lagrange.* Sur le calcul approché des séries. R.M.S. 16. 444.

99. *O. Runge.* Über die numerische Auflösung totaler Differentialgleichungen. N.G.G. 1905. 252.

100. *E. Eckardt.* Berechnung der zyklometrischen und goniometrischen Funktionen ohne Reihenentwicklung. Z.H. 37. 1.

Siehe auch 89; 174; 1635; 3513—15.

### Numerische Gleichungen.

101. *H. B. Fine.* An elementary proof of a theorem of Fourier and Budan. B.U.P. 13. 52.

102. *M. Lerch.* Sur l'approximation des racines d'équations numériques. E.M. 7. 300.

103. *R. Birkeland.* Angenäherte Berechnung der Wurzel einer Gleichung. A.M.C. 27. Nr. 2.

104. *C. Gilpin.* Approximation of the greatest root of a cubic equation with 3 real roots. M.M.F. 13. 140.

105. *G. Witt.* Zur numerischen Auflösung zweier Gleichungen in der Planetentheorie. A.N.K. 172. 129.

106. *E. Le Grand Roy.* Sur un ingenieux procédé de résolution graphique de l'équation de Kepler. B.S.V. 31. 381.

Siehe auch 135—139; 3307.

### Interpolation.

107. *M. Krause.* Über Interpolationstheorie. S.I.D. 1906. A. 8.

108. *Potron.* Sur une formule générale d'interpolation. S.M. 34. 52.

109. *M. Fréchet.* Formule d'interpolation des fonctions périodiques continues. C.R. 141. 818.

110. *G. Zemplén.* A graphikus interpolacziórol (Über die graphische Interpolation). M.P.L. 13. 96.

111. *K. Schwarzschild.* Über eine Interpolationsaufgabe der Aktinometrie. A.N.K. 172. 65.

### Mittelwerte.

112. *W. Lorey.* Zur Theorie der Mittelwerte. A.N.G.G. 25. 53.

113. *E. R. Hedrick.* On a function which occurs in the law of the mean. A. of M. (2) 7. 177.

114. *H. D. Birkhoff.* General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature. T.S.M.Am. 7. 107.

Siehe auch 3510.

### Harmonische Analyse.

115. *S. P. Thompson.* Harmonic analysis reduced to simplicity. I. E. P. 15. 78.

116. *T. R. Lyle.* On an expeditious practical method of harmonic analysis. P.M. (6) 11. 25.

117. *A. E. Kenelly.* The harmonic analysis of the semicircle and of the ellipse. A. of M. (2) 7. 49.

118. *H. C. Richards.* On the harmonic curves known as Lissajous' figures. J.F.I. 153. 269.

119. *J. Thornton Osmond.* Treatment of simple harmonic motion. S. (2) 22. 311.

120. *J. R. Milne.* A new form of harmonic synthetiser. P.R.S.E. 26. 207.

Siehe auch 27; 223—24; 2066; 3315 bis 3317; 3531.

### Mathematische Tafeln.

121. *A. Bemporad.* Introduzione di argomenti descendenti nelle tavole logaritmiche di moltiplicazione e simili. B.G.C. 89. 13.

122. *N. P. Bertelsen.* Om den nöjagtig led der opnaas ved tabelopslag i fircifrede logaritme-og antilogaritmetabeller. T.M. 16. A. 65.

123. *A. Bemporad.* Tavole ausiliare per la determinazione di archipiccoli dal log sin o log tang. M.S.S.I. 34. 91.

124. *F. Morano.* Tavole matematiche pei calcoli di reduzione delle fotografie stellari per la zona Vaticana (55°—64°) N.L.A. 58. 35; 99; 135; 173.

Siehe auch 1913—16; 2433; 2722. 3744.

### Nomographie.

125. *G. Pesci.* Nomografia elemental. R.T.M. 5. 138.

126. *N. M. Bubnov.* Das authentische Werk von Gerbert über den Abakus (russ.) B.U.K. 1905 b7; 10; 11.

**127.** *M. d'Ocagne.* Sur un théorème de J. Clark. C.R. 142. 988.

**129.** *Paret.* Note sur quelques applications de la nomographie à l'astronomie nautique. A.N.G. 26. 170.

**130.** *Perreti.* Sur l'application de la nomographie aux principales tables nautiques. A.F. 1905. 80.

**131.** *M. d'Ocagne.* Sur la méthode nomographique des points alignés. A.F. 1905. 1.

**132.** *Fr. Kerner.* Thermoisodromen. A.G.G.W. 6. Nr. 3.

**133.** *F. J. Vaes.* Technische rekenplaten. I.W. 19. 322.

Siehe auch 2077; 3521—25.

## Graphischer Kalkül.

**134.** *F. Oom.* Méthodes de calcul graphique. B.D.G.I. 4.

**135.** *Grosse.* Die graphische Behandlung der Gleichungen. Z.H. 37. 267.

**136.** *E. Cantoni.* Sulla risoluzione grafica delle equazioni di 2. grado. B.D.M. 4. 214.

**137.** *A. Auric.* Résolution graphique de l'équation $X^2 - pX + q = o$. N.A. (4) 5. 514.

**138.** *H. J. Thomsen.* Graphical solution of cubic and quartic equations. N. 72. 295.

**139.** *B. C. Wallis.* Note on the graphic solution of simultaneous equations in 3 unknowns. E.T. 57. 40.

**140.** *L. Deny.* Note sur la représentation géométrique des polynomes algébriques. N.A. (4) 5. 193.

**141.** *N. Delaunay.* Graphische Berechnung der elliptischen Funktionen mit einigen Anwendungen. Z.S. 53. 403.

**142.** *A. K. Erlang.* Lidt om det grafiske korrespondance princip. T.M. 17. B. 58.

**143.** *S. F. Whiting.* Use of drawings in orthographic projection and of globes in teaching astronomy. P.A. 13. 235.

**144.** *S. F. Whiting.* Use of graphs in teaching astronomy. P.A. 13. 185.

Siehe auch 106; 110; 256; 349; 356; 415; 716; 1443; 1917; 1980; 2127—28; 2379; 2449; 2489; 2657; 2925; 3308 bis 3314; 3512; 3523; 3600; 3607.

## Geometrische Näherungsmethoden.

**145.** *K. Hunrath.* Von Albrecht Dürers Näherungskonstruktionen regelmäßiger Vielecke. B.M. (3) 6. 249.

**146.** *V. H. O. Madsen.* En tilnaermelses Konstruktion for $\frac{\pi}{2}$. T.M. 17. A. 21.

**147.** *S. Enebo.* Tilnaermet kvadatur af cirklen. T.M. 17. A. 21.

**148.** *F. Villareal.* Un descubrimiento geometrico. R.C.L. 9. 41.

Siehe auch 3516—20.

## Winkelteilung.

**149.** *E. Lampe.* Über angenäherte Winkelteilungen mit Zirkel und Lineal. S.M.B. 1906. 17.

**150.** *P. Caminati.* Sulla divisione di un angolo in parti eguali. A.C.P.M. 2. 165.

**151.** *O. Taraba.* Přispěvek ku trisekci úhlu (Beitrag zur Dreiteilung des Winkels). C. 35. 76.

**152.** *W. Lehnen.* Teilung eines jeden gegebenen Winkels in den Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13 . . . entsprechende gleiche Teile. Z.H. 37. 262.

**153.** *G. Scott.* On a looped $C_3$ which facilitates the trisection of angles and its mechanical description by continuous motion. E.T. 56. 195.

**154.** *J. N. Miller.* On an instrument for trisecting any angle. P.R.S. E. 24. 7.

**155.** *J. N. Miller.* Application of Miller's trisector to the quinquesection of any angle P.R.S.E. 24. 302.

**156.** *Chrystal.* Note on the mathematical theory of Miller's trisector. P.R.S.E. 24. 9.

**157.** *Chrystal.* On the relation of Miller's trisectrix to the quartic trisectrix with a description of a sevenbar limaçonograph. P.R.S.E. 24. 17.

**158.** *G. Bratu.* Asupra eneagonului regulat (Über das reguläre Neuneck). G.M.B. 11. 31.

**159.** *J. N. Miller.* A method of dividing the circumference of a circle in 360 equal parts. P.E.M.S. 23. 58.

Siehe auch 3743—44.

## Kubikrechnung.

**160.** *R. Fischer.* Zur Schnellkubierung. D.F.Z. 17. 369. — *Pfeifer* 930.

**161.** *O. Nitsche.* Die Anwendbarkeit der Simpsonschen Regel, gleichzeitig eine Verallgemeinerung des Archimedischen Satzes. U.M.N. 12. 110.

**162.** *F. Arbulú.* Volumen de los cuerpos geométricos. R.C.L. 9. 107.

**163.** *I. Ionescu.* Calculul volumului tocitorilor. G.M.B. 12. 5; 29.

**164.** *F. de Boer.* Berekening van den inhoud van het lichaam dat aan drie niet geheel buiten elkaar liggende bollen gemeen is. N.A.W. (2) 7. 11.

Siehe auch 3406—21.

### Genäherte Quadratur.

**156.** *V. Jung.* Poznámka k přibliżnym kvadraturnim methodám. (Bemerkung über die genäherte Quadraturmethode.) C. 35. 23.

Siehe auch 114; 147.

### Planimeter.

**166.** *E. J. Willis.* On the natural unit of the planimeter. S.I.I. 19. 23.

**167.** *Allen.* The hatched planimeter. E.C. 42. 481.

**168.** *A. Kriloff.* On the hatched planimeter. A.P.B. (5) 19. 221.

**169.** *W. W. Carson.* The polar planimeter. U.T.R. 1901. 300.

**170.** *F. Siegmon.* Über Stangenplanimeter. P. 15. 193.

Siehe auch 3510; 3584.

### Rechenapparate.

**171.** N.N. Neue Rechenmaschine. Z.B.S. 20. 89.

**172.** *G. J. D. Mounier.* De Stolzenberger Rekenmachine „Millionär". A.V.A. 7. 114.

**173.** *S. Fuchs.* Der Antharith. N.F.P. 1905. (28. November).

**175.** *F. L. O. Wadsworth.* On convergents and arithmetical series the ratio of whose terms approximate successively the value of $\pi$ and on their application to the construction of computing machines. J.F.I. 156. 131.

**175.** *Gurski.* Entspricht die russische Rechenmaschine als Lehrmittel den Forderungen der heutigen Methodik. P.Z.B. 30. 212.

**176.** *G. Unterlauf.* Die Pflege der Selbsttätigkeit im ersten Rechenunterrichte mittelst des Unterlaufschen Rechenapparates. P.Z.B. 31. 419; 454.

**177.** *F. J. O. Coddington.* An apparatus for teaching long multiplication. M.G.S. 3. 278.

**178.** *J. F. Murray.* A differentiating machine. P.R.S.E. 25. 277.

**179.** *A. Kryloff.* Sur un intégrateur des équations différentielles ordinaires. A.P.B. 5. 20. 17.

**180.** *R. Rothe.* Über eine mechanische Auswertung der elliptischen Transzendenten. S.M.B. 1905. 13.

**181.** *J. R. Milne.* Certain math. instruments for graphically indicating the direction of refracted and reflected light. P.RSE. 25. 806.

**182.** *C. E. Adams.* Geodetic tables for use with the Brunsviga calculating-machine. R.A.A. 10. 93.

**183.** *Ackermann.* Refraktometrische Schnellmethode der Bieranalyse mittels der Ackermannschen Rechenscheibe. Z.F.B. 28. 33.

Siehe auch 114; 120; 153—57; 297—99; 3586.

### Rechenschieber.

**184.** *C. Vernon-Boys.* A new slide rule. N. 72. 45; 102.

**185.** *P. Ernst.* Zur Addition und Subtraktion mit Hilfe des logarithmischen Rechenschiebers. Z.S. 53. 60.

Siehe auch 1978; 3175; 3587—92.

### Vektoranalysis.

**186.** *J. Laub.* Elemente der Vektoranalysis (poln.) W.M. 9. 134.

**187.** *A. Libický.* Úvod do vektorové analyse (Einleitung in die Vektoranalysis). C. 35. 207.

**188.** *E. Barbette.* Demostracion de un teorema clásico por la geometria vectorial. R.T.M. 5. 135.

**189.** *O. Manville.* Théorème sur les vecteurs et théorème de Varignon. P.S.B. 1904—05. 62.

**190.** *O. Blumenthal.* Über die Zerlegung unendlicher Vektorenfelder. M.A. 59. 235.

**191.** *E. V. Huntington.* The fundemental laws of addition and multiplication in elementary algebra. A. of M. (2) 8. 1.

**192.** *J. H. Maclagan-Wedderburn.* On the general scalar function of a vector. P.R.S.E. 24. 409.

**193.** *V. H. O. Madsen.* Note om rumtal. T.M. 16. B. 31.

**194.** *L. G. du Pasquier.* Zahlentheorie der Tettarionen. V.N.Z. 51. 55.

**195.** *E. Waelsch.* Extension de l'algèbre vectorielle à l'aide de la théorie des formes binaires avec des applications à la théorie de l'élasticité. C.R. 143. 204.

**196.** *A. Mc. Aulay.* Vector distributions over volumes, lines and surfaces. R.A.A. 9. 109.

197. *G. Monnet.* Sur les théorèmes généraux de la mécanique et le calcul vectoriel. E.M. 7. 457.

### Ausdehnungslehre.

198. *L. Conturat.* Les principes des mathématiques. R.M.M. 13. 224.
199. *G. Monnet.* Vecteurs relatifs à une courbe. E.M. 7. 225.

### Quaternionen.

200. *Tait.* Quaternion notes. P.R.S.E. 24. 344.
201. *R. L. Carstens.* A definition of quaternions by independent postulates. S.M.Am. 12. 392.
202. *H. E. Hawkes.* The quaternion number systems. M.A. 60. 437.
203. *W. Peddy.* Quaternion binaries. P.R.S.E. 24 70.
204. *J. H. Maclagan-Wedderburn.* On the application of quaternions in the theory of differential equations. T.R. S.E. 40. 709.
Siehe auch 332.

### Geometrisches Zeichnen.

205. *C. Heinatz.* Über das Zeichnen, im besonderen das Fachzeichnen und die Werkstattzeichnung. D.M.Z. 1903. 73; 95; 134.
206. *Steiner.* In welcher Beziehung stehen Zeichnen und Rechnen zum Unterricht in der Raumlehre? A.F.S.P. 6. 71.
207. *G. Wallenberg.* Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß, sowie mit dem Lineal allein. S.M.B. 1905. 21.
Siehe auch 241.

### Kurvenzeichnen.

208. *L. Godeaux.* Application des méthodes géométrographiques au tracé mécanique des courbes planes. E.M. 8. 143.
209. *F. Bernstein.* Über eine neue geometrisch-mechanische Erzeugungsweise des Kreises und der sphärischen Kegelschnitte. Z.S. 52. 380.
210. *F. Villareal.* La curva del niño. R.C.L. 9, 130.
Siehe auch 153; 316—17; 3308; 3450—69; 3745.

### Verbindungskurven.

211. *V. Bonin.* Formule pratique pour le tracé des courbes de raccordement en arc de cercle au moyen d'ordonnées sur la corde. R.T.P. 26. 459.
Siehe auch 2796—98; 3458; 3461—62; 3465—66.

### Zeicheninstrumente.

212. *Picard.* Werkzeug zum Zeichnen. K.Z. 8. 59.
213. *Becker.* Radienlineal. B.I.G.B. 1905. 199.
214. *K. Mack.* Tangentenkonstruktion mit Hilfe des Spiegellineals. Z.S. 52. 435.
215. *R. Mehmke.* Logarithmisches Papier. Z.S. 53. 185.
216. *Lafayette.* The Kinsey patent presser. T.W.R. 29. 133.
217. *R. F. Muirhead.* Constructions with straight-edge and dividers. M.G.S. 3. 209.
218. *R. Bérard.* Sur le tracé des coniques au moyens des systèmes articulés. B.M.E. 10. 164; 179.
219. *W. I. Brooks.* Parabola curve. T.M. 16 A. 46.
220. *G. Sommati.* L'ellissografo. R. F.M. 7. A. 115.
221. *Z. E. Hornickij.* Proekt elipsografu (Modell eines Ellipsenzirkels). R. S.M. 10 Nr. 4.
222. *R. Schimmack.* Ein kinematisches Prinzip und seine Anwendung zu einem Katenographen. Z.S. 52. 341.
223. *W. G. Cady.* A machine for compounding sine curves. S. (2) 23. 877; P.R. 22. 249.
224. *Lord Rayleigh.* On an instrument for compounding vibrations with an application to the drawing of curves such as might represent white light. P.M. (6) 11. 127.
225. *A. Baur.* Der Campylograph. N.O. 48. 229.
Siehe auch 53; 157; 207; 916—17; 3743; 3745—46.

### Darstellende Geometrie.

226. *E. Amaturo.* Sui metodi delle geometria descrittiva. G.B. 43. 29.
227. *E. Müller.* Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie. D.V.M. 14. 569.
228. *A del Re.* Intorno ai metodi di rappresentazione della geometria descrittiva. A.A.P.N. (2) 10. Nr. 5.
229. *H. de Vries.* Over twee vraagstukken uit de beschrijvende meetkunde. W.T. 2. 145.

**230.** *A. del Re.* Sulle 4 rotationi che sovrappongono un triedro trirettangolo a un altro triedro trirettangolo e sulla astatica nei metodi della geometria descrittiva. R. A. N. (3) **11. 215.**

**231.** *E. Vogel.* Über die mechanische Ermittlung des Durchdringungspolygons. Z. H. 37. 265.

**232.** *L. Klug.* Konstruktion des Reliefs einer $F_2$. S. A. W. **114.** 65.

**233.** *C. Nevečeřal.* Konstruktion der Rotations-$F_2$, wenn die Rotationsachse und 3 Tangenten gegeben sind (tschech.). M. A. T. P. 1905. Nr. 18.

Siehe auch **1949.**

### Projektion.

**234.** *E. Amaturo.* I metodi della biproiezione ortogonale, delle biproiezione mongiana e della biproiezione parallele (biodiga) per la rappresentazione piana dello spazio ordinario. G. B. **43. 314.**

**235.** *M. Juhel-Rénoy.* Sur la projection centrale. N. A. (4) **6. 121.**

**236.** *H. de Vries.* Centrale projectie in de ruimte van Lobatschewsky. C. A. A. **14. 264.**

Siehe auch **249; 261—62.**

### Stereographische Projektion.

**237.** *E. S. Fedorov.* Die neuen singulären Punkte der stereographischen Projektion im Zusammenhang mit der Verallgemeinerung der Büschel isotroper Strahlen. (russ.) A. P. M. (8) **17.** Nr. 5.

**238.** *G. Cesàro.* Les formules de la trigonométrie sphérique déduites de la projection stéréographique de la sphère. B. A. B. 3. 560.

**239.** *S. L. Penfield.* On the drawing of crystals from stereographic and gnomonic projection. A. J. S. (4) **21. 206.**

Siehe auch **262.**

### Perspektive.

**240.** *K. Doehlemann.* Die Perspektive der Brüder van Eyck. Z. S. **52. 419.**

**241.** *E. H. Hermes.* Das perspektivische Zeichnen ohne Quadratnetz und die perspektivische Darstellung von Gartenplänen im koupiertem Terrain. G. K. B. 5. 155.

**242.** *F. Chomé.* Sur le contour apparent de la surface d'un corps. E. M. 8. 33.

Siehe auch **3577—79.**

### Axonometrie.

**243.** *C. A. Heuman.* Über Trägheitsmomente von Punktsystemen und über eine fundamentale Aufgabe in der Theorie der axonometrischen Abbildung. A. M. A. F. 2. Nr. 11.

### Schattenkonstruktionen.

**244.** *G. Feldhaus.* Ein kleiner Beitrag zur Lehre von der Schattenkonstruktion. Z. G. U. 16. 101.

**245.** *H. Hertzer.* Schlagschatten eines Kugelkreises in die Kugel. Z. G. U. **16. 169.**

**246.** *G. Feldhaus.* Noch einmal der Schatten in Hohlkugeln. Z. G. U. **16. 185.**

### Beleuchtungskunde.

**247.** *V. Dörr.* Eine einfache Lichtstufenbestimmung. U. M. N. **12. 60.**

**248.** *S. Meisel.* Über die wahre Bedeutung der Kurven gleicher Helligkeit auf gleichen Flächen. Z. G. U. **15. 183.**

**249.** *C. Nevečeřal.* Parallele Beleuchtung eines Rotationsellipsoides in allgemeiner Lage bei Zentralprojektion (tschech.). M. A. T. P. 1905. Nr. 17.

### Photogrammetrie.

**250.** *A. v. Hübl.* Die Stereophotogrammetrie. M. M. G. I. **22. 139.**

**251.** *E. Liebenau.* Photogrammetrie in der Viehzucht. M. D. L. **20. 129.**

**252.** *T. Dokulil.* Photogrammetrie im Dienste der Kunsthistorik. U. F. 1905. 48; N. F. P. 1905 (4. Oktober).

Siehe auch **41; 124; 3535; 3556; 3580—81.**

### Kristallographie.

**253.** *T. H. v. Groth.* Sur les notations cristallographiques. B. S. M. F. **26. 54;** *S. Virubov* 57.

**254.** *H. Kirchmayr.* Die Anschaulichkeit beim kristallographischen Unterricht an der Mittelschule. D. V. N. **77. 220.**

**255.** *G. Wulf.* O točnosti zakonov geometričeskoj kristallografii. (Die Genauigkeit der Gesetze der geometrischen Kristallographie.) B. U. V. 1903. Nr. 8.

**256.** *A. F. Rogers.* New graphical methods in crystallography. S. M. Q. 24. 67.

**257.** *C. Viola.* La transformazione delle coordinate dei cristalli. R. A. L. R. (5) 15 A. 89.

**258.** *C. Viola.* Die Aufgabe der Transformation der Koordinaten in der Kristallographie. Z. K. M. **41. 602.**

**259.** *E. S. Fedorov.* Nekotoryja sledstvija iz zakona ellipsoida singonii. (Einige Folgerungen aus dem Gesetz vom Syngonieellipsoid.) A.P.B. (5) 21. 113.

**260.** *E. v. Fedorov.* Spezielle Erprobung des kristallographischen Limitgesetzes. Z.K.M. 42. 8.

**261.** *G. F. H. Smith.* Über die Vorzüge der gnomonischen Projektion und ihre Anwendung beim Kristallzeichnen. Z.K.M. 39. 142.

**262.** *S. L. Penfield.* On the drawing of crystals from stereographic and gnomonic projections. A.J.S. (4) 21. 206.

**263.** *F. Haag.* Die den Vielflachen des regulären Kristallsystems dualistisch entsprechenden Vielecke. Z.K.M. 42. 170.

**264.** *A. E. H. Tutton.* Über topische Achsen und über die topischen Parameter der Alkalisulfate und -selenate. Z.K.M. 41. 381.

Siehe auch 239.

### Modelle.

**265.** *E. Hospitalier.* Sur la représentation matérielle des graphiques à 3 dimensions. I.E.P. 11. 207.

**266.** *R. Bonola.* Il modello di Beltrami di superficie a curvatura costante negativa. B.B.L. 9. 33.

**267.** *J. D. Everett.* On a flat model which solves problems in the use of the globes. G.J. 23. 234.

Siehe auch 232.

### Mechanik.

**268.** *R. F. Muirhead.* The teaching of mechanics. M.G.S. 3. 265.

Siehe auch 618.

### Geschichte der Mechanik.

**269.** *E. Wohlwill.* Ein Vorgänger Galileis im 6. Jahrhundert. P.Z. 7. 23.

### Prinzipien der Mechanik.

**270.** *A. Badoureau.* Qu'est-ce que la mécanique. R.S. (5) 4. 97; 134.

**271.** *L. Königsberger.* Über die Grundlagen der Mechanik. S.A.B. 1906. 664.

**272.** *J. Richard.* Sur les principes de la mécanique. E.M. 8. 137.

**273.** *C. Burali-Forti.* Sui principii della meccanica. R.C.M.P. 22. 152.

**274.** *R. d'Adhemar.* Les principes de la mécanique et les idées de Hertz. R.A.T.T. 1902. 173.

**275.** *H. Friedrich.* Bemerkungen zu den Grundbegriffen der Mechanik im Hinblick auf die neuen Ergebnisse der Naturwissenschaften. Z.P.P.L. 10. 189; 273.

**276.** *J. Hadamard.* Sur la mise en équation des problèmes de mécanique. N.A. (4) 6. 97.

**277.** *L. Silla.* Sopra alcune quistioni di statica. R.C.M.P. 21. 81. P. Appell 314.

**278.** *D. Pompeiu.* Sur la notion de masse en mécanique. A.S.U.J. 4. 90.

**279.** *H. Reissner.* Mechanische und elektrische Maße. S.M.B. 1905. 23; 61.

**280.** *F. Siacci.* Sul principio dei lavori virtuali. R.A.N. (3) 11. 466.

**281.** *R. Lindt.* Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, seine Beweise und die Unmöglichkeit seiner Umkehrung bei Verwendung des Begriffs „Gleichgewicht eines Massensystemes". A.G.M.W. 18. 147.

**282.** *A. Müller.* Einige Bemerkungen über den Wesensbegriff der Bewegung und sein Verhältnis zum Begriff der absoluten Bewegung. N.O. 48. 233.

**283.** *O. Lummer* und *C. Schaefer.* Demonstrationsversuche zum Beweise des d'Alembertschen Prinzips. P.Z. 7. 269.

**284.** *A. Einstein.* Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie. A.P.L. (4) 20. 627.

**285.** *H. v. Helmholtz.* Über die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung. S.A.B. 1905. 863.

**286.** *L. Fejér.* Das Ostwaldsche Prinzip in der Mechanik. (ung.) M.T.E. 23. 155.

**287.** *L. Fejér.* Das Ostwaldsche Prinzip in der Mechanik. M.A. 59. 422; 560.

**288.** *L. Koenigsberger.* Über die Maxwellschen Gleichungen. S.A.B. 1906. 9.

**289.** *L. Fredey.* Les théories générales du changement. R.S. (5) 673. 710.

**290.** *A. Ziwet.* The relation of mechanics to physics. S. (2) 23. 49.

**291.** *R. de Saussure.* La géométrie physique. R.S. (5) 4. 385; 481.

Siehe auch 197; 973; 2588; 3507.

### Kinematik.

**292.** *R. de Saussure.* Théorie géométrique du mouvement des corps. A.S.G. (4) 21. 36; 129.

**293.** *J. Eiesland.* On the integration of a system of differential equations in kinematics. A.J.M. 28. 17.

**294.** *A. de St. Germain.* Cinématique. Problème relatif au centre instantané de rotation et au centre des accélérations. B.D. (2) 30. 73.

**295.** *C. Michel.* Sur le déplacement d'une figure de forme invariable. B.M.E. 10. 289.

**296.** *L. Gérard.* Déplacement dans le plan. B.M.E. 11. 4.

**297.** *Salcher.* Das Zusammensetzen gleichzeitiger Bewegungen und zwei dazu dienende Apparate. V.D.P.G. 7. 267.

**298.** *W. Biernacki.* Ein Apparat zur Darstellung der Zusammensetzung zweier Drehungen. (poln.) W.M. 9. 129.

**299.** *V. Biernacki.* Ein Apparat zur Demonstration der Zusammensetzung zweier Rotationen. Z.P. 19. 80.

**300.** *I. Thuet.* Déplacement hélicoidal d'un solide. B.M.E. 11. 2.

**301.** *A. Portuondo.* Leyes de composicion de movimientos helizoidales. R.A.M. 1. 461.

**302.** *F. Ricci.* Appunti sulla cinematica del moto parabolico svolti con metodo geometrico elementare. R.F.M. 7 B. 24; 142.

**303.** *G. Ricci.* Sui gruppi continui di movimenti rigidi negli iperspazii. R. A.L.R. (5) 14 B 487.

**304.** *J. Cardinal.* Meetkundige plaatsen die met de kruckbewegung samenhangen. M.P.M 10. 174.

**305.** *F. W. Lanchester.* The pendulum accelerometer, an instrument for the direct measurement and recording of acceleration. P.P.S.L. 19. 691.

**306.** *J. H. Jeans.* The kinematics of a granular medium in normal piling. P.L.M.S. (2) 3. 124.

Siehe auch 222; 230; 3422—48.

### Kinematische Geometrie.

**307.** *B. Procházka.* Eine Bemerkung zur kinematischen Geometrie (tschech.). M.A.T.P. 1905 Nr. 25.

**308.** *J. J. Quinn.* On kinematic geometry. A new inversor. M.M.F. 12. 105.

**309.** *L. Bickart.* Sur le mouvement d'une figure plane semblable à une figure donnée et dont 2 points décrivent deux droites concourantes. R.M.S. 16. 418.

**310.** *R. de Saussure.* La géométrie des feuillets. A.S.G. (4) 21. 134; 262.

**311.** *E. Weinnoldt.* Über kinematische Erzeugung von Regelflächen 4. Ordnung. Z.S. 52. 209.

**312.** *C. Cailler.* Sur la construction du couronoïde. A.S.G. (4) 21. 540.

### Mechanismen.

**313.** *Shepard.* Method of determining velocities and directional relations in mechanisms. M.W.M. 37. 103.

**314.** *F. Wittenbauer.* Dynamische Kraftpläne. Z.S. 53. 274.

**315.** *G. T. Stier.* Die Gleitflächen der Bewegungsmechanismen an Maschinen und deren Schmierung. G.B.H. 66. 597.

**316.** *B. Procházka.* Über die durch ein bewegliches Viereck erzeugte Kurve (tschech.). M.A.T.P. 1905. Nr. 26.

**317.** *J. J. Quinn.* A linkage for the kinematic description of a cissoid. M. M.F. 13. 57.

**318.** *O. Fischer.* Über die Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenksysteme. A.G.L. 29. Nr. 4.

**319.** *A. Grünwald.* Darstellung aller Elementarbewegungen eines starren Körpers von beliebigem Freiheitsgrad. Z.S. 52. 229

**320.** *Paege.* Schaltwerkgetriebe. M. W.B. 8. 248.

**321.** *Wild.* Neue Riemengetriebe mit beliebig wechselnden Geschwindigkeiten. W.F.B. 22. 235.

**322.** *v. Petravic.* Das Diamantgetriebe. G.M.T. 4. 153; Z.M.M. 4. 285.

**323.** *Schweike.* Die Automobilgetriebe. Z.M.M. 4. 407.

**324.** *Rousselet.* Transmission différentielle par satellites. R.I.P. 36. 433.

**325.** *G. T. Bennett.* The parallel motion of Sarrut and some allied mechanisms. P.M. (6) 9. 803.

Siehe auch 218; 304; 2683; 3215—18; 3424; 3449.

### Zahnräder.

**326.** *Hagen.* Bemerkungen über Verzahnungen. R.I.Z. 31. 53.

**327.** *F. J. Vaes.* De afslijtingskarakteristiek bij tandraderen. I.W. 18. 799.

**328.** *W. Wolfrom.* Eine falsche Konstruktion der Evolventenverzahnung. Z. G.U. 17. 23.

**329.** *P. Köppe.* Eine falsche Konstruktion der Evolventenverzahnung. Z.G.U. 17. 66.

**330.** *Knowles* and sons. Variable speed gear. M.W.M. 38. 306.

**331.** *Meinhaus.* Strength of gear teeth. E.C. 42. 71.

Siehe auch 2810; 3214; 3425—35; 3438—41.

### Schraubenrechnung.

**332.** *W. Peddie.* The use of quaternions in the theory of series. P.R.S.E. 24. 314.

### Statik.

**333.** *Rebuffel.* Démonstration du théorème de Varignon. B.M.E. 11. 97.

**334.** *J. Slowikowski.* Z dziedziny mechaniki i geometryi. O systemie zerowym (Über einige Aufgaben der Mechanik und Geometrie. Das Nullsystem). P.T.W. 41. 351; 388.

**335.** *J. P. Dolbujá.* Opredelenie glavnych napravlenij v tverdom tele (Bestimmung der Hauptachsen eines festen Körpers). B.L.B. 6. Nr. 2. 39.

**336.** *L. Silberstein.* Statica dei sistemi non perturbati. N.C.P. (5) 11. 21.

**337.** *F. S. Macaulay.* On a problem in mechanics and the number of its solutions. M.G.S. 3. 365.

**338.** *R. Skutsch.* Anwendung der Massenreduktionen nach Reye und nach Poinsot. S.M.B. 1905. 54.

**339.** *A. del Re.* Sulle fócali di Minding. R.A.L.R. (5) 14. B. 386.

**340.** *C. Halphen.* Théorie et applications du coin. N.A. (4) 6. 1.

**341.** *Ramisch.* Statische Untersuchung eines balkonartigen Ausladers. Z.E.M. 8. 46.

**342.** *Heckelbacher.* Zur statischen Untersuchung von Schornsteinen. Ö.W.Ö.B. 11. 711.

Siehe auch 230; 277—81; 370; 456; 2398—2400; 2423; 3595—3631.

### Zusammensetzung von Kräften.

**343.** *H. Haedicke.* Der Mittelpunkt von Kräften. D V.N. 77. 60.

**344.** *T. Schwartze.* Die Grundformel des Parallelogrammgesetzes. U.M.N. 12. 37.

**345.** *H. Keferstein.* Zur Ableitung des Satzes vom Kräfteparallelogramm aus dem Projektionssatz. Z.P. 18. 331.

**346.** *G. B. M. Zerr.* To find the equation to the straight line which is the direction of the resultant of a system of forces acting in one plane. M.M.F. 12. 176.

**347.** *G. Lazzeri.* Sulle composizione delle forze nello spazio. P.M.R. (3) 3. 97.

**348.** *P. H. Schoute.* La réduction analytique d'un système quelconque de forces. C.R. 142. 826.

**349.** *F. Rogel.* Über die graphische Zusammensetzung von Kräften. S.G.B. 1905. Nr. 20.

### Schwerpunkte.

**350.** *Hâton de la Goupillière.* Lieux géométriques de centres de gravité. C.R. 142. 1130.

**351.** *König.* Schwerpunkt und Trägheitsmoment eckiger Flächen. Z.E.M. 8. 65.

**352.** *Hâton de la Goupillière.* Centres de gravité de systèmes spiraloïdes. C.R. 142. 1172.

**353.** *Hâton de la Goupillière.* Centres de gravité de systèmes discontinus. C.R. 142. 1069.

### Momente.

**354.** *R. Bérard.* Sur la théorie des moments. B.M.E. 11. 178.

**355.** *C. Spelta.* Sulla determinazione della massa totale e dei momenti principali centrali d'inerzia. G.B. 43. 297.

**356.** *J. Schreier.* Zur graphischen Ermittlung der Trägheits- und Zentrifugalmomente unregelmäßiger ebener Gebilde. Ö.W.Ö.B. 10. 335.

**357.** *M. Mason.* Curves of minimum moment of inertia with respect to a point. A. of M. (2) 7. 165.

Siehe auch 243; 351; 2044; 2381; 3511 bis 3512; 3595—96; 3599.

### Kettenlinien.

**358.** *F. G. Teixeira.* Questão entre Monteiro da Rocha e Anastacio da Cunha. A.S.A.P. 1. 7.

**359.** *H. F. Mac Neish.* On the determination of a catenary with given direction and passing through 2 given points. A. of M. (2) 7. 65.

**360.** *J. Rychter.* Wykréslenie krzywej sznurowej dla obciązenenia jednostajnie zmiennego (Über das Zeichnen der Kettenlinie bei veränderlicher Belastung). C.T.L. 22. 224.

**361.** *C. H. Lees.* On the depression due to a load at the centre of an elastic chain tightly stretched between two points in the same horizontal plane. P.M. (6) 9. 811.

Siehe auch 222; 689; 3516; 3597.

### Dynamik.

Siehe 617; 2774—2879.

### Differentialgleichungen der Dynamik.

**362.** *L. Maurer.* Über die Differentialgleichungen der Mechanik. N.G.G. 1905. 91.

363. *M. Planck.* Das Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik. V.D.P.G. 8. 136.

364. *P. E. B. Jourdain.* Alternative forms of the equations of mechanics. Q.J. 36. 284.

365. *O. Olsson.* Integration af rörelseekvationerna hos en grupp dynamiska problem. A.M.A.F. 2. Nr. 18.

366. *J. Quanjel.* Les équations générales de la mécanique dans le cas des liaisons non holonomes. R.C.M.P. 22. 263.

### Dynamik des Punktes.

367. *G. Pennacchietti.* Intorno a problemi di meccanica riducibili a quadrature. A.G.C. (4) 18 Nr. 7.

368. *L. Orlando.* Sulla velocità minima nella traiettoria di un grave. A.A.P.M. 17. 28.

369. *E. Cesaro.* Sopra alcuni proprietà delle trajettoria in un dato campo di forze. R.A.N. (3) 11. 424.

370. *L. Fejér.* Gleichgewicht im widerstehenden Mittel. D.V.N. 77. 223.

371. *I. V. Meščerskij.* Uravnenija dviženija točki peremennoj massy v obščem slučae (Über die Bewegungsgleichungen eines Punktes von veränderlicher Masse im allgemeinen Falle). B.I.P.P. 1. 77.

Siehe auch 456.

### Zentralbewegung.

372. *K. Bruns.* Die Grundlage der Bewegungslehre, dargestellt an neuen Versuchen über die Fliehkraftgesetze. V.B.P.C.U. 10. 210.

373. *H. Lebesgue.* Sur le problème des aires. S.M. 33. 273.

374. *R. Bérard.* Mouvement sousmis à la loi des aires. Cas où la trajectoire est une conique. B.M.E. 10. 225; 241; 257.

375. *P. J. Suchar.* Sur une transformation réciproque en mécanique. S.M. 33. 210.

376. *L. Tesař.* Ein Beispiel aus der Mathematik und Mechanik zur Lehre von den Größenordnungen. Z.H. 37. 28.

### Gezwungene Bewegung.

377. *F. P. Ruffini.* Del moto di un punto che obbligato a rimanare in un data superficie debba percorrere con una velocità prestabilita una linea data. R.I.B. (2) 9. 146.

378. *J. Horn.* Zur Theorie der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche. A.Gr. (3) 10. 1.

379. *T. Leconte.* Note. R.M.S. 15. 236.

### Pendel.

380. *A. J. Stodolkiewicz.* Kilka uwag o wahadle (Einige Bemerkungen über das Pendel). P.T.W. 41. 510.

381. *A. Prey.* Konvergenzuntersuchungen zum Gesetze der Amplitudenabnahme bei Pendelbeobachtungen. A.A.W. 1906. 245.

382. *E. Collignon.* Théorie élémentaire des petites oscillations d'un pendule simple. N.A. (4) 6. 49.

383. *J. Schofield.* A method of illustrating the laws of the simple pendulum. P.P.S.L. 19. 70.

384. *H. Padé.* Sur un point de la théorie classique du pendule sphérique P.S.B. 1904—05. 31.

385. *A. Allen.* On the adjustment of Kater's pendulum. M.G.S. 3. 307.

386. *A. Prey.* Über eine Vorrichtung zur Vermeidung des Mitschwingens des Stativs beim Doppelpendel. *S.A.W. 114. 993.

387. *L. de la Rive* et *A. le Royer.* Sur le mouvement d'un pendule dont le point de suspension oscille horizontalement. A.S.G. (4) 21. 5.

388. *D. J. Korteweg.* Les horloges sympathiques de Huygens, les phénomènes connexes et les oscillations principales composées que présentent 2 pendules fixées à un mécanisme à un seul degré de liberté. A.N. (2) 11. 273.

Siehe auch 305; 2683; 3595.

### Dynamik des Körpers.

389. *R. de Saussure.* Théorie géométrique du mouvement des corps. A.S.G. (4) 21. 36; 129.

390. *A. Tresse.* Sur le mouvement des corps solides. N.A. (4) 5. 220.

391. *E. Husson.* Sur un théorème de M. Poincaré relativement au mouvement d'un solide pesant. C.R. 141. 821.

392. *de Tilly.* Sur la stabilité du mouvement du cerceau, horsque l'angle de son plan avec la verticale reste petit. A.S.B. 30 A. 159. — *de Sparre* 30 B. 368.

393. *J. W. Sharpe.* The boomerang. P.M. (6) 10. 60.

Siehe auch 77; 319; 402—04.

### Dynamik des Systems.

**394.** *D. Seiliger.* Studii sulla dinamica dei sistemi. G.B. 43. 329.

**395.** *K. Laves.* Die Auffindung einer vollständigen Lösung der Jacobischen partiellen Differentialgleichung für memanische Probleme mittelst einer dynamisch-geometrischenDarstellungsform. A.N.K. 171. 225.

**396.** *P. Voronec.* Einige besondere Fälle der Bewegung eines Systems materieller Punkte unter der Einwirkung reziproker Kräfte (russ.) B.U.K. 1905 d 11. 95.

**397.** *G. K. Suslov.* Ob uravnenijach dviženija pri neuderživajuščich poverchnostej (Über die Bewegungsgleichungen im Falle einseitiger Verbindungen). S. M.M. 25. 375.

**398.** *M. A. E. Stephansen.* Von der Bewegung eines Continuums mit einem Ruhepunkte. A.M.C. 25. 30.

### Drehung.

**399.** *A. de St. Germain.* Note relative au mouvement de rotation. N.A. (4) 6. 10.

**400.** *V. v. Lang.* Über Dreherscheinungen. V.B.T.C.U. 11. 37.

**401.** *R. Marcolongo.* Sul teorema della composizione delle rotazioni instantanee. B.B.L. 9. 1.

**402.** *P. Burgatti.* Sugl'integrali primi dell'equazione del moto d'un corpo pesante intorno a un punto fisso. A.D.M. (3) 12. 81.

**403.** *E. Husson.* Recherches des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe. A.T. (2) 8. 73.

**404.** *O. Olsson.* Symmetriskt skrafformiga kroppars rörelse kring en fast punkt på symmetrie axeln under tyngdkraftens inverkan. T.M. 17 B. 1; 25.

**405.** *J. J. Taudin Chabot.* Simple diagram connecting the various motions in the so called Bohnenbergers Machine. P.M. (6) 9. 722.

**406.** *L. Lecornu.* Sur l'herpolhodie. S.M. 34. 40.

Siehe auch 395; 2900; 3422.

### Kreisel.

**407.** *A. Bilimovič.* Sätze von Jacobi und Sylvester (russ.) B.U.K. 1905 d. 10. 63.

**408.** *L. Benjamin.* Der Schlicksche Kreisel. H.H. 1906. No. 35—37.

**409.** *A. Sterzel.* Das Schlick'sche Schiffskreisel. D.W.B. 6. 106.

**410.** *O. Schlick.* The gyroscopic effect of flywheels on board ship. T.I. N.A. 1904. 1.

### Schwingungen.

**411.** *Guillet.* Entretien des corps vibrants. B.S.F.P. 1905. 19.

**412.** *J. Horn.* Weitere Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen. Z.S. 53. 370.

**413.** *A. Korn.* Sur les vibrations d'un corps élastique dont la surface est en repos. C.R. 142. 508.

**414.** *Lord Rayleigh.* On the production of vibrations by forces of relatively long duration with application to the theory of collisions. P.M. (6) 11. 283.

**415.** *Chassagny.* Sur 2 appareils destinés à l'étude graphique de la composition des mouvements vibratoires de même direction ou de directions rectangulaires. S.F.P. 245—47. 3.

**416.** *J. Schreiner.* Über die Schwingungen eines Stabes mit bifilarer Aufhängung. Z.H. 37. 346.

**417.** *J. Morrow.* On the lateral vibrations of loaded and unloaded bars. P.P.S.L. 20. 170; P.M. (6) 11. 358.

**418.** *J. Morrow.* On the lateral vibrations of uniform and varying sectional area. P.M. (6) 10. 113.

**419.** *S. Guggenheimer.* Über die universellen Schwingungen von Systemen von Rotationskörpern. S.A.M. 35. 265.

**420.** *A. G. Kerkhoven-Wijthoff.* On the small oscillations of a system of 2 hemispheres of which one is resting with its spherical surface on the plane face of the other both rotating with finite velocity about their vertical axes N.A.W. (2) 7. 84.

**421.** *M. Radakowić.* Über die erzwungenen Schwingungen eines materiellen Systems. S.A.W. 114. 877.

**422.** *A. Kriloff.* Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben. M.A. 59. 211.

Siehe auch 118; 224; 386; 659; 2500; 2799.

### Rollbewegung.

**423.** *M. Gebbia.* Sulla integrabilità delle condizioni di rotolamento di un corpo solido sopra un altro e su qualche questione geometrica che vi è connessa. R.C.M.P. 20. 265.

**Relative Bewegung.**

424. *J. Richard.* Sur le mouvement relatif et le mouvement de la terre. G.M. 7. 450.

425. *A. Denizot.* Die Theorie der relativen Bewegung und ihre Anwendung auf Bewegungen auf der Erdoberfläche. P.Z. 6. 677; 745.

426. *P. Rudzki.* Theorie der relativen Bewegung. P.Z. 6. 679.

427. *A. Denizot.* Über die Theorie der relativen Bewegung. P.Z. 6. 745.

428. *A. Denizot.* Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucaultschen Pendelversuchs. A.P.L. (4) 18. 299. — *P. Rudzki.* 1070.

429. *A. Denizot.* Zur Theorie der relativen Bewegung. A.P.L. (4) 19. 868.

430. *F. J. W. Whipple.* The existence of absolute motion. N. 73. 535.

Siehe auch 282; 363; 1743; 1754.

**Stoß.**

431. *Jouguet.* Sur l'accélération des ondes de choc planes. C.R. 142. 831.

432. *H. Seidler.* Stoßversuche mit unvollkommen elastischen Kugeln. Z.P. 19. 145.

433. *V. Neljubov.* Opredelenie prodolžitelnosti udara elektrometričeskim sposobom (Bestimmung der Dauer des Stoßes auf elektrometrischem Wege). J.R.P.C.G. 34. 661.

Siehe auch 414; 516; 518—520; 1319m; n; 3746.

**Reibung.**

434. *A. B. Basset, E. J. Routh, C. B. Clarke, G. H. Bryan.* Fictitious problems in mathematics. N. 72. 56; 78; 102; 127; 175.

435. *V. Fischer.* Ein Beitrag zur Reibungstheorie. P.Z. 7. 425.

436. *S. Paglioni.* Sulla teoria dell' attrito di N. Petroff. A.A.P. (3) 6. Nr. 5.

437. *G. A. Maggi.* Sulla teoria dell' attrito in relazione colla cinetostatica. N.C.P. (5) 10. 240.

438. *A. Lampa.* Über einen Reibungsversuch. A.A.W. 1906. 346.

439. *E. Guyon.* Sur une effet singulier de frottement. C.R. 142. 1055.

440. *de Sparre.* Note au sujet du valet de menuisier. S.M. 34. 41.

**Reibung fester Körper.**

441. *Gégauff.* Nouveaux essais et études sur la force absorbée dans les divers cas de roulement à billes. B.S.I.M. 1905. 20.

442. *B. Weinberg.* Über die innere Reibung des Eises. A.P.L. (4) 18. 81.

Siehe auch 659; 2460; 2779: 3593—94.

**Potentialtheorie.**

443. *J. Kürschák.* Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten Potentials (ung.). M.T.E. 23. 401.

444. *J. Kürschák.* Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials. M.A. 60. 148.

445. *T. Boggio.* Trasformazione di alcune funzioni potenziali. R.C.M.P. 22. 220.

446. *C. W. Oseen.* Om några potentialfunktioner. A.M.A.F. 2 Nr. 6.

447. *A. Korn.* Sur un théorème relatif aux dérivées secondes du potentiel d'un volume attirant. C.R. 142. 199.

448. *E. R. Neumann.* Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie. P. J.G. 37.

449. *K. Stojanović.* Generalizacija Grinove teoreme i Poasonove jednačine (Verallgemeinerung des Greenschen Satzes und der Poison'schen Gleichung). T.A.A. 161. 114.

450. *K. Goldziher.* Beitrag zur Theorie der ersten Randwertaufgabe bei der allgemeinen linearen partiellen elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung. M.A. 60. 532.

451. *H. Levy.* Sur l'équation de Laplace à 2 variables. C.A. 142. 951.

452. *T. Boggio.* Sulle funzioni di Green di ordine *m*. R.C.M.P. 20. 97.

453. *J. Andrade.* La fonction de Green et leurs dérivées sur la frontière. A.S.G. (4) 21. 22.

454. *M. Mason.* The doubly periodic solutions of Poissons equation in 2 independent variables. T.S.M.Am. 6. 159.

455. *L. Orlando.* Sull' integrazione della $\Delta_4$ in un campo chiuso e convesso. R.C.M.P. 21. 342.

456. *L. Fejér.* Das Gleichgewicht eines Punktes in einem widerstehenden Medium (ung). M.F.E. 24. 109.

457. *G. Repetto.* Intorno ad una forma del potenziale di une massa sferica in cui la densità non sia costante. P.M.R. (3) 3. 81; 119.

458. *R. Hargreaves.* Some ellipsoidal potentials, aeolotropic and isotropic. P.M. (6) 11. 568.

459. *L. Matthiessen.* Das Potential eines Ringes auf dem Mittelpunkt eines Querschnittes. Bedingungen des Gleich-

gewichts eines rotierenden flüssigen Ringes. Kosmische Ringnebel. Saturnringe. P.A.M.O.R. 3.

**460.** *T. J. I'A. Bromwich.* Theorems on the logarithmic potential. P.L.M.S. (2) 3. 345.

**461.** *G. Kepinski.* Über die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{m+1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n}{x}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$. M.A. 59. 397.

**462.** *L. Orlando.* Sull' integrazione della $\Delta_4$ in un parallelepipedo rettangolo. R.C.M.P. 21. 316.

Siehe auch 669; 816.

### Attraktion.

**463.** *C. Krediet.* Afleiding van de wet van Newton uit de bewegingswetten van Keppler. W.T. 2. 22.

**464.** *J. Juhel-Rénoy.* Sur les affixes des racines d'un polynome du dégré $n$ et du polynome dérivé. C.R. 141. 700.

**465.** *C. V. L. Charlier.* Über die Attraktion zweier fester Zentra auf einen beweglichen Punkt und die Beziehung dieses Problems zum Problem der 2 Körper. A.M.A.F. 2 Nr. 29.

**466.** *G. Morera.* Sulla attrazione degli elissoidi e sulle funzioni armoniche elissoidali di 2. spezie. M.A.T. (2) 55. 1.

**467.** *de Salvert.* Mémoire sur l'attraction du parallélepipède ellipsoidal. A. S.B. 30. A. 157.

**468.** *E. Steinitz.* Über die Anziehung hyperboloidischer Schalen. Cr. 129. 295.

### Gravitation.

**469.** *F. J. B. Cordeiro.* Gravitation. P.A. 13. 8.

**470.** *A. Kleiner.* La gravitation. A.S.G. (4) 20. 420.

**471.** *V. Crémieu.* Recherches sur la gravitation. S.F.P. Nr. 235—237; B.S. F.P. 1905. 103.

**472.** *V. Crémieu.* Recherches expérimentales sur la gravitation. J.P. (4) 5. 25. B.S.F.P. 1905. 485.

**473.** *C. Morris.* The problem of gravitation. J.F.I. 159. 115.

**474.** *A. J. Stodolkiewicz.* O zmianiach natężenia siły ciężości (Die Veränderungen der Intensität der Schwerkraft). P.T.W. 41. 392.

**475.** *A. Kleiner.* La gravitation se transmet-elle par le milieu? A.S.G. (4) 20. 420.

**476.** *G. Sagnac.* Une relation possible entre la radioactivité et la gravitation. J.P. (4) 5. 455.

**477.** *G. H. Darwin.* The analogy between Lesage's theory of gravitation and the repulsion of light. P.R.S.L. 76. 387.

**478.** *T. Tommasina.* Sur la nature et la cause de la gravitation universelle. L'éther-électricité et la constante électrostatique de gravitation. L.M.G. 5. 112; 123; 135; 142; 158.

**479.** *R. Gans.* Gravitation und Elektromagnetismus. P.Z. 6. 803; D.V.M. 14. 578.

**480.** *F. Wacker.* Über Gravitation und Elektromagnetismus. P.Z. 7. 300.

Siehe auch 279; 610; 1721; 2938.

### Hydrostatik.

**481.** *Thirion.* A propos d'une expérience d'hydrostatique. A.S.B. 30. A. 175.

**482.** *P. Duhem.* Le principe de Pascal. R.G.O. 16. 599.

**483.** *H. T. Simon.* Die Gestalten der Flüssigkeiten. J.P.V.F. 1900—01. 38.

Siehe auch 871.

### Hydrodynamik.

**484.** *G. Jäger.* Neue hydrodynamische Experimente. S.V.N.M. 45 Nr. 14.

**485.** *H. S. Hele Shaw.* The motion of a perfect liquid. A.I. 7. 7.

**486.** *E. Jouguet.* Sur la similitude dans le mouvement des fluides. J.E.P. (2) 10. 79.

**487.** *H. van der Mensbrugghe.* La loi de Lenz appliquée à une masse liquide en mouvement. A.S.B. 30. A. 81.

**488.** *G. van der Mensbrugghe.* Sur un paradoxe hydrodynamique. C.T.B. 1902. 290.

**489.** *G. Zemplén.* Kriterien für die physikalische Bedeutung der unstetigen Lösungen der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen. M.A. 59. 437.

**490.** *E. H. Amagat.* Sur la pression interne des fluides et l'équation de Clausius. C.R. 142. 371.

**491.** *V. Bjerknes.* Recherche sur les champs de force hydrodynamiques. A. M. 30. 99. A.S.G. (4) 20. 325; 473.

**492.** *F. K. Meythaler.* ber die Bewegungsart des fließenden Wassers. W.W.B. 2. 223.

**493.** *E. Blomqvist.* Vattnets medelhastighet i naturliga vattendrag. T.F.T. 1901. 161.

**494.** *F. E. Nipher.* The elimination of velocity effects in measuring pressures in a fluid stream. P.P.S. 45. 77.

495. *Narrow*. Effect of depth of water on speed. P.W.L. 7. 138.—*Marriner* 141.

496. *F. R. Sharpe*. On the stability of the motion of a viscous liquid. T.S. M.Am. 6. 496.

497. *W. Stekloff*. Sur le problème de mouvement d'un ellipsoïde fluide homogène dont toutes les parties s'attirent suivant la loi de Newton. C.R. 141. 999.

498. *W. Stekloff*. Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoide fluide de révolution qui ne change pas sa figure pendant le mouvement. C.R. 142. 77.

Siehe auch 1674; 3318—19; 3489.

### Wellenlehre.

499. *C. Stumpf*. Über zusammengesetzte Wellenformen. Z.P.P. 39. 241.

500. *A. G. Rossi*. Un'esperienza da lezione sul moto ondulatorio. N.C.P. (5) 11. 231.

501. *d'Adhémar*. Remarques sur l'intégration de l'équation des ondes. A. S.B. 30. A. 160.

502. *Lord Kelvin*. On the frontal rear of a free procession of waves in deep water. P.R.S.E. 25. 311.

503. *R. F. Gwyther*. The range of progressive waves of finite amplitude in deep water. S.P.M. 50 Nr. 8.

504. *R. F. Gwyther*. On the range of Stokes deep water waves. P.M. (6) 11. 374.

505. *W. V. Ekman*. On stationary waves in running waters. A.M.A.F. 3 Nr. 2.

506. *Lord Kelvin*. On deep-water two-dimensional waves produced by any initiating disturbance. P.R.S.E. 25. 185.

507. *Lord Kelvin*. Deep water shipwaves. P.M. (6) 9. 733.

508. *Lord Kelvin*. Deep-water shipwaves. P.R.S.E. 25. 562; 1060.

509. *Lord Kelvin*. Deep sea shipwaves. P.M. (6) 11. 1.

510. *E. Bertin*. Les vagues de la mer, leurs dimensions et les lois du mouvement de l'eau. R.S. (5) 6. 193; 220.

511. *J. Boussinesq*. Propagation du mouvement autour d'un centre dans un milieu élastique, homogène et isotrope: étude de l'onde corrélative aux variations de densité. C.R. 142. 480.

512. *J. Boussinesq*. Propagation du mouvement autour d'un centre dans un milieu élastique homogène et isotrope: étude de l'onde produite sans changements de densité. C.R. 142. 542.

513. *J. Boussinesq*. Propagation du mouvement autour d'un centre dans un milieu élastique, homogène et isotrope: caractères de l'onde totale. C.R. 142. 609.

514. *J. Boussinesq*. Propagation des ondes le long d'une colonne liquide compressible, se composant de filets à vitesses inégales et contenue dans un tuyau élastique horizontal sous tension longitudinale. A.E.N. (3) 22. 349.

515. *J. W. Nicholson*. On the diffraction of short waves by a rigid sphere. P.M. (6) 11. 193.

516. *P. Duhem*. Sur les quasi-ondes de choc et la distribution des températures en ces quasiondes. C.R. 141. 824.

517. *P. Duhem*. Quelques lemmes relatifs aux quasi-ondes. C.R. 142. 377.

518. *P. Duhem*. Sur une inégalité importante dans l'étude des quasi-ondes de choc. C.R. 142. 491.

519. *P. Duhem*. Sur les quasi-ondes de choc au sein des fluides mauvais conducteurs de la chaleur. C.R. 142. 612.

520. *P. Duhem*. Sur les quasi-ondes de choc au sein d'un fluide bon conducteur de la chaleur. C.R. 142. 750.

Siehe auch 431; 522—523; 878; 984; 1319 m; n; 2022; 2024—25; 2027—28; 2030; 2048; 3437.

### Bewegung von Flüssigkeiten in Röhren.

521. *L. Rehm*. Formeln und Tabellen zur Berechnung der Geschwindigkeiten, Wassermengen, Lichtweiten und Druck- oder Gefällverluste für Wasserleitungen aus Röhren von Fe, Zement und Ton. H.T.B. 2. 61.

522. *A. Boulanger*. Théorie de l'onde solitaire qui se propage le long d'un tube élastique horizontal. C.R. 141. 1001.

523. *A. Boulanger*. Extinction de l'onde solitaire propagée le long d'un tube élastique horizontal. C.R. 142. 388.

524. *T. A. Noble*. The flow of water in wood pipes. T.A.S.C.E. 49. 112.

525. *M. T. Huber*. O najwazniejszgo technicznie wynikach teoretycznic hydrokinetyki, ze szczególnew uwzględnienie zagadnień ruchu wody w rzekach i kanalach (Über die Folgerungen aus der theoretischen Hydrokinetik, welche für die Anwendungen eine praktische Bedeutung haben, insbesondere diejenigen, welche sich auf die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen beziehen). C.T.L. 21. 47; 61; 73; 84; 99; 117; 134.

**526.** *C. H. Tutton.* The laws of river flow. J.A.E.S. 28. 32.
**527.** *W. Heubner.* Das Gesetz von Poiseuille. D.V.N. 77. 51.
**528.** *G. W. Brown.* River gauging with rod floats. W.E.M. 6. 126.
Siehe auch 493—95; 2070; 2379; 2477; 3320; 3324; 3329.

### Ausfluß von Flüssigkeiten.

**529.** *W. Whited.* The flow of semifluids through orifices. P.E.S.W.P. 17. 113.
**530.** *Hertzsprung.* Calculators for the velocity of discharge of fluids from pipes. J.G.L. 89. 489.
Siehe auch 3642.

### Gleichgewicht rotierender Flüssigkeiten.

**531.** *A. Liapunov.* Über ein Problem von Čebychev (russ.). A.P.M. (8) 17 Nr. 3.
Siehe auch 459.

### Wirbel.

**532.** *V. Bjerknes.* Sur la formation des tourbillons dans un fluide sans frottement avec une application à l'analogie des phénomènes hydrodynamiques et électrostatiques. A.S.G. (4) 20. 268.
**533.** *L. S. da Rios.* Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque. R.C.M.P. 22. 117; 121.
**534.** *J. Weingarten.* Zur Theorie der Wirbelringe. N.G.G. 1906. 81.
Siehe auch 3323.

### Reibung der Flüssigkeiten.

**535.** *P. Koturnicky.* Razsčet raboty dlja opytov Joule'ja nad treniem židkostej (Berechnung der mechanischen Arbeit bei den Versuchen Joules mit Hilfe der Reibung der Flüssigkeiten). J.R.P.C.G. 34. 497.
**536.** *K. Beck.* Beiträge zur Bestimmung der relativen innern Reibung von Flüssigkeiten. Z.P.C. 48. 641.
**537.** *P. v. Schröder.* Über Erstarrungs- und Quellungserscheinungen von Gelatine. Z.P.C. 45. 85.
Siehe auch 1266; 2334; 3325.

### Viskosität.

**538.** *F. T. Trouton.* The motion of viscous substances. P.R.I. 17. 486.
**539.** *Schall.* Die Zähigkeit unterkühlter Lösungen. Z.E. 11. 769.
**540.** *C. Schall.* Über die Zähigkeit unterkühlter Lösungen. D.V.N. 77. 92.
**541.** *C. Schall.* Über die Zähigkeit unterkühlter Lösungen in Thymol. P.Z. 7. 645.
**542.** *A. Findlay.* The viscosity of liquid mixtures at the temperature of their boiling points. R.B.A. 1905. 365.
**543.** *A. Kling.* La viscosité dans des rapports avec la constitution chimique. R.G.O. 17. 271.
**544.** *H. C. Jones* and *E. C. Bingham.* The conductivity and viscosity of solutions of certain salts in mixtures of acetone with methyl alcohol, with ethyl alcohol and water. A.C.J. 34. 481.
**545.** *H. Bouasse.* Sur les métaux du type visqueux. A.T. (2) 7. 383.
**546.** *K. Carrière.* Sur les déformations de l'alliage eutectique plomb-étain et les métaux visqueux.. A.T. (2) 7. 317.
Siehe auch 496; 662; 670; 1498; 1688.

### Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten.

**547.** *A. G. Greenhill.* The motion of a solid in an infinite liquid. A.J.M. 28. 71.
**548.** *F. Willaert.* Sur la suspension de sphères légères dans un jet d'eau. A.S.B. 30. A. 129.
**549.** *A. L. Holz.* Über Flüssigkeitsbewegungen, welche durch Rotation fester Körper verursacht werden. A.P.L. (4) 18. 387.
**550.** *O. Olsson.* Über die Bewegung symmetrisch-schraubenförmigerKörperin Flüssigkeiten. A.M.A.F. 2 Nr. 25.
Siehe auch 583.

### Aerodynamik.

**551.** *Marmor.* Appareil de démonstration de la loi de Mariotte. Co. 47. 470.
**552.** *R. Gostkowski.* Erörterung über die Menge mechanischer Arbeit, welche erforderlich ist, um einen Körper in der Luft schwebend zu erhalten (poln.). P.T.W. 43. 100; 426. — *Z. Straszewicz, K. Monikowski* 324.
**553.** *H. Fricke.* Über einen Versuch der Gebrüder Weber, transversale Lufterscheinungen betreffend. V.D.P.G. 8. 248.
**554.** *G. Melander.* Über den Einfluß der Wand der Gefäße bei Studien über Gase. A.F.S. 33 Nr. 10.

**555.** *Shattuck.* Flow of gas in pipes. J.G.L. 90. 835.
**556.** *R. Hausse.* Von dem Ausfluß der Preßluft. J.B.H. 1903. 44.
**557.** *Ringelmann.* Sur le travail mécanique fourni par les moulins à vent. C.R. 141. 688.
**558.** *B. Orlowski.* Teorya naukowa latawca (Über die wissenschaftliche Theorie des Drachen). W.W. 22. 257; 276; 278; 23. 561; 584.
**559.** *G. H. Grosvenor.* The tetrahedral kites of Dr. A.G. Bell. P.S.M. 64. 13.
**560.** *E. Cederström.* Über die Anemometerprüfungsmethoden. M.Z. 22. 418.
**561.** *A. Ždímal.* Proudeni vzduchu komínem (Luftströmungen in Schornsteinen). C. 35. 78.
**562.** *R. M. Neilson.* The effects of wind pressure on structures. E.M.N. 24. 548.
**563.** *H. L. Bochet.* Sur le résultat de l'étude expérimentale d'un ventilateur centrifuge. C.R. 142. 990.

Siehe auch 2409; 2440; 2704—42; 3291; 3653.

### Flugbewegung.

**564.** *E. Guarini.* The fly of bird mechanically studied. S.A. 89. 256.
**565.** *V. Nietzsch.* Über den Vogelflug. M.S. 42. 82.
**566.** *Angele.* Neues über Winddruck und Vogelflug. J.U. 12. 21.
**567.** *W. Wright.* Experiments and observations in soaring flight. J.W.S.E. 8. 400.

Siehe auch 552; 558—559; 767; 2505; 2740.

### Luftwiderstand.

**568.** *G. Junge.* Luftwiderstand beim freien Fall. Z.P. 19. 169.

Siehe auch 2706.

### Reibung von Gasen.

**569.** *G. Zemplén.* Bestimmung des Koeffizienten der inneren Reibung der Gase nach einer neuen experimentellen Methode. A.P.L. (4) 19. 783.
**570.** *M. Thiesen.* Über die Reibung von Gasgemischen. V.D.P.G. 8. 231.
**571.** *Berneck.* Über den Reibungswiderstand der Luft. Z.H.H. 9. 239.
**572.** *J. L. Hogg.* Friction and force [illegible] transpiration as dependent on [illegible] in gases. P.A.Bo. 42. 115.

**573.** *S. Chella.* Misura del coefficiente di attrito interno dell' aria a basse temperature. R.A.L.R. (5) 15. 119.
**574.** *S. Chella.* Messung des innern Reibungskoeffizienten der Luft bei niedriger Temperatur. P.Z. 7. 546.
**575.** *S. Chella.* Über einen Apparat zur absoluten Messung des Koeffizienten der inneren Reibung der Gase. P.Z. 7. 196.
**576.** *P. Tänzler.* Über die Koeffizienten der innern Reibung für Gemische zwischen Argon und Helium. V.D.P.G. 8. 222.

### Äußere Ballistik.

**577.** *S. A. Corey.* The ballistic problem. M.M.F. 12. 121.
**578.** *R. v. Portenschlag-Ledermayr.* Neue ballistische Tabellen. M.A.G. 24. 563.
**579.** *J. Kozák.* Berechnung der allgemeinen Schießtafeln und deren Benutzung zur Lösung von Aufgaben aus der Schießlehre. M.A.G. 23. 651; 893.
**580.** *A. v. Obermayer.* Über den Einfluß der Erdrotation auf die Bewegung der Geschosse. M.A.G. 32. 707.
**581.** *Figari.* L'influenza della rotazione diurna terrestre sul tiro delle artiglierie a grandi distanze. A.A.G. 1905. D. 80.
**582.** *B. Schöffler.* Gesetz der zufälligen Abweichungen. Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Anwendung auf die Theorie des Schießens. M.A.G. 23. 97; 366.
**583.** *M. Gildemeister* und *H. Strehl.* Über den Geschwindigkeits- und Energieverlust von Geschossen im Wasser. A.P.L. (4) 18. 567.
**584.** *J. Kozák.* Bestimmung von Geschoßgeschwindigkeit mittels aperiodischer Kondensatorentladungen. M.A.G. 24. 863.
**585.** *Rusch.* Die Drallfrage bei den Schiffsgeschützen. M.A.G.S. 34. 29.
**586.** *Gildemeister* und *Strehl.* Die explosiven Wirkungen schnellfliegender Geschosse. P.G.K. 46. 127.
**587.** *F. Neesen.* Weitere Versuche über die photographische Bestimmung der Geschoßbahnelemente. V.D.P.G. 8. 16.
**588.** *Freeth.* Method of designing projectils. J.R.A. 32. 404.
**589.** *Denecke.* Über Planschießen. K.Z. 8. 76.
**590.** *Kozák.* Über ballistische Apparate. M.A.G. 1905. 1.

**591.** *P. af Bjerkén.* Ballistische Messungen mit stark gedämpften Galvanometern. A.M.A.F. 2. Nr. 13.
Siehe auch 1394; 1683; 2640; 2694; 2765.

### Innere Ballistik.

**592.** *Journée.* Recul du fusil de chasse et du pistolet automatique Browning. R.A. 67. 166.
**593.** *W. Wolff.* Über die Geschoßgeschwindigkeit nahe vor der Mündung. Z.G.S.S. 1.
**594.** *W. Wolff.* Über die Geschoßgeschwindigkeit nahe vor der Gewehrmündung. K.Z. 8. 481.

### Physiologische Mechanik.

**595.** *J. Joteyko.* Sur les écarts entre la courbe calculée et la courbe observée à l'ergographe. B.A.B. 1906. 233.
Siehe auch 318.

### Mathematische Physik.

**596.** *R. C. Maclaurin.* The scope and method of mathematical physics. R.A.A. 9. 95.
**597.** *F. Klein.* Probleme des mathematisch-physikalichen Hochschulunterrichtes. Z.H. 36. 451.
**598.** *A. Buhl.* Sur le caractère arbitraire des développements des solutions même uniques des problèmes de la physique mathématique et sur de nouvelles propriétés des séries trigonometriques généralisées. C.R. 143. 162.

### Differentialgleichungen der Physik.

**599.** *L. Koenigsberger.* Über die Differentialgleichungen der mathematischen Physik. S.A.B. 1905. 841.
**600.** *W. Wien.* Über die partiellen Differentialgleichungen der mathem. Physik. D.V.M. 15. 42. — *E. Haentzschel* 219.
**601.** *W. Wien.* Über die partiellen Differentialgleichungen der mathem. Physik. P.Z. 7. 16.
**602.** *W. Wien.* Über die partiellen Differentialgleichungen der Physik. D.V.N. 77. 9.
**603.** *J. Hadamard.* Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. B.U.P. 13. 49.

### Geschichte der Physik.

**604.** *C. Barus.* The progress of physics in the 19. century. S. (2) 22. 353; 385.
**605.** *P. Mezzetti.* La fisica di Galileo. R.F.M. 7B. 221.
Siehe auch 609.

### Prinzipien der Physik.

**606.** *J. Kossonogov.* Grundlagen der Physik (russ.). B.U.K. 1905. b 9.
**607.** *A. A. Veblen.* The relation of physics to the other material sciences. P.I.A.S.D. 9. 21.
**608.** *L. Silberstein.* Theorya operatorów fizycznych (Die Theorie der Operatoren in der Physik). P.F.W. 5. 424.
**609.** *P. de Heen.* La succession des étapes de l'évolution des sciences physiques et les théories hybrides modernes. B.A.B. 1905. 679.
**610.** *A. E. Haas.* Die Beziehungen zwischen dem Newtonschen und dem Coulombschen Gesetz. P.Z. 7. 658.
**611.** *A. Americo.* Due esperienze da scuola sul principio di Doppler. N.C.P. (5) 10. 393.
**612.** *L. Fredey.* Sur la signification exacte du principe de Carnot. C.R. 142. 513.
Siehe auch 1420; 2938.

### Materie.

**613.** *O. Lodge.* Modern views on matter. P.S.M. 63. 289.
**614.** *C. A. Laisant.* Sur l'évolution de la matière. E.M. 8. 26.
**615.** *J. Fraser.* A theoretical representation leading to general suggestions bearing on the ultimate constitution of matter and ether. P.R.S.E. 24. 26.
**616.** *J. H. Jeans.* On the partition of energy between matter and aether. P.M. (6) 10. 91.
**617.** *J. H. Jeans.* On the application of statistical mechanics to the general dynamics of matter and ether. P.R.S.L. 76. 296.
**618.** *G. Milhaud.* Matière et mouvement. Bases d'une mécanique objective opposée à la mécanique classique. R.G.O. 16. 797.
**619.** *H. C. Jones.* The electric nature of matter and radioactivity. E.R. 47. 426; 462; 498; 534; 570; 618; 654; 690; 726; 774; 810; 846; 882; 930; 966; 1002.
Siehe auch 647; 797; 831; 3583.

### Energie.

**620.** *A. Podwysocki.* Über das Gesetz der Erhaltung der Energie (poln.) W.W. 24. 337.

**621.** *H. v. Helmholtz.* O sochranenii sily (Über die Erhaltung der Kraft). B. L.B. 6. Nr. 1; Nr. 3. 49.

**622.** *H. Kleinpeter.* The principle of the conservation of energy. Mon. 14. 378.

**623.** *W. F. Magie.* The partition of energy. S. (2) 23. 161.

Siehe auch 284; 616; 800; 811; 847; 997; 1183; 1219; 1340; 3477; 3480.

### Atomtheorie.

**624.** *J. H. Jeans.* On the constitution of the atom. P.M. (6) 11. 604.

**625.** *J. P. Alexander.* The new corpuscular hypothesis. A.I. 7. Nr. 13.

**626.** *A. A. Robb.* The resolution of the corpuscle. N. 73. 321.

**627.** *A. S. Mackensie.* The question of the divisibility of the atom. J.F.I. 153. 451.

**628.** *J. Traube.* On the space occupied by atoms: the theories of Th. W. Richards and J. Traube. P.M. (6) 10. 340.

**629.** *Lord Kelvin.* Plan of an atom to be capable of storing an electrion with enormous energy for radioactivity. P.M. (6) 10. 695.

**630.** *J. Stark.* Der Dopplereffekt bei den Kanalstrahlen und die Spektra der positiven Atomionen. P.Z. 6. 892.

**631.** *J. Fraser.* Suggestions towards a theory of electricity based on the bubble atom. P.R.S.E. 25. 680.

Siehe auch 825; 842; 1031; 1412; 1540; 1887; 3582.

### Äther.

**632.** *D. B. Brace.* The negative results of second and third order tests on the „aether drift" and possible first order methods. P.M. (6) 10. 71.

**633.** *T. H. Havelock.* On surfaces of discontinuity in a rotationally elastic medium. P.M. (6) 10. 603.

**634.** *Lord Kelvin.* On the statistical kinetic equilibrium of ether in ponderable matter at any temperature. P.M. (6) 10. [illegible]

**635.** *Lord Kelvin.* On the kinetic and statistical equilibrium of ether in ponderable matter at any temperature. R. [illegible]

Siehe auch 478; 615—17; 797.

### Absolutes Maßsystem.

**636.** *J. [illegible].* Absolute eenheden en dimensieformules. N.T.N.I. 65. 74.

**637.** *E. B. Rosa* and *N. E. Dorsey.* The ratio of the electromagnetic and electrostatic units. P.R. 22. 367.

Siehe auch 2939; 3502.

### Kompression.

**638.** *T. W. Richards* und *W. N. Stull.* Über eine neue Methode, Zusammendrückbarkeiten zu bestimmen. Z.P.C. 49. 1.

**639.** *Lord Rayleigh.* Über die Kompressibilität von Gasen zwischen einer Athmosphäre und einer halben Athmosphäre Druck. Z.P.C. 52. 705.

Siehe auch 678; 685; 890.

### Spezifisches Gewicht.

Siehe 1192; 1228; 1418; 2153.

### Aggregatzustände.

**640.** *E. Bose.* Zur Kinetik extremer Aggregatzustände. Z.E. 11. 742.

**641.** *C. E. Guillaume.* La physique des solides d'après les idées de M. Tammann. B.S.F.P. 1905. 110.

**642.** *G. Tammann.* Ob otnošenijach meždu kristalličeskim i židkim sostojanijami (Über die Beziehungen zwischen dem kristallisierten und dem flüssigen Zustand). J.R.P.C.G. 34. 67.

**643.** *A. Schükarew.* Untersuchungen über den Zustand gasförmig-flüssig. Z. P.C. 55. 99; 129.

### Änderung des Aggregatzustandes.

**644.** *G. Tammann.* Die Abhängigkeit des Schmelzpunktes beim Glaubersalz von Druck. Z P.C. 46. 818.

**645.** *C. Doelter.* Über Silikatschmelzen. D.V.N. 77. 100.

**646.** *W. Plato.* Erstarrungserscheinungen an anorganischen Salzen und Salzgemischen I. Z.P.C. 55. 721.

**647.** *G. Quincke.* The transition from the liquid to the solid state and the foam structure of matter. P.R.S.L. 78. 60.

**648.** *W. Nernst* und *H. Hausrath.* Zur Bestimmung der Gefrierpunkte verdünnter Lösungen. A.P.L. (4) 17. 1018.

**649.** *M. Wildermann.* Zur Bestimmung der Gefrierpunkte verdünnter Lösungen. A.P.L. (4) 19. 432.

**650.** *S. M. Johnston.* Note on the boiling points of aqueous solutions. P. R.S.E. 25. 952.

**651.** *H. Moissan.* Sur la distillation des corps simples. A.C.P. (8) 8. 145.

**652.** *H. Alt.* Über die Verdampfungswärme des flüssigen *N* und deren Änderung mit der Temperatur. A.P.L. (4) 19. 739.

**653.** *A. Vyšeslavcev.* O kalorimetričeskom opredelenii napravlenija krivoj plavlenija (Über die kalorimetrische Bestimmung der Form der Fusionskurve). J.R.P.C.G. 34. 41.

Siehe auch 537; 542; 742; 924—26; 1191; 1206—07; 1211; 1278—79; 1306; 2036; 2236; 3644—45.

### Molekularphysik.

**654.** *O. Biermann.* Über die dichteste Lagerung gleicher Kreise in einem Kreise. Z.S. 53. 428.

Siehe auch 893; 898; 1593; 1634.

### Molekulargröße.

Siehe 1071; 2250.

### Molekularattraktion.

**655.** *J. E. Mills.* Molecular attraction. J.P.C. 10. 1.

### Adhäsion.

**656.** *Michaëlis.* Die Adhäsions oder Haftfestigkeit des Eisens im Eisenbeton. Z.U.B.B. 4. 91.

**657.** *Liebau.* Klemmfestigkeit des Fe im Beton. T.I.Z. 29. 715.

**658.** *Liebau.* Klemmfestigkeit des Holzes im Beton. Z.U.B.B. 4. 124.

**659.** *A. Pacinotti.* Circa alle influenze della temperatura, delle vibrazioni, della umidità, dell' elettrolisi e della untuosità sull' adesione e sull' attrito nello sfregamento fra vari corpi e sul lavoro di alcuni aratri. R.A.L.R. (5) 15A. 82.

### Absorption.

**660.** *M. W. Travers.* The law of distribution in the case in which one of the phases possesses mechanical rigidity: Absorption and occlusion. P.R.S.L. 78. 9.

**661.** *A. Christoff.* Über die Abhängigkeit der Absorption von der Oberflächenspannung. Z.P.C. 55. 622.

**662.** *M. W. Tate.* On the correction between the critical temperatures of gases and vapours and their absorption coefficients and the viscosity of the solvent medium. M.N.I. 1. Nr. 4.

**663.** *A. Hantzsch.* Über Absorptionsgeschwindigkeiten zwischen festen und gasförmigen Stoffen. Z.P.C. 48. 289.

**664.** *L. J. Briggs.* On the adsorption of water vapour and of certain salts in aqueous solution by quartz. J.P.C. 9. 617.

**665.** *L. W. Winkler.* Gesetzmäßigkeiten bei der Absorption der Gase in Flüssigkeiten. Z.P.C. 55. 344.

**666.** *A. Christoff.* Untersuchungen über die Absorption des $CO_2$ in wäßrigen Salzlösungen und binären Flüssigkeitsgemischen. Z.P.C. 53. 321.

**667.** *P. N. Evans.* Adsorption of dissolved substances. J.P.C. 10. 290.

Siehe auch 858.

### Elastizität.

**668.** *S. A. Maggi.* Sull' interpretazione del nuovo teorema di Volterra sulla teoria dell' elasticità. R.A.L.R. (5) 14B. 409.

**669.** *E. Waelsch.* Über Binäranalyse und elastische Potentiale. A.A.W. 1906. 158.

**670.** *R. Reiger.* Über die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes bei zähflüssigen und festen Körpern. A.P.L. (4) 19. 985.

**671.** *Izod.* Behaviour of materials of construction under pure shear. P.W.L. 7. 1365.

**672.** *E. Cesàro.* Sul problema dei suoli elastici. R.A.N. (3) 12. 199.

**673.** *Nitzsche.* Über Einflußlinien. D.T.Z.B. 22. 149.

**674.** *C. Chree.* Note on the determination of the volume elasticity of elastic solids. P.R.S.L. 74. 518.

**675.** *F. Jung.* Über die Ableitung der Eulerschen Knickungsformel. A.Gr. (3) 10. 201.

**676.** *C. Bach.* Versuche über die Verschiedenheit der Elastizität von Fox- und Morison-Wellrohren. M.F.I. 29. 75.

**677.** *C. Bach.* Versuche über die Elastizität von Flammrohren mit einzelnen Wellen. M.F.I. 33. 39.

**678.** *F. D. Adams* and *E. G. Coker.* An investigation into the elastic properties of rocks, more especially with reference to cubic compressibility. A.J.S. (4) 22. 95.

**679.** *G. Ercolini.* Curve di trazione dei fili metallici sottili. N.C.P. (5) 11. 125.

**680.** *J. Perry.* Winding ropes in mines. P.M. (6) 11. 107.

**681.** *A. Goy.* Sur l'élasticité des tissus organiques. C.R. 142. 1158.

Siehe auch 195; 422; 432; 511—14; 522—23; 633; 1220—21; 2011; 2020; 2392; 2880—2937; 3320.

**Elastizitätsmodul.**

682. *S. Kusakabe.* Modulus of elasticity of rocks. J.U.T. 20. Nr. 9.

683. *S. Kusakabe.* Kinetic measurements of the modulus of elasticity for 158 specimens of rocks. J.U.T. 20. Nr. 10.

684. *S. J. Rutgers* en *L. A. Sanders.* Over den elasticiteits coefficient voor druk bij betonijzer brekeningen. J.W. 18. 366; 385; 514; 542; 573.

685. *W. Schmidt.* Über eine Methode zur Bestimmung des adiabatischen Kompressionsmoduls von Flüssigkeiten. S. A.W. 114. 945.

Siehe auch 674; 728.

**Elastisches Gleichgewicht.**

686. *A. Korn.* Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas où les déplacements des points de la surface sont donnés. C.R. 142. 334.

687. *L. Orlando.* Alcune applicazioni dell' integrale di Fourier. R.A.L.R. (5) 15. 205.

688. *V. Volterra.* Sull' equilibrio dei corpi elastici più volte connessi. N.C. P. (5) 10. 361; 11. 5; 144; 205.

689. *S. Kanda.* Elastische Kettenlinie (japan.). J.E.S.T. 1903. 923.

690. *D. de Francesco.* Sul moto di un filo e sull' equilibrio di una superficie flessibile e inestensibile. A.A.N. (2) 12. Nr. 5—6.

691. *O. Tedone.* Sui problemi d'equilibrio elastico a 2 dimensioni. A.A.T. 41. 86.

692. *J. Dougall.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate. T.R.S.E. 41. 129.

693. *J. Fredholm.* Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité. A.M.A.F. 2. Nr. 28.

694. *G. Lauricella.* Sull' integrazione delle equazioni dell' equilibrio dei corpi elastici isotropi. A.D.M. (3) 11. 269

695. *A. Leon.* Über das elastische Gleichgewicht einer Hohlkugel bez. eines Hohlzylinders, wenn auf die äußere und innere Oberfläche ein gleichmäßiger Druck $p_a$ bez. $p_i$ wirksam ist, unter Berücksichtigung von Gliedern in den Spannungen, die bezüglich der Deformationselemente von 2. Ordnung sind. A.A.W. 1906. 51.

Siehe auch 2880.

**Elastische Spannung.**

696. *A. Timpe.* Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion. Z.S. 52. 348.

697. *L. J. Johnson.* The determination of unit stresses in the general case of flexure. J.A.E.S. 28 251.

698. *Lord Kelvin.* An new specifiying method for stress and strain in elastic solids. P.R.S.E. 24. 97.

699. *E. Schulze.* Die Spannungen im festen Körper. Z.P. 19. 18.

700. *L. A. Sanders.* Schuifspanningen in cement-ijzeren balken of platen. T. W.G. 5. 218; 225; 234.

701. *Turley.* Wichtige Beziehungen zwischen den Spannungen und den Abmessungen von Eisenbetonquerschnitten und deren Anwendung. Z.Ü.B.B. 4. 115.

702. *C. Chree.* On the stresses in the Earths crust before and after the sinking of a bore-hole. P.M. (6) 9. 785.

703. *A. Leon.* Spannungen und Formänderungen rotierender Kugelschalen. Z. S. 53. 144.

704. *Stupecký.* Zur Ermittlung von Kantenpressungen bei Sperrmauern. Ö. W.Ö.B. 11. 515.

705. *Landmann.* Ein Beitrag zur Ermittlung der Randspannungen in Fabrikschornsteinen. B.M.B. 1. 131.

Siehe auch 695; 707; 729; 734—35; 746; 2410—11; 2780; 2882—2901.

**Elastische Deformation.**

706. *Zschetzsche.* Zur Frage: Formänderungsarbeit bei Torsion. Ö.W.Ö.B. 11. 91; — *Huber* 346; — *Pfeffer* 485.

707. *M. Huber.* Właściwa praca odkształcania jako miara wytężenia materyalu (Die spezifische Arbeit der Deformation als Maß der Spannung). C.T.L. 22. 38; 49; 61; 80.

708. *R. Girtler.* Über die kubische Dilatation und ihre Beziehung zur Beanspruchung isotroper elastischer Körper. Z.S. 53. 181.

709. *Bouasse* et *Berthier.* Sur les allongements par flexion. J.P. (4) 4. 821.

710. *V. Volterra.* Sulle distorsioni generate da tagli uniformi. R.A.L.R. (5) 14 B. 329.

711. *G. H. Gulliver.* Permanent deformation of metal. P.I.M.E. 1. 141.

712. *T. Boggio.* Sulla deformazione di un elissoide elastico. R.A.L.R. (5) 15 A. 104.

713. *T. Weitbrecht.* Über die elastische Deformation eines kreisförmigen Ringes. Z.S. 52. 383.

714. *C. A. Scheltema.* Depaling der vormverandering van een ring. I.W. 19. 169.

**715.** *C. Riquier.* Sur l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles auquel conduit l'étude des déformations finies d'un milieu continu. A. E. N. (3) 72. 425.

**716.** *W. C. Kernot.* A graphical method of determining the change of framed structures. R. A. A. 9. 652.

Siehe auch 546; 695; 698; 703; 726; 733; 1221; 2379; 2384; 2393; 2902—05.

### Biegungselastizität.

**717.** *G. Ercolini.* Ricerche intorno alla flessione nei fili metallici. N. C. P. (5) 11. 243.

**718.** *E. Almansi.* Sulle flessioni dei cilindri. R. C. M P. 21. 86.

Siehe auch 709; 728; 2381; 2393; 2405; 2492—93; 2906—07; 2914; 3204—06; 3214; 3746.

### Torsionselastizität.

**719.** *A. Föppl.* Über die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. S. A. M. 35. 249.

**720.** *G. Ercolini.* Relazioni fra la trazione e la torsione dei fili metallici sottili. N. C. P. (5) 11. 43.

**721.** *E. Cesàro.* Sulle formole del Volterra fondamentali sulla teoria delle distorsioni elastiche. R. A. N. (3) 12. 311.

Siehe auch 706; 710; 2394; 2908—09.

### Elastische Nachwirkung.

**722.** *A. Joffé.* Elastische Nachwirkung im kristallinischen Quarz. A. P. L. (4) 20. 919.

**723.** *J. R. Benton.* Elastic aftereffects in crystals. S. (2) 23. 420.

Siehe auch 2701.

### Bewegung elastischer Körper.

Siehe 413.

### Elastische Kurven.

**724.** *C. H. Benjamin* and *R. A. French.* Experiments on spiral springs. T. A. S. M. E. 23. 298.

Siehe auch 361; 679; 690; 720; 945.

### Elastische Flächen.

**725.** *S. A. Shorter.* On the surface elasticity of saponine surfaces. P. M. (6) 11. 317.

Siehe auch 690; 692.

### Photoelastizität.

**726.** *S. Nakamura.* Über die Wirkung einer permanenten mechanischen Ausdehnung auf die optischen Konstanten einiger Metalle. A. P. L. (4) 20. 807.

**727.** *P. R. v. Schrott.* Das elektrische Verhalten der allotropen Selenmodifikation unter Einfluß von Wärme und Licht. A. A. W. 1906. 337.

### Thermoelastizität.

**728.** *A. Wassmuth.* Über die Bestimmung der chemischen Änderung des Elastizitätsmoduls von Metallen aus den Temperaturänderungen bei der gleichförmigen Biegung von Stäben. A. A. W. 1906. 92; D. V. N. 77. 27.

**729.** *E. G. Coker.* On the measurement of stress by thermal methods with an account of some experiments on the influence of stress on the thermal expansion of metals. T. R. S. E. 41. 229.

**730.** *J. R. Benton.* Elasticity at low temperatures. M. W. R. 31. 20.

**731.** *H. F. Wiebe.* Der Temperaturkoeffizient von Indikatorfedern. M. F. I. 33. 31.

**732.** *P. Stribeck.* Warmzerreißversuche mit Durana-Gußmetall. M. F. I. 31. 45.

Siehe auch 727; 781; 1320.

### Elektroelastizität.

**733.** *L. T. More.* On dielectric strain along the lines of force. T. M. (6) 10. 676.

### Magnetoelastizität.

**734.** *K. Honda* and *T. Terada.* Effects of stress on magnetization and its reciprocal relations to the change of elastic constants by magnetization. P. T. M. 3. 27.

**735.** *K. Honda* und *T. Terada.* Die Wirkungen der Spannung auf die Magnetisierung und ihre wechselseitigen Beziehungen zur Änderung der elastischen Konstanten durch die Magnetisierung. P. Z. 7. 465.

### Festigkeit.

**736.** *M. V. Gololobov.* Ob otrošenii sopootivlenija materialov k drugim naukam (Die Festigkeitslehre in ihren Beziehungen zu den anderen Wissenschaften). B. L. B. 6. Nr. 3. 25.

**737.** *L. Bergfeld.* Über Beziehungen zwischen der Zug- und Druckfestigkeit. A. P. L. (4) 20. 407.

**738.** *C. Bach.* Versuche über die Drehungsfestigkeit von Körpern mit trapezförmigem und dreieckigem Querschnitt. M.F.I. 33. 71.

**739.** *S. Maresca.* Comportamento del coeffiziente di flessione nel piano di simmetrica monoclino per una lamina di gesso. A.A.P.M. 20.

**740.** *C. Bach.* Zur Abhängigkeit der Bruchdehnung von der Messlänge. M.F.I. 29. 69.

**741.** *C. Bach.* Zur Kenntnis der Streckgrenze. M.F.I. 29. 61.

**742.** *N. Slatowratsky* und *G. Tammann.* Erweichen Kristalle in der Nähe ihres Schmelzpunktes? Z.P.C. 53. 341.

**743.** *S. Maresca.* Una disposizione per determinare il coeffiziente di torsione adiabatico di un corpo cristallino. A.A.P.M. 21.

**744.** *C. Bach.* Die Änderung der Zähigkeit von Kesselblechen mit Zunahme der Festigkeit. M.F.I. 29. 51.

**745.** *J. L. Hall.* Effect of superheated steam upon the tensile strength of alloys. M.G. 6. 3.

**746.** *J. A. Ewing* and *J. C. W. Humfrey.* The fracture of metals under repeated alterations of stress. M G. 6. 96.

**747.** *S. Berliner.* Über das Verhalten des Gußeisens bei langsamen Belastungswechseln. A.P.L. (4) 20. 527.

**748.** *C. J. Snijders* en *P. A. M. Hackstroh.* Verslag en beschouwingen omtrent mechanisch onderzoek van ijzer door middel van breekproeven op ingekeepte staven. I.W. 18. 604; 652; 737; 809. — *F. van Iterson* 639; 705; *J. Schroeder van der Kolk* 704; 709.

**749.** *C. J. Snijders* en *P. A. M. Hackstroh.* Verslag en beschouwingen omtrent mechanisch onderzoek van ijzer door middel van breekproeven op ingekeepte staven. I.W. 20. 118.

**750.** *C. Bach.* Druckversuche mit Eisenbetonkörpern. M.F.J. 29. 1.

**751.** *Ramisch.* Beitrag zur Berechnung von Eisenbetonplatten. Z.U.B.B. 4. 47; T.I.Z. 29. 1565.

**752.** *Frank.* Berechnung von Eisenbetonplatten, welche durch Biegungsmoment und Normalkraft beansprucht sind. Z.U.B.B. 4. 276.

**753.** *Ramisch.* Neue Auffassung des Rechnungsverfahrens bei Eisenbetonplatten. Z.U.B.B. 4. 330.

**754.** *A. C. C. G. van Hemert.* Een onderzoek naar de eigenschappen van gewapend beton. I.W. 19. 388; 534.

**755.** *Slade.* Analysis of concrete-steel construction. A.G.L.J. 82. 205.

**756.** *Saubrey.* Design of reinforced concrete floors. E.B.R. 51. 444.

**757.** *Benke und Blondell.* Zur Bestimmung der Stärke von Stützmauern mit trapezförmigem Profil. Ö.W.Ö.B. 11. 469.

**758.** *H. Burchartz.* Druckfestigkeit von Ziegelmauerwerk. D.T.Z. 33. 521.

**759.** *A. Tellez Pisarro.* Argamazas, morteros y mezclas. M. y R.M. 19. 289.

**760.** *Pietzuch.* Statische Berechnung eines eingespannten eisernen Portals. D.T.Z.B. 22. 49.

**761.** *Lilly.* Strength of columns. P.I.M.E. 1905. 697; M.W.M. 38. 2.

**762.** *C. Bach.* Versuche der Ermittelung der Durchbiegung und der Widerstandsfähigkeit der Scheibenkolben. M.F.I. 31. 1.

**763.** *H. Berg.* Die Wirkungsweise federbelasteter Pumpenventile und ihre Berechnung. M.F.I. 30. 1.

**764.** *Hanocq.* Théorie de la résistance des pistons. R.U. 12. 1.

**765.** *J. H. Bauer.* Die Festigkeit der Zylinder von Großgasmotoren. G.M.T. 3. 85; 109.

**766.** *Heise.* Festigkeitsverhältnisse gewellter und anderer Tubbings. G.E. 41. 276.

**767.** *Köppen.* Zertrümmerung einer Drachenwinde durch den Druck des Drachendrahtes. A.H. 33. 327.

**768.** *D. Selva.* Observaciones al conducto de desagüe proyectado para la calle Santa Fé. El cemento armado de la construcción de cañeria de desagüe y agua potable. A.S.A. 61. 103.

Siehe auch 331; 2382—83; 2387—88; 2429; 2490—91; 2494; 2585; 3192 bis 3299.

### Kristallbildung.

**769.** *E. S. Fedorov.* Osobenno interesnyj slučaj kristallogene zisa (Ein besonders interessanter Fall der Kristallbildung). A.P.B. (5) 21. 79.

**770.** *K. Fuchs.* Die Gestaltungskraft fließender Kristalle. V.D.P.G. 8. 315. — *O. Lehmann.* 324.

**771.** *A. C. de Kock.* Über Bildung und Umwandlung von fließenden Mischkristallen. Z.P.C. 48. 129.

**772.** *T. V. Barker.* Contribution to the theory of isomorphism based in experiments on the regular growth of crystalls of one substance on those of another. J.C.S. 89. 1120.

**773.** *R. Hollmann.* Über die Spaltung wasserhaltiger Mischkristalle. II. Z.P.C. 50. 567.

774. *F. A. H. Schreinemakers.* Mischkristalle in Systemen dreier Stoffe. Z.P.C. 51. 547; 52. 513.

Siehe auch 932; 2228; 2261.

### Kristallstruktur.

775. *E. Sommerfeldt.* Diagramme der regelmäßigen Punktsysteme. Z.K.M. 1906. 437; 468.

776. *A. Nold.* Grundlagen einer neuen Theorie der Kristallstruktur. Z.K.M. 41. 529.

777. *Lord Kelvin.* Molecular dynamics of a crystal. P.R.S.E. 24. 205.

778. *E. v. Fedorov.* Der einfachste Beweis des zur Bestimmung der Hauptstrukturarten dienenden Satzes. Z.K.M. 41. 478.

779. *R. E. Liesegang.* Geschichtete Strukturen. Z.A.C. 48. 364.

780. *F. G. Cottrell.* On crystalline habit. J.P.C. 10. 52.

Siehe auch 3542.

### Kristallphysik.

781. *F. Tonkovitc.* Sulla variazione angolare dei cristalli per effetto della temperatura. A.A.P.M. 16. 177.

Siehe auch 642; 722—23; 739; 742—43; 1239—40; 1325; 1363—65.

### Kristalloptik.

782. *G. Cesàro.* Contribution à l'étude optique des cristaux en lumière convergente. B.A.B. 1906. 290.

783. *W. Voigt.* Theoretisches und Experimentelles zur Aufklärung des optischen Verhaltens aktiver Kristalle. A.P.L. (4) 18. 645; 20. 196 — *H. C. Pocklington* 19. 439.

784. *G. Cesàro.* Sur les lignes incolores que présentent les lames cristallines en lumière convergente. B.A.B. 1906. 368.

785. *J. Boussinesq.* Sur l'existence d'un ellipsoïde d'absorption dans tout cristal translucide même sans plan de symétrie ni axe principal et sur la construction des rayons lumineux dans les milieux opaques. B.D. (2) 29. 131.

786. *H. Joachim.* Über Interferenzerscheinnngen an aktiven Krystallplatten im polarisierten Lichte. N.J.M. 21. 540.

787. *L. Duparc* und *F. Pearce.* Über die Auslöschungswinkel der Flächen einer Zone. Z.K M. 42. 34.

788. *H. Hitton.* Über die dunklen Büschel von Dünnschliffen im konvergenten Lichte. Z.K.M. 42. 277.

789. *H. B. A. Bockwinkel.* Over de voortplanting van licht in een twee-assig kristal rondom een middelpunkt van trilling. C.A.A. 14. 636.

790. *W. Voigt.* Über das optische Verhalten von Kristallen der hemiedrischen Gruppe des monoklinen Systemes. P.Z. 7. 267.

791. *H. Buisson.* Sur les variations de quelques propriétés du quartz. C.R. 142. 881.

Siehe auch 812; 1061; 1072; 1083—84; 1086; 1088.

### Ätherschwingungen.

792. *W. Peddie.* On vibrating systems which are not subject to the Boltzmann-Maxwell law. P.R.S.E. 26. 130.

Siehe auch 1319 o.

### Ätherwellen.

Siehe 3538 o.

### Strahlen.

793. *F. Streintz.* Über Metallstrahlen. P.Z. 6. 764.

794. *T. Moreux.* Radiations connues et régions inexplorées. Co. 47. 299; 454.

795. *A. Turpain.* À propos des rayons n. J.P. (4) 5. 343; S.F.P. 243. 5; B.S.F.P. 1906. 94.

796. *G. Costanzo.* Sulla realtà dei raggi N. N.L.A. 58. 103.

797. *J. Stark.* Optische Effekte der Translation von Materie durch den Äther. P.Z. 7. 352.

Siehe auch 836—48; 853; 2946; 3532; 3583.

### Roentgenstrahlen.

798. *J. J. Thomson.* On secondary Roentgen radiation. P.C.P.S. 13. 322.

799. *W. Seitz.* Über eine neue Art sehr weicher Roentgenstrahlen. V.D.P.G. 7. 265; P.Z. 6. 756.

800. *W. Wien.* Über die Energie der Roentgenstrahlen. S.G.W. 1905. 24.

801. *E. Marx.* Über die Geschwindigkeit der Roentgenstrahlen. D.V.N. 77. 35.

802. *E. Marx.* Die Geschwindigkeit der Roentgenstrahlen. V.D.P.G. 7. 302.

803. *A. Broca.* Sur la dureté de la décharge dans un tube à rayons X. C.R. 142. 271.

804. *S. Turchini.* Sur le rendement en rayons x du tube de Crookes suivant les conditions de son excitation. S.F.P. 237. 3; B.S.F.P. 1905. 111.

805. *J. Herweg.* Beiträge zur Kenntnis der Ionisation durch Roentgen- und Kathodenstrahlen. A.P.L. (4) 19. 333.

806. *Hurmuzescu.* L'action spécifique du metal dans la décharge électrique par les rayons secondaires. Le rôle du métal dans la transformation des rayons X en rayons sécondaires. A.S.U J. 3. 258.

807. *K. Lebedinsky.* Dejstvie X-lučej na dinamičeskij zarjad (Über die Wirkung der X-Strahlen auf die elektrodynamische Ladung). E.P. 23. 318.

Siehe auch 810—11.

### Kathodenstrahlen.

808. *P. Villard.* Sur les rayons cathodiques. B.S.F.P. 1905. 33.

809. *G. E. Leithäuser.* Bemerkung zu der Arbeit des Herrn Becker: Messungen an Kathodenstrahlen. (A.P.L. (4) 17. 445). A.P.L. (4) 18. 410.

810. *T. Tommasina.* Sur le mode de formation des rayons cathodiques et des rayons de Roentgen. M.I. 1902. 130.

811. *W. Wien.* Über die Energie der Kathodenstrahlen im Verhältnis der Energie der Roentgen- und Sekundärstrahlen. A.P.L. (4) 18. 991.

812. *A. Pochettino.* Ulteriori ricerche sulla luminescenza catodica nei cristalli. N.C.P. (5) 10. 395.

813. *W. Meyer.* Kathodenstrahlen und Radioaktivität. A.P.T. 1905. 271.

814. *S. R. Williams.* The reflection of cathode rays from thin metallic films. P.R. 23. 1.

815. *S. Williams* und *E. Warburg.* Über die Reflexion der Kathodenstrahlen an dünnen Metallplättchen. A.P.L. (4) 17. 977.

816. *J. Malassez.* Sur la différence de potential sous laquelle sont produits les rayons cathodiques. C.R. 141. 884.

817. *C. E. Guye.* Sur la valeur numérique la plus probable du rapport $\frac{\varepsilon}{\mu_0}$ de la charge à la masse de l'électron dans les rayons cathodiques. C.R. 142. 833.

818. *R. Reiger.* Über das Verhältnis $\frac{\varepsilon}{\mu}$ bei Kathodenstrahlen verschiedenen Ursprunges. A.P.L. (4) 17. 947.

819. *Villard.* Les rayons cathodiques dans le champ magnétique. B.S.I.E. (2) 6. 45.

820. *P. Villard.* Expérciences relatives aux rayons cathodiques et magnétocathodiques. S.F.P. 245—47. 14.

821. *O. Lehmann.* Magnetischer Wind und Magnetokathodenstrahlen. V.N.K. 18. 76.

Siehe auch 805; 833—34; 1032; 1668.

### Kanalstrahlen.

822. *J. J. Thomson.* Some experiments on Kanalstrahlen. P.C.P.S. 13. 212.

823. *H. Rau.* Beobachtungen an Kanalstrahlen. P.Z. 7. 421.

824. *J. Stark* und *W. Hermann.* Spektrum des Lichtes der Kanalstrahlen. in Ni und H. P.Z. 7. 92.

825. *J. Stark.* Der Dopplereffekt bei dén Kanalstrahlen und die Spektra der positiven Atomionen. N.G.G. 1905. 459.

826. *L. W. Austin.* Positive charges carried by the canal rays. B.B.S.W. 1. 439.

827. *L. W. Austin.* On an emission of negatively charged particles produced by canal rays. P.R. 22. 312.

Siehe auch 630.

### Radium.

828. *S. Meyer.* Radioaktive Forschung. Ö.C.Z. (2) 9. 35.

829. *Vita-Finzi.* La radioattività e la scienza moderna. R.A.G. 1905. B. 215.

830. *H. Nagaoka.* Notes on radioactivity. P.T.M. 2. 423.

831. *G. F. Schaefer.* Radioactividad ó actividad radiante espontanea de la materia. A.S.A. 60. 209; 302.

832. *N. R. Campbell.* Die Radioaktivität als allgemeine Eigenschaft der chemischen Elemente. J.R.E. 2. 434.

833. *W. Makower.* On the method of transmission of the excited activity of radium to the cathode. P.P.S.L. 19. 779. — *W. H. Jackson.* 786.

834. *W. J. Jackson.* Note on a paper of W. Makower entitled: on the method of transmission of the excited activity of Radium to the cathode. P.M. (6) 10. 532.

835. *Curie.* Sur la radioactivité induite du radium. B.S.F.P. 1905. 36.

836. *H. Becquerel.* Sur quelques propriétés des rayons $\alpha$ émis par le radium et par les corps activés par l'émanation du radium. A.S.G. (4) 21. 253.

837. *H. Becquerel.* Sur quelques propriétés des rayons $\alpha$ émis par le radium et par les corps activés par l'émanation du radium. C.R. 142. 365.

838. *H. Becquerel.* Über einige Eigenschaften der von Radium oder von Körpern, die durch Radiumemanation aktiviert worden sind, ausgehenden $\alpha$-Strahlen. P.Z. 7. 177.

839. *H. Becquerel.* Über einige Eigenschaften der $\alpha$-Strahlen. P.Z. 6. 666.

840. *E. Rutherford.* Some properties of the $\alpha$-rays from Radium. P.T.R.S.C. (2) 11. 3.

841. *W. H. Bragg.* Die $\alpha$-Strahlen des Radiums. P.Z. 7. 143.

842. *W. H. Bragg* and *R. Kleeman.* On the $\alpha$ particles of radium and their loss of range in passing through various atoms and molecules. P.M. (6) 10. 318.

843. *V. J. Laine.* Ein Versuch, die Absorption der $\alpha$-Strahlen des Radiums in den Elementen als Funktion von deren Konstanten abzuleiten. P.Z. 7. 419.

844. *G. Kučera.* Über die von den sekundären $\beta$- und $\gamma$-Strahlen des Radiums in verschiedenen Gasen hervorgebrachte Ionisation. A.P.L. (4) 18. 974.

845. *B. Kučera.* Über die Ionisation. welche in verschiedenen Gasen durch die Sekundärstrahlung der $\beta$- und $\gamma$-Strahlen des Radiums hervorgerufen wird (tschech). M.A.T.P. 1905. Nr. 38.

846. *J. A. Mc Clelland* and *F. E. Hackett.* Secondary radiation from compounds. T.S.D. (2) 9. 27.

847. *J. A. Mc. Clelland.* The energy of secondary radiation. T.S.D. (2) 9. 9.

848. *S. J. Allen.* The velocity and ratio $e:m$ for the primary and secondary rays of radium. P.R. 23. 65.

849. *H. W. Schmidt.* Über den Zerfall von Radium *A*, *B* und *C*. P.Z. 6. 897.

850. *F. v. Lerch.* Trennung des Radiums *C* vom Radium *B*. A.P.L. (4) 20. 345.

851. *S. Curie.* Sur la diminution de la radioactivité du polonium avec le temps. C.R. 142. 273.

852. *P. Ewers.* Über die vom Polonium und Radiotellur ausgesandten Strahlungen. P.Z. 7. 148.

853. *E. Riecke.* Über Absorptionsverhältnisse der Strahlen des Radiums und des Poloniums. P.Z. 6. 683.

854. *J. Danysz* jun. Sur le plomb radioactif extrait de la pechblende. C.R. 143. 232.

855. *P. Gruner.* Beitrag zu der Theorie der radioaktiven Umwandlung. A.P.L. (4) 19. 169.

856. *W. Ramsay* und *F. Soddy.* Weitere Versuche über die Bildung von Helium aus Radium. Z.P.C. 48. 682.

857. *G. A. Blanc.* Untersuchungen über ein neues Element mit den radioaktiven Eigenschaften des Thors. P.Z. 7. 620.

858. *A. Klaus.* Über die Absorption der Thoremanation. P.Z. 6. 820.

859. *E. Rutherford.* The heating effect of Radium-emanation. R.A.A. 10. 86.

860. *A. Righi.* Sulla diminuzione di resistenza prodotta nei cattivi conduttori dei raggi del radio. N.C.P. (5) 10. 113.

861. *H. Mache* und *S. Meyer.* Über die Radioaktivität österreichischer Thermen. P.Z. 6. 692.

862. *G. A. Blanc.* Über die Natur der radioaktiven Elemente, welche in den Sedimenten der Thermalquellen von Echaillon und von Salins-Moutiers enthalten sind. P.Z. 6. 703.

863. *H. Mache* und *T. Rimmer.* Über die in der Athmosphäre enthaltenen Zerfallsprodukte der Radiums. P.Z. 7. 617.

Siehe auch 476; 619; 629; 813; 1014; 2036; 2152; 2942—44; 3583.

### Kapillarität.

864. *A. Lampe.* Über Kapillarität. S.V.N.W. 41. 281.

865. *G. Bakker.* Zur Theorie der Kapillarität. Z.P.C. 48. 1.

866. *F. G. Donnan.* The theory of capillarity and colloidal solutions. Z.P.C 46. 197.

867. *G. Bakker.* Théorie de la couche capillaire. J.P. (4) 5. 99.

868. *G. Bakker.* Zur Theorie der Kapillarschicht. A.P.L. (4) 20. 35.

869. *G. Bakker.* Die Dicke der Kapillarschicht zwischen den homogenen Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes und die kritischen Erscheinungen. Z.P.C. 49. 609.

870. *G. Bakker.* Dicke und Spannung der Kapillarschicht. Z.P.C. 51. 344.

871. *G. Bakker.* La pression hydrostatistique et les deux équations d'état de la couche capillaire. J.P. (4) 5. 550.

872. *H. Ollivier.* Propriétés des surfaces pour lesquelles l'angle de raccordement apparent de l'eau est nul. C.R. 142. 1267.

873. *W. Kistiakowski.* Eine der Regel von Trouton für die latente Verdampfungswärme analoge Regel für die kapillaren Erscheinungen. Z.E. 12. 513.

874. *F. Kohlrausch.* Über die Bestimmung einer Kapillarkonstante durch Abtropfen. A.P.L. (4) 20. 798.

875. *F. Emslander* u. *H. Freundlich* Oberflächeneinflüsse beim Bier und bei der Bierbereitung. Z.P.C. 49. 317.

Siehe auch 889; 1308.

### Oberflächenspannung.

876. *H. Rebenstorff.* Versuche über Oberflächenspannung. Z.P. 19. 26.

877. *C. J. Lynde.* The effect of pressure on surface tension. P.R. 22. 181.

878. *Alliaume.* Influence de la tension superficielle sur la propagation des ondes parallèles à la surface d'une lame liquide. C.R. 143. 30.

879. *C. T. R. Wilson.* Condensation nuclei. S.I. 1904. 195.

880. *van der Mensbrugghe.* Les corps solides sont-ils doués d'une tension superficielle efficace? A.S.B. 29. A. 206.

881. *W. V. Metcalf.* Über feste Peptonhäutchen auf einer Wasserfläche und die Ursache ihrer Entstehung. Z.P.C. 52. 1.

882. *A. L. Clark.* Surface tension at the interface between certain liquids and vapours. P.A.Bo. 41. 361.

883. *G. Zemplén.* Über die Oberflächenspannungen wäßriger Lösungen. A.P.L. (4) 20. 783.

884. *C. Forch.* Die Oberflächenspannung von anorganischen Salzlösungen. A.P.L. (4) 17. 745; 18. 867.

885. *L. Grunmach.* Experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung von verflüssigtem O und verflüssigtem N. S.A.B. 1906. 679.

886. *G. Quincke.* Die Bedeutung der Oberflächenspannung für die Photographie mit Bromsilbergelatine u. eine Theorie des Reifungsprozesses der Bromsilbergelatine. J.P.R. 19. 3.

887. *W. B. v. Czudnochowski.* Zur Deutung des Plateauschen Versuches. [illegible]

888. *E. Almansi.* Sopra una delle esperienze del Plateau. A.D.M. (3) 12. 1.

Siehe auch 661.

### Tropfen.

889. *T. Lohnstein.* Zur Theorie des Abtropfens mit besonderer Rücksicht auf die Bestimmung der Kapillaritätskonstante durch Tropfversuche. A.P.L. (4) 20. 237; 606.

890. *H. Ollivier.* Influence de la compression sur la formation des gouttes. C.R. 142. 836.

Siehe auch 874; 2139—40.

### Diffusion.

891. *S. Leduc.* Die Diffusion der Flüssigkeiten. D.V.N. 77. 46; V.D.P.G. 7. 352.

892. *J. Nabl.* Zur Theorie der Diffusion der Gase. P.Z. 7. 240.

893. *M. Smoluchowski.* Sur le chemin moyen parcouru par les molécules d'un gaz et sur son rapport avec la théorie de la diffusion. B.I.C. 1906. 202.

894. *C. Hambuechen.* Optical method for observing diffusion in electrolytes. T.A.E.S. 7. 305.

895. *G. H. Bryan.* Thermodynamics of diffusion. N. 74. 246.

896. *L. W. Öholm.* Über die Hydrodiffusion der Elektrolyte. Z.P.C. 50. 309.

897. *S. Sano.* On the electric force at any point in a liquid in which the process of diffusion is going on. P.T.M. 2. 465.

898. *J. C. Graham.* Über die Diffusion von Salzen in Lösung. Z.P.C. 50. 257.

899. *M. Yégounow.* La diffusion des solutions et le poids moléculaire. C.R. 142. 954.

900. *G. Senter.* Die Platinkatalyse des $H_2O_2$ vom Standpunkte der Diffusion. Z.P.C. 52. 737; 53. 604.

901. *H. J. S. Sand.* Die Rolle der Diffusion bei der Katalyse durch kolloidale Metalle. Z.P.C. 51. 641.

902. *N. Bjerrum.* Über die Elimination des Diffusionspotentials zwischen zwei verdünnten wäßrigen Lösungen durch Einschalten einer konzentrierten Chlorkaliumlösung. Z.P.C. 53. 428.

903. *A. Winkelmann.* Bemerkungen zu der Abhandlung von D. W. Richardson, J. Nicol u. T. Parnell über die Diffusion von *H* durch heißes *Pt.* (P.M. (6) 8. 1.) A.P.L. (4) 19. 1045.

**904.** *A. Winkelmann.* Über die Diffusion nascierenden *H* durch *Fe.* A.P.L. (4) 17. 589.

**905.** *L. Grunmach.* Versuche über die Diffusion von $CO_2$ durch Kautschuk. D.V.N. 77. 47; P.Z. 6. 795.

**906.** *H. Mache.* Über die Diffusion von Luft durch Wasser. PZ. 7. 316.

**907.** *P. Nell.* Studien über Diffusionsvorgänge wäßriger Lösungen in Gelatine. A.P.L. (4) 18. 323.

**908.** *H. W. Morse* u. *G. W Pierce.* Diffusion und Übersättigung in Gelatine. Z.P.C. 45. 589.

Siehe auch 1266; 1367—68.

### Osmose.

**909.** *P. Kohnstamm.* Over osmotischen druk. M.P.M. 10. 138.

**910.** *Berkeley* and *E. G. J. Hartley.* Osmotic pressure. N. 74. 245. — *W. C. D. Whetham.* 295.

**911.** *A. V. Baecklund.* Om det osmotiske trycket. A.U.L. 40. No. 4.

**912.** *P. Palladino.* Qualche considerazione sulla pressione osmotica. N.L.A. 58. 204.

**913.** *A. Battelli* e *A. Stefanini.* Sulla natura della pressione osmotica. N.C.P. (5) 10. 137.

**914.** *A. Battelli* u. *A. Stefanini.* Über die Natur des osmotischen Druckes. P.Z. 7. 190.

**915.** *A. Thiel.* Ein Versuch zur Demonstration der Osmose. Z.E. 12. 229.

**916.** *G. Dorléans.* Sur quelques particularités de l'osmose des solutions aqueuses. Dispositifs employés. Résultats obtenus. B.S.F.P. 1905. 89.

**917.** *P. S. Barlow.* On the osmotic pressure of dilute aqueous solutions. P.C.P.S. 13. 229.

**918.** *Berkeley* and *E. G. J Hartley.* On the osmotic pressure of some concentrated aqueous solutions. P.R.S.L. 78. 68; N. 74. 261.

**919.** *H. J. Hamburger.* Eine Methode zur Bestimmung des osmotischen Druckes sehr geringer Flüssigkeitsmengen. B.C.Z. 1. 259

**920.** *J. Amar.* Osmose gazeuse à travers une membrane colloidale. C.R. 142. 779; 872.

**921.** *S. Stenius.* Der osmotische Druck im Meerwasser. B.F.F. 46. Nr. 6.

**922.** *L. Kahlenberg.* On the nature of the process of osmosis and osmotic pressure with observations concerning dialysis. J.P.C. 10. 141; T.A.W. 15. 209.

**923.** *W. Spens.* The relation between osmotic pressure and the vapour pressure in a concentrated solution. P.R.S.L. 77. 234.

**924.** *C. S. Hudson.* The freezing of pure liquids and solutions under various kinds of positive and negative pressure and the similarity between osmotic and negative pressure. P.R. 22. 257.

**925.** *H. N. Morse, J. C. W. Frazer* and *B. S. Hopkins.* The osmotic pressure and the depression of the freezing points of solutions of glucose. A.C.J. 36. 1.

**926.** *N. H. Morse, J. C. W. Frazer, E. J. Hoffman* and *W. L. Kennon.* A redetermination of the osmotic pressure and of the depression of the freezing points of cane sugar solutions. A.C.J. 36. 39.

**927.** *J. J. van Laar.* Jets over den osmotischen druk van oplossingen van niet-elektrolyten in verband met de afwijkingen van de wetten der ideale gassen. C.A.A. 14. 849.

**928.** *A. V. Baecklund.* Om sammenhanget mellan osmotiskt och elektriskt tryck. A.U.L. (2) 1. No. 1.

**929.** *Russenberger.* Sur l'osmose électrique et le transport des micelles. A.S.G. (4) 21. 110.

### Elektrokapillarität.

**930.** *J. Billitzer.* Zur Theorie der kapillarelektrischen Erscheinungen. Z.P.C. 48. 513; 542; 49. 709; 51. 167.

**931.** *Gouy.* Sur la fonction électrocapillaire. II. A.C.P. (8) 8. 291.

**932.** *A. Thiel.* Elektrokapillarität als Erklärung der Bewegungen sich auflösender Krystalle auf *Hg.* Z.E. 12. 257.

### Akustik.

**933.** *P. C. Charbonnier.* Le champ acoustique. A.C.P. (8) 8. 501.

**934.** *H. Rubens.* Expériences pour démontrer des ondes stationnaires acoustiques. J.P. (4) 5. 505; B.S.F.P. 1906. 101.

**935.** *R. Malagoli.* Composizione parallela del moto vibratorio col moto progressivo applicata all' esame dei corpi sonori. M.A.M. (3) 5.

**936.** *M. Brillouin.* Tuyaux sonores. Correction due à l'embouchure. J.P. (4) 5. 569.

**937.** *N. N.* La résonnance dans un système libre et dans un système à liaison. I.E.P. 14. 416.

**938.** *M. Brillouin.* Sur la propagation du son dans les gros tuyaux cylindriques à propos des expériences de M. M. Violle et Vautier. A.C.P. (8) 8. 443.

**939.** *R. Wachsmuth* u. *A. Kreis.* Über Tonerzeugung in Orgelpfeifen. V.D.P.G. 8. 60.

**940.** *A. Florentino.* Sopra un analizzatore di suoni utile per eseguire alcune esperienze di acustica. N.C.P. (5) 10. 254.

**941.** *E. Waetzmann.* Zur Frage nach der Objektivität der Kombinationstöne. A.P.L. (4) 20. 837.

**942.** *M. Wien.* Über Telephonplatten mit hohen Eigentönen. A.P.L. (4) 18. 1049.

**943.** *H. J. Sharpe.* On the reflection of sound at a paraboloid. P.C.P.S. 13. 133.

**943a.** *Lummer.* Über die Theorie des Knalles. J.S.G. 83. B. 2.

Siehe auch 469; 2743—47.

### Saitenschwingungen.

**944.** *A. Davidoglou.* Étude de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\left(\vartheta(x)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx^2} = k\varphi(x)y.$$

A.E.N. (3) 22. 539.

**945.** *S. Kępiński.* O drganiach poprzecznych prętów sprężystych. (Über die Querschwingungen elastischer Saiten.) T.W. 16. 71.

**946.** *H. N. Davis.* The longitudinal vibrations of a rubbed string. P.A.Bo. 41. 693.

**947.** *H. N. Davis.* Longitudinal vibrations analogous to those of a violin string. P.R. 22. 121.

**948.** *S. Mikola.* Über eine neue Methode zur Erzeugung von Schwingungsfiguren und absoluten Bestimmung der Schwingungszahlen. A.P.L. (4) 20. 619.

**949.** *J. Delemer.* Études sur la vibration des cordes de piano. A.S.B. 30. B. 299.

### Schallgeschwindigkeit.

**950.** *C. Krediet.* Een elementaire bepaling van de voortplantingssnelheid van hed geluid. W.T. 1. 185.

**951.** *W. Schmidt.* Die experimentelle Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten. V.B.P.C.U. 11. 47.

**952.** *S. R. Cook.* On the velocity of sound in gases at low temperatures and the ratio of the specific heats. P.R. 22. 115.

### Singende Flammen.

**953.** *H. T. Simon.* Zur Theorie des selbsttönenden Lichtbogens. P.Z. 7. 433.

**954.** *A. Blondel.* Sur les phénomènes de l'arc chantant. B.S.F.P. 1905. 93; 464; J.P. (4) 5. 77.

**955.** *Willame.* Note sur la théorie de l'arc chantant. A.S.B. 30. A. 79.

Siehe auch 1409; 2743.

### Physiologische Akustik.

**956.** *P. Bonnier.* Les théories actuelles de l'audition. J.P. (4) 5. 578.

### Mathematische Musik.

**957.** *V. Goldschmidt.* Beiträge zur Harmonielehre. A.N.L. 4. 417.

Siehe auch 2595.

### Optik.

Siehe 3533—76.

### Lichtemission.

Siehe 1022—24; 3550.

### Geometrische Optik.

**958.** *V. F. Acero.* Ensayo de optica geométrica. R.A.M. 3. 380.

**959.** *K. Schwarzschild.* Untersuchungen zur geometrischen Optik. A.M.S.G. 9; 10; A.G.G. (2) 4. Nr. 1. u. 2

**960.** *A. Gullstrand.* Die reelle optische Abbildung. V.A.S. 41. Nr. 3.

**961.** *L. Matthießen.* Über aplanatische Brechung und Spiegelung in $F_2$ und die Hornhautreflexion A.F.G.P. 91. 295.

**962.** *A. Gleichen.* Über die wichtigsten Fehler des monochromatischen Strahlenganges durch zentrierte Systeme und die Mittel zu ihrer Hebung. D.M. 14. 135; 153; 162.

**963.** *A. L. Geršun.* Metod polos Toplera i ego primenenija. (Die Schlierenmethode von Toepler und ihre Anwendungen.) P.M.J.M. 2. 104.

**964.** *Lord Rayleigh.* An optical paradox. P.M. (6) 9. 779. — *G. J. Stoney* 10. 126.

Siehe auch 181; 237; 1151; 3534.

### Katoptrik.

965. *R. Sissingh.* Over de theorie der terugkaatsing van het licht door niet volkomen doorschijnende lichamen. C.A.A. 14. 335.

966. *R. Sissingh.* Afleiding van de grondvergelijkingen der metallieke terugkaatsing uit Cauchy's theorie. C.A.A. 14. 506.

967. *R. C. Maclaurin.* Theory of the reflection of light near the polarising angle. P.R.S.L. 76. 49

968. *E. E. Hall.* Total reflection. P.R. 21. 346.

969. *R. A. Houstoun.* Total reflexion at the second surface of a thin plane parallel plate. P.M. (6) 10. 24.

970. *R. A. Houstoun.* The effect of a surface-film in total reflexion. P.M. (6) 10. 12.

971. *F. Biske.* Réflexion de la lumière sur l'eau ébranlée. Z.S. 53. 419.

972. *I. D. Pilčikov.* Pribor dlja demonstrirovanija anomalnago otraženija sveta. (Apparat zur Demonstration anomaler Reflexion des Lichtes.) J.R.P.C.G. 34. 15.

Siehe auch 2596; 3536—37.

### Dioptrik.

973. *L. Maillard.* La loi de la réfraction et le principe de la moindre action. B.S.V. (5) 41. 173.

974. *E. Gatti.* Particolarità della rifrazione dovuta ad una corona zilindrica retta. A.A.T. 40. 568.

975. *C. de Waard.* Descartes en de brekingswet. N.A.W. (2) 7. 64.

976. *T. H. Blakesley.* Note on constant deviation prisms. P.P.S.L. 20. 100.

977. *R. Chartres.* Note on „minimum deviation through a prism". P.M. (6) 11. 609.

978. *C. Krediet.* Over het minimum van afwijking bij een prisma. W.T. 2. 168.

979. *M. Campos.* Marche des rayons lumineux à travers une surface astigmate par inégalité de réfraction de ses méridiens principaux. A.O. 1901. 206.

980. *A. Gleichen.* Über die wichtigsten Fehler des monochromatischen Strahlenganges durch zentrierte Systeme und die Mittel zu ihrer Hebung. D.M. 14. 135; 153; 162; 175; 187.

981. *C. Juel.* En saetning af Dr. V. Kommerell. T.M. 16. B. 69.

Siehe auch 962; 2597.

### Linsen.

982. *A. J. Sowter.* On ellipsoidal lenses. P.M. (6) 10. 180. P.P.S.L. 19. 631.

983. *C. Frensel.* Neue elementare Ableitung der Formeln zur Bestimmung der Haupt- und Brennpunkte einer Linse. Z.H. 37. 105.

984. *C. H. Claudy.* The photographic lens. A.I. 8. No. 5.

Siehe auch 3588.

### Physikalische Optik.

985. *A. Schmidt.* Die Erweiterungen des Dopplerschen Prinzips. P.Z. 7. 323.

986. *J. Walker.* A note on Talbot's lines. P.M. (6) 11. 531.

Siehe auch 224; 477.

### Lichtdruck.

987. *N. N.* The pressure of light. E.M.W. 81. 6.

988. *G. Holtsmark.* Lystrykket. N.B. 27. 7.

989. *F. Hasenöhrl.* Über den Druck des Lichtes. J.R.E. 2. 267.

990. *P. Lebeden.* Die Druckkräfte der Strahlung. J.R.E. 2. 305.

991. *G. F. Hull.* The pressure of radiation on a clear glass vane. N. 72. 198. — *T. H. Havelock.* 269.

992. *H. Holst.* Straaletrykket i solsystemet. F.T.K. 3. 129.

993. *H. Holst.* Arrhenius astrofysiske teorier. F.T.K. 4. 1.

Siehe auch 1799.

### Lichtwellen.

994. *C. Somigliana.* Sulla propagazione delle onde nei mezzi isotropi. A.A.T. 41. 60.

995. *M. Laue.* Über die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien. N.G.G. 1905. 117.

996. *M. Laue.* Die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien. A.P.L. (4) 18 523.

997. *A. Einstein.* Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig. A.P.L. (4) 18. 639.

Siehe auch 1015.

### Dispersion.

998. *M. Laue.* Die spektrale Zerlegung des Lichtes durch Dispersion. V.D.P.G. 8. 170.

**999.** *J. S. Ames.* An elementary discussion of the action of a prism on white light. A.J.C. 22. 76.

**1000.** *C. Moureu.* Réfraction moléculaire et dispersion moléculaire des composés à fonction acétylénique. A.C.P. (8) 7. 536.

**1001.** *F. Ehrenhaft.* Die diffuse Zerstreuung des Lichtes an kleinen Kugeln. S.A.W. 114. 1115.

**1002.** *M. Planck.* Normale und anomale Dispersion in nichtleitenden Medien von variabler Dichte. S.A.B. 1905. 382.

Siehe auch 995—96; 1073; 1107; 1142; 2099.

### Farben.

**1003.** *C. Schaum.* Die physikalisch-chemischen Grundlagen der Farbenlehre. J.P.V.F. 1904—05. 54.

**1004.** *Lord Rayleigh.* The origin of the prismatic colours. P.M. (6) 10. 401.

**1005.** *J. Larmor.* On the constitution of natural radiation. P.M. (6) 10. 574. — *Lord Rayleigh.* 11. 123.

**1006.** *W. N. Hartley.* Observations on chemical structure and those physical properties on which the theory of colour is based. J.C.S. 87. 5822.

**1007.** *V. Grünberg.* Gleichung zur Berechnung der Wellenlängen zweier komplementärer Farben. J.P.R. 19. 83.

Siehe auch 1159; 2100; 2284; 3539.

### Spektrum.

**1008.** *I. Fredholm.* Sur la théorie des spectres. C.R. 142. 506.

**1009.** *V. Novák.* Demonstrac spekter (Demonstration von Spektren). C. 35. 111.

**1010.** *L. Janicki.* Feinere Zerlegung der Spektrallinien von *Hg*, *Cd*, *Na*, *Zn*, *Tl* u. *H.* A.P.L. (4) 19. 36.

**1011.** *J. J. Thomson.* A theory of the widening of lines in spectra. P.C.P.S. 13. 318.

**1012.** *O. Schönrock.* Über die Breite der Spektrallinien nach dem Dopplerschen Prinzip. A.P.L. (4) 20. 995.

**1013.** *Lord Rayleigh.* On the influence of collisions and of the motion of molecules in the line of sight upon the constitution of a spectrum line. C.N. 92. 10.

**1014.** *G. Rudorf.* Über Spektralregelmäßigkeiten und das Atomgewicht des Radiums. Z.P.C. 50. 100.

**1015.** *V. A. Kent.* Variability of wavelength in the lines of spark spectra. A.J.C. 22. 182.

**1016.** *J. Stark.* Zur Kenntnis des Bandenspektrums. P.Z. 7. 355.

Siehe auch 630; 824—25; 1032; 1044; 1053; 1109—10; 1112; 1130; 1137—39; 1152; 1672; 2278.

### Ultrarote Strahlen.

**1017.** *W. W. Coblentz.* Infra-red absorption and reflection spectra. P.R. 23. 125.

**1018.** *W. W. Coblentz.* Infra-red emission spectra. P.R. 22. 1.

**1019.** *A. H. Pfund.* Selective reflection in the infra-red. P.R. 22. 362.

**1020.** *J. T. Porter.* Selective reflection in the infra-red spectrum. A.J.C. 22. 229.

**1021.** *A. H. Pfund.* Polarisation and selective reflection in the infra-red spectrum. A.J.C. 24. 19.

Siehe auch 1062; 1095.

### Ultraviolette Strahlen.

Siehe 1153; 1396; 1839; 2612.

### Absorption des Lichtes.

**1022.** *A. Einstein.* Zur Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption. A.P.L. (4) 20. 199.

**1023.** *H. A. Lorentz.* Over de absorptie en emissiebanden van gasvormige lichamen. C.A.A. 14. 518; 577.

**1024.** *Le Bel.* Pouvoirs émissifs et absorbants. S.F.P. 236. 31. B.S.F.P. 1905. 105.

**1025.** *A. Zarubin.* Die Absorption des Lichtes durch dünne Anilinschichten als Fall von optischer Resonanz (russ.). B.U.K. 1905d. 11. 73.

**1026.** *C. Schaefer.* Über die Gültigkeit des Beerschen Gesetzes. J.S.G. 83. B. 12.

**1027.** *W. Gorczyński.* Osposobach wyprowadzenia prawa Kirchhoffa. (Über die Methoden der Herleitung des Kirchhoffschen Gesetzes.) T.W. 16. 113.

Siehe auch 785; 843; 995—96; 1017; 1023—25; 1072; 1889; 2278.

### Lumineszenz.

Siehe 812; 1030; 1098; 2279.

### Phosphoreszenz.

**1028.** *A. Dahms.* Neuere Arbeiten über Phosphoreszenz. J.R.E. 2. 314.

**1029.** *A. Debierne.* Sur les phénomènes de phosphorescence C.R. 142. 568.

**1030.** *E. L. Nichols* and *E. Merritt.* Studies in luminescence VI. P.R. 22. 279.

**1031.** *G. Urbain.* Phosphorescence. Propriété atomique et moléculaire. S.F.P. 240. 4.

**1032.** *G. Urbain.* Phosphorescence cathodique. Variation des spectres, cas de l'Europium. Phosphorescence des fluorines. S.F.P. 250. 4.

**1033.** *P. Waentig.* Zum Chemismus phosphoreszierender Erdalkalisulfide. Z. P.C. 51. 435.

**1034.** *E. L. Nichols* and *E. Merritt.* Further experiments on the decay of phosphorescence in sidot blende and certain other substances. P.R. 23. 37.

### Fluoreszenz.

**1035.** *G. Woker.* On the theory of fluorescence. J.P.C. 10. 370.

**1036.** *C. Camichel.* Fluorescence. J.P. (4) 4. 873.

**1037.** *C. Camichel.* Recherches expérimentales sur la fluorescence. A.T. (2) 7. 417.

**1038.** *W. Kauffmann.* Fluoreszenz und chemische Konstitution. V.D.P.G. 7. 375.

**1039.** *R. W. Wood.* Fluoreszenz und Lambert'sches Gesetz. P.Z. 7. 475. H. Greinacher 608.

**1040.** *R. W. Wood.* The fluorescence of sodium vapour and the resonance radiation of electrons. P.P.S.L. 19. 764.

### Irradiation.

**1041.** *A. Guébhard.* Sur l'irradiation photographique. S.F.P. 245—47. 2.

### Interferenz.

**1042.** *W. Mc Clellan.* A note on interference with the bi-prism. A.J.S. (4) 19. 294.

**1043.** *G. Meslin.* Sur les interférences produites par un réseau limitant une lame mince. C.R. 142. 1039.

**1044.** *E. Gehrcke* u. *O. Reichenheim.* Interferenzen planparalleler Platten im kontinuierlichen Spektrum. V.D.P.G. 8. 209.

**1045.** *E. Gehrcke* u. *O. v. Baeyer.* Über die Anwendung der Interferenzpunkte an planparallelen Platten zur Analyse feinster Spektrallinien. A.P.L. (4) 20. 269.

**1046.** *I. Fröhlich.* A polározott fényinterferentiája törrényének kiserleti bemutatása (Über den experimentellen Nachweis der Interferenz des polarisierten Lichtes). M.P.L. 11. 361; 12. 89.

**1047.** *M. Hamy.* Sur les franges de réflexion des lames argentées. S.F.P. 242. 2.

**1048.** *A. Perot.* Sur la mesure des pertes de phase par réflexion. C.R. 142. 566.

**1049.** *J. Walker.* A note on Talbots lines. P.P.S.L. 20. 173.

Siehe auch 786; 1099; 2518.

### Newtonsche Ringe.

**1050.** *R. C. Maclaurin.* On Newtons rings formed by metallic reflection. P.R.S. L. 76. 515.

### Diffraktion.

**1051.** *R. J. Wallace.* Diffraction grating replicas. A.J.C. 22. 123.

**1052.** *B. Galitzin.* Einige Bemerkungen über die Diffraktionsgitter. A.P.B. (5) 18. 33.

**1053.** *J. Rheinberg.* Influence of images of gratings of phase difference amongst their spectre. J.R.M.S. 1905. 152.

**1054.** *A. B. Potter.* On the diffraction theory of microscopic vision. P.M. (6) 11. 154.

**1055.** *J. Rheinberg.* Doubling of lines in the Abbe experiments. J.Q.C. 9. 173.

**1056.** *H. E. Ives.* Improvement in the diffraction process of colour photography. P.R. 22. 339.

Siehe auch 515; 3540—41.

### Polarisation des Lichtes.

**1057.** *J. Hirschler.* Experimente zur Polarisation des Lichtes. V.B.P.C.U. 11. 1.

**1058.** *H. J. Reiff.* Ein Polarisator ohne Richtungsänderung und Achsenverschiebung des Lichtstrahls. Z.P. 19. 28.

**1059.** *W. Biernacki.* Analizator półcienowy so zastosowaniu do badania światla spolaryzowanego eliptycznie. (Über einen Halbschattenanalysator und seine Anwendung zur Untersuchung des elliptisch polarisierten Lichtes). T.W. 16. 151.

**1060.** *F. Koláček.* Über die Polarisation der Grenzlinien der totalen Reflexion. A.P.L. (4) 20. 433.

**1061.** *Pearce* et *Duparc.* Sur les extinctions des diverses faces d'une zone d'un cristal biaxe. A.S.G. (4) 21. 100.

**1062.** *A. H. Pfund.* Polarisation in the infrared. P.R. 22. 362.

**1063.** *G. Stark.* Über polarisierte Lichtemission bewegter Atomionen senkrecht zur Translationsrichtung. V.D.P.G. 8. 104.

**1064.** *H. Hartl.* Ein Modell zur Erläuterung eines linear polarisierten Lichtstrahles bei der Doppelbrechung. Z.P. 19. 175.

**1065.** *W. Betz.* Eine Methode zur Bestimmung der Dicke und optischen Konstanten durchsichtiger Metallschichten. A.P.L. (4) 18. 590.

Siehe auch 786—87; 967; 1021; 1046; 2226; 2280—81; 2518.

### Drehung der Polarisationsebene.

**1066.** *C. Winther.* Zur Theorie der optischen Drehung. Z.P.C. 55. 257.

**1067.** *J. Dechant.* Sichtbarmachung der Drehung der Polarisationsebene. Z.P. 19. 67.

**1068.** *H. M. Reese.* On optical rotation. P.R. 22. 265.

**1069.** *C. Winter.* Einige Bemerkungen über das Drehungsvermögen optisch aktiver Körper. Z.P.C. 52. 200.

**1070.** *P. Walden.* Über das Drehungsvermögen optisch aktiver Körper. Z. P. C. 55. 1.

**1071.** *P. Walden.* Über den Zusammenhang zwischen Molekulargröße und Drehungsvermögen eines gelösten aktiven Körpers. C.B. 39. 658.

**1072.** *O. Lehmann.* Drehung der Polarisationsebene und der Absorptionsrichtung bei flüssigen Kristallen. A.P.L. (4) 18. 808.

**1073.** *C. Winther.* Die Rotationsdispersion in Lösungen. Z.P.C. 45. 331.

Siehe auch 1100—01; 1111; 1140—42; 2218—19; 2262.

### Reflexion.

**1074.** *R. Sissingh.* Notes sur la réflexion métallique. A.N. (2) 11. 206.

**1075.** *R. C. Maclaurin.* On metallic reflection and the influence of the layer of transition. P.R.S.L. 77. 211.

Siehe auch 814—15; 965—66; 1017; 1019—21; 1047—48; 1050; 1060; 1104; 1461.

### Brechung des Lichtes.

**1076.** *J. C. Shedd* and *P. Fitsch.* On the measurement of the index of refraction by interferometer. P.R. 22. 345.

**1077.** *V. F. Hess.* Über eine Modification der Pulfrich'schen Formel betreffend das Brechungsvermögen von Mischungen zweier Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der beim Mischen eintretenden Volumänderung. A.A.W. 1906. 157.

Siehe auch 183; 1000; 1840.

### Doppelbrechung.

**1078.** *G. Wulff.* Zur Geometrie der Doppelbrechung. A.P.L. (4) 18. 579.

**1079.** *J. Walker.* Fresnels theory of double breaking. N. 73. 319.

**1080.** *E. Meitner.* Über einige Folgerungen, die sich aus den Fresnel'schen Formeln ergeben. A.A.W. 1906. 329.

**1081.** *V. Biernacki.* Eine einfache Methode die Doppelbrechung des Lichtes in bewegten Flüssigkeiten zu demonstrieren. P.Z. 6. 730.

**1082.** *J. Friedel.* Experimentelle Untersuchungen über lamellare Doppelbrechung. A.P.L. (4) 18. 1031; B.G.L. 57. 315.

**1083.** *W. Voigt.* Die Wellenfläche und die konische Refraktion aktiver zweiachsiger Kristalle. D.V.N. 77. 43.

**1084.** *W. Voigt.* Über die Wellenfläche zweiachsiger aktiver Kristalle und über ihre konische Refraktion. P.Z. 6. 787; 818; V.D.P.G. 7. 340.

**1085.** *W. Voigt.* Bemerkungen zur Theorie der konischen Refraktion. A.P.L. (4) 19. 14.

**1086.** *W. Voigt.* Über die sogenannte innere konische Refraktion bei pleochroitischen Kristallen. A. P. L. (4) 20. 108.

**1087.** *C. Zakrzewski* et *C. Kraft.* Sur les directions principales dans les liquides biréfringents par effet du mouvement. B.I.C. 1905. 506.

**1088.** *O. Lehmann.* Näherungsweise Bestimmung der Doppelbrechung fester und flüssiger Kristalle. A.P.L. (4) 18. 796.

**1089.** *L. Natanson.* Sur une particularité de la double réfraction accidentelle dans les liquides. II J.P. (4) 168.

**1090.** *G. G. de Metc.* Slučajnoe dvojnoe prelomlenie sveta v židkostjach (Zufällige Doppelbrechung des Lichtes in den Flüssigkeiten). J.R.P.C.G. 34. 505.

**1091.** *T. H. Havelock.* Artificial double refraction due to aelotropic distribution with application to colloidal solutions and magnetic fields. P.R.S.L. 77. 170.

Siehe auch 789; 1064; 1107; 1111; 1143; 3542.

### Brechungsindex.

**1092.** *A. Pauly.* Über eine einfache Methode zur Bestimmung der Brechungsexponenten von Flüssigkeiten. Z.·W. M. 22. 344.

**1093.** *C. Zanini.* Sull' indice di rifrazione delle soluzioni. R.F.M. 6. 528.

**1094.** *V. F. Heß.* Über das Brechungsvermögen von Mischungen zweier Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der beim Mischen eintretenden Volumänderung. S.A.W. 114. 1231.

**1095.** *J. Koch.* Bestimmung des Brechungsindexes des H, der $CO_2$ und des O im Ultrarot. A.P.L. (4) 17. 658.

**1096.** *F. L. Bishop.* A periodic relation between the atomic weights and the index of refraction. A.C.J. 35. 84.

Siehe auch 1076; 1102; 1841.

### Thermooptik.

**1097.** *H. Geiger.* Demonstrationsversuch zur Erläuterung der Temperaturverhältnisse in den Schichten des positiven Lichtes. V.D.P.G. 8. 116.

**1098.** *J. Safir.* Svečenie stali pri vysokich temperaturach (Das Leuchten des Stahles bei hohen Temperaturen). J.M.P. 78. 29.

**1099.** *M. Laue.* Zur Thermodynamik der Interferenzerscheinungen. A. P. L. (4) 20. 365.

**1100.** *H. Großmann* u. *H. Pötter.* Über den Einfluß der Konzentration und der Temperatur auf das spezifische Drehungsvermögen stark optisch-aktiver Verbindungen. C.B. 38. 3874.

**1101.** *H. Großmann* u. *C. Wieneke.* Über den Einfluß der Temperatur und der Konzentration auf das spezifische Drehungsvermögen optisch - aktiver Körper. Z. P. C. 54. 385.

**1102.** *J. Dinkhauser.* Über das molekulare Brechungsvermögen von Salzen in wäßriger Lösung. S. A. W. 114. 1001.

Siehe auch 1039; 1125; 1153; 1623.

### Elektrooptik.

**1103.** *G. Aeckerlein.* Neue Untersuchungen über eine Fundamentalfrage der Elektrooptik. P.Z. 7. 594.

**1104.** *W. Westphal.* Über die wichtigsten Beziehungen zwischen elektrischen und optischen Konstanten, insbesondere über den von Hagen und Rubens nachgewiesenen Zusammenhang des Reflexionsvermögens mit dem elektrischen Leitvermögen. A.Gr. (3) 9. 36.

**1105.** *E. Aschkinass.* Elektrooptische Eigenschaften der Kohle. V. D. P. G. 7. 350.

**1106.** *J. Stark.* Die elektrische Ladung der Träger von Duplet- und Tripletserien. V. D. P. G. 8. 111.

**1107.** *H. L. Blackwell.* Dispersion in electric double refraction. P.A.Bo. 41. 647.

**1108.** *R. Reiger.* Lichtelektrische Zerstreuung an Isolatoren bei Atmosphärendruck. A. P. L. (4) 17. 935.

**1109.** *H. Crew* and *B. J. Spence.* Variations of arc spectre with phase of the current producing them. A. J. C. 22. 199.

**1110.** *P. Zonta.* Su la teoria degli spettri multipli. N.C.P. (5) 11. 237.

**1111.** *S. Kalinowski.* O dzialaniu następczem przy podwójnem zalamaniu swiatla w cieczach electrycznie odksztalkonych i przy magnetycznem skręcaniu plaszcz gzny polaryzacyi w cieczach. (Über die Verzögerungserscheinung bei der elektrischen Doppelbrechung und der magnetischen Drehung der Polarisationsebene bei den Flüssigkeiten. T. W. 16. 1.

**1112.** *C. Carpini.* Sullo spettro fotoelettrico del selenio. N. C. P. (5) 11. 35.

**1113.** *C. Carpini.* Sull' effetto fotoelettrico del Selenio. R.A.L.R. (5) 14. B. 667.

**1114.** *C. Carpini.* Über den photoelektrischen Effekt am Se. P.Z. 7. 306.

**1115.** *N. A. Hesehus.* Über die Lichtempfindlichkeit des Se. VI. P. Z. 7. 162.

**1116.** *R. Lindemann.* Über lichtelektrische Photometrie und über die Natur der lichtelektrisch wirksamen Strahlung des Kohlenbogens. A. P. L. (4) 19. 807.

**1117.** *N. D. Zelinsky.* O svetovych javlenijach electričeskago razrjada y nekotorych organičeskich veščestv pri temperature zidkago vozducha. (Über Lichterscheinungen der elektrischen Entladung in einigen organischen Stoffen bei der Temperatur der flüssigen Luft). J.R.P.C.G. 34. 18.

Siehe auch 1623; 2622—23.

### Elektrisches Licht.

**1118.** *C. D. Cchild.* Der Stand der Forschung über den Lichtbogen. J. R. E. 3. 189.

**1119.** *A. A. Ejchenvald.* Voltova duga (Der voltaische Bogen). R. P. W. 8. 149.

1120. *C. Déguisne.* Über den elektrischen Lichtbogen. J.P.V.F. 1904—05. 49.

1121. *G. Granqvist.* Zur Theorie des elektrischen Lichtbogens. A.M.A.F. 7. Nr. 17.

1122. *J. Stark, T. Retschinsky* u. *A. Schaposchnikoff.* Untersuchungen über den Lichtbogen. A.P.L. (4) 18. 213.

1123. *G. B. Dyke.* On the flux of light frome the electric arc with varying power-supply. P.P.S.L. 19. 616; P.M. (6) 10. 216.

1124. *W. B. v. Czudnochowski.* Über einige besondere Eigenschaften des eingeschlossenen Lichtbogens. V.D.P.G. 7. 465.

1125. *J. E. Lilienfeld.* Eine Methode zur Bestimmung der Temperatur und der Wärmeleitfähigkeit des positiven Glimmlichtes. V.D.P.G. 8. 182.

1126. *M. Reich.* Größe und Temperatur des negativen Lichtbogenkraters. P.Z. 7. 73.

1127. *Crew.* The ionic theory of the arc and spark. E.R.N.Y. 46. 416.

1128. *V. Mitkevič.* K voprosu ob obratnoj elektrodvižuščej sile voltovoj dugi (Über die kontraelektromotorische Kraft des Volta'schen Bogens). J.R.P.C.G. 34. 223.

1129. *Hruschka.* Ursache der gegenelektromotorischen Kraft des Lichtbogens. Z.E.M. 8. 83.

1130. *H. Crew* and *B. J. Spence.* Variation of arc spectra with phase of the current producing them. A.J.C. 22. 199.

1131. *A. Larsen.* Die Abhängigkeit des elektrischen Bogenlichtes von der Stromstärke und der Spannung. M.F. L. 2. 118.

1132. *Shepardson.* Notes on the power factor of the alternating current arc. W.E. 37. 179.

1133. *Blondel.* Remarques sur les phénomèees oscillatoires des réseaux; influence des propriétés de l'arc électrique. B.S.I.E (2) 5. 299.

1134. *Clough.* Efficiency tests of the mercury arc rectifier. H.A. 16. 607.

1135. *J. J. Borgman.* Javlenija električeskago svečenija v gazach (Elektrische Lichterscheinungen in Gasen). J.R.P.C.G. 34. 28.

Siehe auch 1116; 1386; 1389; 1409; 1436; 1447—48; 3094; 3544—48.

### Magnetoptik.

1136. *D. A. Goldhammer.* Sovremennyja vozzrenija na namagničenie sveta (Die modernen Ideen über die Magnetisierung des Lichtes). J.R.P.C.G 34. 255.

1137. *N. Vaccaro.* Lo spettro dell' azoto nello campo magnetico. N.C.P. (5) 11. 222.

1138. *J. E. Purvis.* Experiments on the band-spectrum of nitrogen in a strong magnetic field P.C.P.S. 13. 354.

1139. *J. E. Purvis.* The influence of the strong magnetic field on the spark spectre of Pd, Rh and Ru. P.C.P.S. 13 325.

1140. *F. Agerer.* Über magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in Salzlösungen und Bestimmung der absoluten magnetoptischen Konstanten für Wasser. S.A.W. 114. 803.

1141. *N. Orlov.* Nekotorye slučai magnitnych vraščenij v peremennom elektromagnitnom pole (Mehrere Fälle von magnetischer Drehung in einem elektromagnetischen Felde). J.R.P.C.G. 34. 233.

1142. *R. W. Wood.* The magnetooptics of sodium vapour and the rotatory dispersion formula. P.P.S.L. 19. 742.

1143. *Cotton.* Sur le biréfringence magnétique des liquides hétérogènes. S.F.P. 235. 4; B.S.F.P. 1905. 99.

1144. *O. Scarpa.* Ricerche magnetiche e ottiche su alcuni colloidi magnetici. A.A.E.J. 9. 700; N.C.P. (5) 11. 80; 162.

1145. *W. Schenkel.* Untersuchungen an der Hg-dampflampe im Magnetfelde. M.P.G.Z. 1906. Nr. 9. 11.

1146. *H. Kauffmann.* Die magnetoptische Messung des Zustandes von Benzolderivaten. Z.P.C. 55. 547.

Siehe auch 1091; 1111; 1672.

### Lichtgeschwindigkeit.

1147. *E. Grimsehl.* Vorlesungsversuche zur Bestimmung des Verhältnisses der Lichtgeschwindigkeit in Licht- und andern brechenden Substanzen. P.Z. 7. 472.

1148. *E. W. Morley* and *D. C. Miller.* Report of an experiment to detect the Fitzgerald - Lorentz effect. P.A.Bo. 41. 321.

### Photometrie.

1149. *J. Scheiner.* Die Grundprinzipien der Photometrie. H.E.B. 18. 49; 118.

1150. *Abady.* Position of photometric measures. J.G.L. 91. 27.

1151. *E. Haudié.* Étude photométrique des images formées par les systèmes optiques. B.S.F.P. 1905. 419.

**1152.** *K. Schaum.* Über die spektrale Helligkeitsverteilung und über das Purkinjesche Phänomen. Z.W.P. 3. 272.

**1153.** *A. Pflüger.* Die Anwendung der Thermosäule zu photometrischen Messungen im Ultraviolett. J.P.R. 19. 17.

**1154.** *H. Krüss.* Elementare Darstellung der Helligkeit optischer Instrumente. D.M.Z. 1902. 245; 254.

**1155.** *F. Cohn.* Die Helligkeitsgleichung bei visuellen und photographischen Beobachtungen. A. N. K. 172. 225.

**1156.** *K. Schaum.* Über die Helligkeit des Sonnenlichtes und einiger künstlicher Lichtquellen. J.P.R. 19. 98.

Siehe auch 1116; 1837: 1839; 3549; 3551—53.

### Physiologische Optik.

**1157.** *W. F. Barrett.* On entoptic vision. P.S.D. (2) 11. 48; 62.

**1158.** *R. Daublewsky v Sterneck.* Versuch einer Theorie der scheinbaren Entfernungen. A.A.W. 1905. 475.

**1159.** *J. M. Bentley.* The simplicity of colour tones. A.J.T.W. 14. 92.

**1160.** *W. Holtz.* Die Wirkung des Hintergrundes bei der Größenschätzung z. B. des Mondes am Horizont. N.G.G. 1905. 442.

**1161.** *F. Krüger.* Das Aussehen der Sterne. M.V.A.P. 15. 125.

**1162.** *A. Elschnig.* Die Tiefenwahrnehmung im Raume und das stereoskopische Sehen. S.V.N.W. 46. 307.

**1163.** *J. W. Baird.* The influence of accomodation and convergence upon the perception of depth. A.J.P.W. 14. 180.

Siehe auch 961; 1152; 1967; 3566—67.

### Scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes.

**1164.** *S. Figee.* De vorm van de hemelgewelf te Batavia. N.T.N.I. 65. 35.

**1166.** *E. Reimann.* Die scheinbare Vergrößerung der Sonne und des Mondes am Horizont. Z.P.P. 37. 250.

Siehe auch 1160.

### Wärmelehre.

**1167.** *Le Bel.* Sur l'équilibre thermique. B.S.F.P. 1905. 76.

**1168.** *S. Zaremba.* Solution générale du problème de Fourier. B.I.C. 1905. 65.

**1169.** *J. Boussinesq.* Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides. J. M. (6) 1. 285.

**1170.** *Merkelbach.* Reflexion der Wärmestrahlen an Hohlspiegeln. Z.P. 18. 351.

**1171.** *L. S. Ornstein.* Over de beweging van een metaaldraad door een stuk ijz. C.A.A. 14. 629.

Siehe auch 516; 859; 1420; 1569; 1597; 3642—3740.

### Thermische Nachwirkung.

Siehe 1355.

### Temperatur.

**1172.** *Bender.* Über Anfangstemperaturen. G.Z.B. 2. 595.

Siehe auch 1344.

### Thermodynamik.

**1173.** *N. N. Šiller.* Osnovnye zakony termodinamiki (Die Grundgesetze der Thermodynamik). J.R.P.C.G. 34. 377.

**1174.** *H. A. Lorentz.* Die Thermodynamik und die kinetischen Theorien. J.R.E. 2. 363.

**1175.** *V. A. Michelson.* Obzor novejšich izledovanii po termodinamike lučistoj energii (Bericht über moderne Arbeiten in betreff der Thermodynamik der Strahlungsenergie). J.R.P.C.G. 34. 157.

**1176.** *W. M. Kozlowski.* Ewolucya jako ogólna zasade stawania się (Die Evolution als allgemeines Prinzip des Werdens betrachtet). P.F.W. 5. 368.

**1177.** *E. H. Amagat.* Sur la pression interne des fluides et l'équation de Clausius. S.F.P. 250. 2; B.S.F.P. 1906. 104; J.P. (4) 5. 449.

**1178.** *Gardner.* Determination of exponents of adiabatics. J.F.I. 159. 199.

**1179.** *P. N. Pavlov.* Über das thermodynamische Potential einer gelösten Substanz (russ.). M.S.O. 28. 177.

**1180.** *H. J. Reiff.* Zur Demonstration des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes. Z.P. 19. 230.

**1181.** *S. H. Burbury.* Lord Rayleigh on the virial equation. P.M. (6) 10. 33.

**1182.** *P.* und *T. Ehrenfest.* Bemerkungen zur Theorie der Entropiezunahme in der statistischen Mechanik von Gibbs. A.A.W. 1906. 95.

**1183.** *P. Koturnickij.* Točnyja vyraženija energii i entropii dlja smesi dvuch sostojanij (Genaue Ausdrücke der Energie und der Entropie für ein Gemisch der Körper in zwei Zuständen) J.R.P.C.G. 34. 29.

1183. *A. Leduc.* Sur la chaleur de fusion de la glace. C.R. 142. 46.

1185. *A. Boltzmann.* Bemerkungen zu Herrn Valentiners Abhandlungen über den maximalen Wirkungsgrad umkehrbarer Kreisprozesse (A.P.L. (4) 15. 829) A.P.L. (4) 18. 642.

1186. *J. Theurer.* O thermodynamice dějů nepřevratných (Über irreversible thermodynamische Vorgänge). C. 35. 89; 219.

1187. *W. Mc F. Orr.* On Clausius' theorem for irreversible cycles and on the increase of entropy. P.M. (6) 9. 728.

1188. *J. D. van der Waals.* Contribution à la théorie des mélanges. A.N. (2) 11. 115.

1189. *P. Boedke.* Zur Theorie der Sättigungserscheinungen binärer Gemische. Z.P.C. 48. 330.

1190. *M. Centnerszwer.* Über eine Anwendung der Methode von Cailletet und Mathias zur Bestimmung des kritischen Volumens. Z.P.C. 49. 199.

1191. *J. B. Goebel.* Über eine Modifikation der van't Hoff'schen Theorie der Gefrierpunktserniedrigung. Z.P.C. 53. 213; 55. 315.

1192. *K. Schaposchnikow.* Eine empirische Beziehung zwischen den Dichten je zweier Flüssigkeiten. Z.P.C. 51. 542.

1193. *A. Einstein.* Theorie der Brown'schen Bewegung. A.P.L. (4) 19. 371.

1194. *W. Meyerhoffer.* Über Reifkurven. Z.P.C. 46. 379.

1195. *G. Helm.* Erwiderung. Z.P.C. 47. 288.

1196. *A. Scheye.* Nochmals das Intensitätsgesetz. Z.P.C. 48. 237. — *G. Helm* 49. 618.

1197. *G. Bakker.* Bemerkungen A. J. Batschinskis (Z.P.C. 41. 741) Z.P.C. 47. 281; 49. 376. — *A. Batschinski* 743.

1198. *H. Fay, A. W. Higgins* and *E. W. Coburn.* A study of the relations between the microstructure, the heat treatment and the physical properties of the axle steel. T.Q. 16. 9.

1199. *A. Schmidt.* Das leichteste Gas. P.Z. 7. 97. — *V. Fischer.* 367.

Siehe auch 612; 644; 652; 894; 1099; 1383; 1581; 1607; 2088; 2475; 2558; 3047—50; 3701.

### Zweiter Hauptsatz.

1200. *F. Hasenöhrl.* Zur Ableitung des math. Ausdruckes des 2. Hauptsatzes. W. A. W. 1906. 347.

1201. *M. Blieden.* A restatement of the second law of thermodynamics and its bearing upon our views of heat and radiation. R.B.A. 1905. 344.

1202. *J. Nabl.* Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik und der Satz von der Entropie im Lichte des Boltzmann'schen H-theorems der Gastheorie. N R. 21. 337.

Siehe auch 2343.

### Kritische Temperatur.

1203. *J. J. van Laar.* De moleculaire verhooging der laagste kritische temperatuur van een binair mengsel van normale componenten. C.A.A. 14. 108.

1204. *G. Bertrand* et *J. Lecarme.* Sur l'état de la matière au voisinage du point critique. A.C.P. (8) 7. 279.

1205. *K. Olszewski.* Contribution à l'étude du point critique de l'hydrogène. A.C.P. (8) 8. 193.

Siehe auch 662; 869; 1219; 1224; 1236 bis 1237.

### Dämpfe.

1206. *C. Zenghelis.* Über die Verdampfung fester Körper bei gewöhnlicher Temperatur. Z.P.C. 50. 219.

1207. *V. J. Kurbatov.* O zavisimosti meždu s krytoj teplotoj isparenija i plotnostju parov (Über die Beziehung zwischen der latenten Wärme, der Verdunstung und der Dampfdichte). J.R.P.C.G. 34. 250.

1208. *K. Scheel.* Ableitung von Formeln für die Sättigungsdrucke des Wasserdampfes über Wasser, Eis und verdünnte Schwefelsäure bei niedriger Temperatur. V.D.P.G. 7. 391; P.Z. 6. 867.

1209. *F. Richter.* Das Verhalten überhitzten Wasserdampfes in der Kolbenmaschine. M.F.I. 30. 49.

Siehe auch 745; 1224; 1255; 1263; 1315; 2292—93; 3651—57.

### Verdampfungswärme.

1210. *C. Matthias.* Sur la chaleur de vaporisation apparente des gaz liquéfiés. J.P. (4) 4. 733.

Siehe auch 873.

### Schmelzwärme.

1211. *R. Drucker.* Die Abhängigkeit der Gefrierpunktsdepression von der Schmelzwärme. Z.E. 11. 904.

### Molekularwärme.

**1212.** *F. Richarz.* Über den Beweis der Einatomigkeit eines Gases aus seiner Molekularwärme. S.G.M. 1905. 93.

### Mechanisches Wärmeäquivalent.

**1213.** *A. H. Borgesius.* Zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents. Z.P. 19. 163.

**1214.** *H. Rubens.* Apparat zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents. P.Z. 7. 272.; V.D.P.G. 8. 77.

**1215.** *G. Casazza.* Critica della teoria sulla trasformazione del calore in lavoro. I.I.M. 10. 138; 156.

### Specifische Wärme.

**1216.** *W. F. Magie.* The specific heats of solutions IV. P.U.B. 14. 112.

**1217.** *P. Blackman.* Quantitative relation between the specific heats of a gas and its molecular constitution. C.N. 93. 145.

**1218.** *S. Lussana.* A proposito di uno studio recente sul calore specifico dei gas. N.C.P. (5) 10. 192.

**1219.** *M. Reinganum.* Über Energie und spezifische Wärme in der Nähe der kritischen Temperatur. A.P.L. (4) 18. 1008.

**1220.** *A. Fliegner.* Einige Bemerkungen über die spezifischen Wärmen der elastischen Flüssigkeiten. V.N.Z. 50. 516.

**1221.** *P. Duhem.* Sur les 2 chaleurs spécifiques d'un milieu élastique faiblement déforme; formules fondamentales. C.R. 143. 335.

**1222.** *F. Richarz.* Der Wert des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen für ein Gemisch zweier Gase, insbesondere für ozonhaltigen Sauerstoff. A.P.L. (4) 19. 639.

**1223.** *B. Hartmann.* Untersuchung über die Leistungsfähigkeit der Aßmann'schen Methode zur experimentellen Bestimmung des Verhältnisses $c_p : c_v = k$ der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen bei Gasen. A.P.L. (4) 18. 252.

**1224.** *H. Monnory.* Calcul élémentaire des valeurs des chaleurs spécifiques d'un liquide et de sa vapeur saturée à la température critique. J.P. (4) 5. 421.

**1225.** *E. H. Amagat.* Discontinuité des chaleurs spécifiques à saturation et courbes Thomson. C.R. 142. 1120; S.F.P. 245—247. 19.

**1226.** *O. Knoblauch.* Über die specifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes für Drucke bis 8 Atm. und Temperaturen bis 350°. P.Z. 6. 801.

**1227.** *L. Holborn* und *F. Henning.* Über die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes. A.P.L. (4) 18. 739.

**1228.** *F. Richarz.* Über Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme fester Elemente und über spezifische Wärme und spezifisches Gewicht ihrer allotropen Modifikationen. S.G.M. 1905. 100.

**1229.** *E. H. Amagat.* Sur quelques points relatifs à l'étude des chaleurs spécifiques et l'application à celles-ci de la loi des États correspondents. C.R. 142. 1303; 143. 6.

**1230.** *W. F. Magie.* Specific heats of electrolytes in solution. P.U.B.13. 67.

Siehe auch 952; 1307; 1319 q; 3659.

### Lösungen.

**1231.** *E. Linder* and *H. Picton.* Solution and pseudo-solution IV. J.C.S. 87. 1906.

**1232.** *N. N. Šiller.* *K* termodinamike nenasyščennych rastvorov (Zur Thermodynamik ungesättigter Lösungen). J.R.P.C.G. 34. 13.

**1233.** *J. E. Trevor.* On the general equations of the theory of solutions. J.P.C. 10. 392.

**1234.** *P. A. Zilov.* Kineticeskaja teorija rastvorov (Die kinetische Theorie der Lösungen). R.P.W. 3. 212.

**1235.** *J. Timmermans.* Die kritische Lösung von ternären Gemengen. Z.E. 12. 644.

**1236.** *M. Centerszwer.* Über kritische Temperaturen der Lösungen. Z.P.C. 46. 427.

**1237.** *M. Centnerszwer* und *M. Zoppi.* Über kritische Temperaturen der Lösungen II. Z.P.C. 54. 689.

**1238.** *M. Centnerszwer* und *A. Pakalneet.* Die kritischen Drucke der Lösungen. Z.P.C. 55. 303.

**1239.** *E. Sonstadt.* The attraction force of crystals for like molecules in saturated solutions. J.C.S. 89. 339.

**1240.** *F. A. H. Schreinemakers.* Cristaux mixtes dans les systèmes ternaires. A.N. (2) 11. 53.

**1241.** *F. Hoffmann* und *K. Langbeck.* Studien über Löslichkeitsbeeinflussung. Z.P.C. 51. 385.

**1242.** *J. E. Trevor.* On solubility curves. J.P.C. 10. 99.

**1243.** *J. J. van Laar.* Über das anormale Verhalten von Löslichkeitskurven in bezug auf Hydratbildung in der flüssigen Lösung. Z.P.C. 54. 750.

**1244.** *A. Einstein.* Eine neue Bestimmung der Molekulardimensionen. A.P.L. (4) 19. 289.

**1245.** *C. Christiansen.* Om oprindelsen til den af Hr Alf. Sinding-Larsen paaviste lagdeling in oplosninger. B.A. Co. 1905. 307.

**1246.** *D. C. P. Konovalov.* Kritičeskaja oblast rastvorov i javlenija opalescencii (Das kritische Gebiet der Lösungen und die Erscheinungen der Opaleszenz). J.R.P.C.G. 34. 738.

**1247.** *N. Schiller.* Einige Bemerkungen über das gegenseitige Verhalten des aufgelösten Stoffes und des entsprechenden Lösungsmittels. Z.P.C. 54. 455.

**1248.** *J. W. Brühl* und *H. Schröder.* Über Salzbildungen in Lösungen II—III. V.G.H. (2) 8. 182; 246.

**1249.** *B. D. Steele, D. Mc Intosch* und *E. H. Archibald.* Die Halogenwasserstoffsäuren als leitende Lösungsmittel. Z.P.C. 55. 129.

**1250.** *W. Sutherland.* The measurements of large molecular masses. R.A. A. 10. 117.

**1251.** *P. Blackman.* Solution: fractional extraction. C.N. 93. 72.

**1252.** *J. Meyer.* Über Molekulargewichtsbestimmungen in festen Lösungen. D.V.N. 77. 94.

**1253.** *P. Saurel.* On the displacement of the equilibrium of univariant and of bivariant systems. J.P.C. 10. 108.

Siehe auch 539—541; 648—650; 866; 883—884; 898—899; 907; 916—918; 923—927; 1073; 1093; 1179; 1216; 1259; 1277; 1318; 1319a; b; 1457; 1471—73; 2191—92; 2233—36; 2520.

### Ionentheorie.

**1254.** *O. W. Richardson.* The rate of recombination of ions in gases. P.M. (6) 10. 242.

**1255.** *G. Moreau.* Sur la recombinaison des ions des vapeurs solides. C.R. 142. 392.

**1256.** *J. J. Thomson.* The rate of recombination and the size of gaseous ions. P.C.P.S. 13. 170.

**1257.** *A. Korn* und *E. Strauss.* Über eine Beziehung zwischen Wanderungsgeschwindigkeit und Form der Ionen. S.A.M. 35. 13.

**1258.** *J. Stark.* Über den Zusammenhang zwischen Translation und Strahlungsintensität positiver Atomionen. P.Z. 7. 251.

**1259.** *J. L. R. Morgan* und *C. W. Kanolt.* Über die Verbindung der Lösungsmittel mit den Ionen. Z.P.C. 48. 365.

**1260.** *P. Lewis.* Ionization in gases from coloured flames. P.R. 21. 353.

**1261.** *H. Geitel.* Über die spontane Ionisierung der Luft und anderer Gase. V.D.P.G. 8. 23.

**1262.** *P. B. Pentscheff.* Über den Spannungsabfall in der positivem Schicht im H. P.Z. 7. 463.

**1263.** *G. Moreau.* Recherches sur l'ionisation des vapeurs salines. A.C.P. (8) 8. 201.

**1264.** *R. B. Denison* and *B. D. Steele.* On the accurate measurement of ionic velocities with applications to various ions. T.R.S.L. 205. 449.

**1265.** *T. H. Laby* and *G. A. Carse.* On a relation between the velocity and the volume of the ions of certain organic acids and bases. P.C.P.S. 13. 288.

**1266.** *P. Walden.* Zusammenhang zwischen der innern Reibung und Ionengeschwindigkeit bzw. Diffusionsgeschwindigkeit. Z.E. 12. 77.

**1267.** *J. W. Mc Bain.* Die Messung der Wanderungsgeschwindigkeiten komplexer Ionen. Z.E. 11. 961; 12. 23.

**1268.** *W. Palmaer.* Einige Bemerkungen über das Gesetz der unabhängigen Wanderung der Ionen. Z.E. 12. 509.

**1269.** *L. Bruner.* Über den Proportionalitätsfaktor zwischen den Beweglichkeiten und der absoluten Geschwindigkeiten der Ionen. Z.E. 12. 188.

**1270.** *G. Buchböck.* Über die Hydratation der Ionen I. Z.P.C. 55. 563.

**1271.** *M. Le Blanc.* Kann ein Element sowohl positive wie negative Ionen bilden? Z.E. 11. 813.

**1272.** *W. Böttger.* Löslichkeitsstudien an schwer löslichen Stoffen. Z.P.C. 46. 521.

**1273.** *O. W. Richardson.* The structure of ions formed in gases at high pressure. P.M. (6) 10. 177.

Siehe auch 630; 805; 825; 844—845; 1063; 1127; 1457—59; 1563; 2149—51; 2201—02; 2329; 2521; 2962.

(Fortsetzung folgt.)

# Die Torsion eines Rotationskörpers um seine Achse.

Von Fr. A. Willers in Göttingen.

(Mit 4 Tafeln.)

Schon bei verschiedenen Problemen hat es sich als notwendig erwiesen, zu untersuchen, in welcher Weise sich die Spannungen bei auf Torsion beanspruchten Wellen an Stellen ändern, in denen der Wellenradius irgendwie variiert.[1]) Als erster hat nun Herr Föppl in den Sitzungsberichten der Kgl. Bayrischen Akademie der Wissenschaften 1905, Bd. 35, S. 249 und Berichtigung dazu Bd. 35, Seite 504 dieses Problem kreisrunder Wellen mit beliebiger Meridiankurve behandelt, d. h. also solcher Körper, die durch Rotation einer beliebigen Kurve $z = f(r)$ um die $Z$-Achse entstehen. Dabei wird man natürlich $z = f(r)$ immer so wählen, daß in der Praxis vorkommende Wellen entstehen; insbesondere handelt es sich also um zwei koaxiale Zylinder von verschiedenem Radius, die irgendwie, etwa durch einen Viertelkreis ineinander übergehen, oder um Wellen mit irgendwelchen Einschnitten oder aufgelagerten Bunden, wie sie sich z. B. bei Kammlagern finden.

Mit dem ersten Fall beschäftigt sich Herr Föppl dann weiter in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1906, Bd. 50, S. 1032. Dort gibt er als Größe der an einer solchen abgerundeten einspringenden Ecke bei den gewöhnlich angewandten Wellenformen auftretenden Spannung diejenige an, die an der Oberfläche einer durch dasselbe Torsionsmoment beanspruchten Hohlwelle von der Wandstärke 1,5 $\varrho_0$ auftritt, wo $\varrho_0$ der Abrundungsradius ist. Das ist das 2,09fache der Spannung an der Oberfläche der Welle vom kleineren Radius in genügender Entfernung von der Übergangsstelle. — Herr Föppl sucht das Problem analytisch zu behandeln, deutet aber in der ersten Abhandlung an, daß sich vielleicht ein graphisches Verfahren entwickeln lasse, welches eine genauerê Behandlung gestatte. — Ein solches Verfahren möchte ich im Folgenden ableiten und mit Hilfe desselben einige derartige Wellenformen auf ihre maximale Spannung hin untersuchen.

Da wir es, wie schon oben erwähnt, mit Rotationskörpern zu tun haben, so wendet man natürlich am besten Zylinderkoordinaten an. Es

1) Vergl. z. B.: Duffing, Beiträge zur Bestimmung der Formänderung gekröpfter Kurbelwellen. (Schlußbemerkung). Berlin 1906.

mögen hier daher zunächst die Gleichungen der Elastizitätstheorie, soweit sie für uns in Betracht kommen, in Zylinderkoordinaten zusammengestellt werden.[1]) Bezeichnen wir mit $r$, $\theta$, $z$ die Koordinaten und mit $\varrho$, $\vartheta$, $\zeta$ die mit der Formänderung verbundene Koordinatenänderung, und zwar seien $\varrho$, $\zeta$ direkt die Längenänderungen von $r$, $z$; $\vartheta$ aber nur die Winkeländerung, so daß die Längenänderung senkrecht zur $rz$-Ebene $r \cdot \vartheta$ ist, dann sind die Deformationsgrößen erster Art, die durch die Dehnungen in den Richtungen $r$, $\theta$, $z$ bestimmt werden.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial \varrho}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + \frac{\varrho}{r}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

und die zweiter Art, die mit den Winkeländerungen zwischen den Koordinatenachsen zusammenhängen

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial \varrho}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial r}$$

$$\gamma_{r\theta} = r\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial \theta}.$$

Die Dilatation ist somit:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\varrho r) + \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Wir bezeichnen ferner mit $\sigma_r$, $\sigma_\theta$, $\sigma_z$ die Normalspannungen parallel $r$, $\theta$, $z$ und mit $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$, $\tau_{zr}$ die Schubspannungen in einer Ebene senkrecht zu $\theta$, $z$, $r$ in der Richtung $r$, $\theta$, $z$ die gleich sind denen in einer Ebene senkrecht zu $r$, $\theta$, $z$ in der Richtung $\theta$, $z$, $r$. Dieselben hängen mit den Deformationsgrößen zusammen durch die Gleichungen:

$$\sigma = \frac{2G}{m-2}\Delta + 2G\,\varepsilon$$

$$\tau = G\gamma$$

wo $G$ der Schubelastizitätsmodul und $m$ die Verhältnisziffer zwischen Längsdehnung und Querzusammenziehung bei linearem Spannungszustand ist.

1) Vergl. z. B.: Love: Theorie der Elastizität. — Deutsch von A. Timpe. Leipzig. Teubner. 1906.

Endlich lauten die Gleichgewichtsbedingungen, falls keine äußeren Kräfte wirken:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0.$$

Es handelt sich bei unserer Überlegung um Wellen, deren Querschnitte Kreise mit beliebig variierendem Radius sind, jedoch möge die Variation auf ein endliches Bereich beschränkt sein und von diesem nach beiden Seiten hin der Radius konstant sein. Wir wollen nun nur den mittleren Teil der Welle betrachten, der von den Enden soweit entfernt ist, daß die Verteilung der Kräfte über den Endquerschnitt ohne Einfluß ist auf die auftretenden Deformationen und Spannungen. — Das ist eine Beschränkung, wie man sie analog bei der St. Venantschen Methode zur Untersuchung zylindrischer Stäbe mit beliebigem Querschnitt macht. — Meistens wird es daher für unsere Überlegungen praktisch sein, einfach anzunehmen, die Welle erstrecke sich mit dem konstanten Radius, den das letzte Stück derselben hat, ins Unendliche. Tordieren wir eine solche Welle, so können wir annehmen, daß bei nicht zu großer Deformation nur Verschiebungen $r \cdot \vartheta$ in der Richtung $\theta$, also senkrecht zu den Meridianschnitten auftreten.[1]) Diese Verschiebungen $\vartheta$ werden aus Symmetriegründen von $\theta$ unabhängig sein, werden also für alle Meridianschnitte die gleiche Größe haben, so daß sich Kreise, deren Mittelpunkte auf der Achse liegen, als Ganzes ohne Deformation in sich verschieben.

Unter dieser Voraussetzung vereinfachen sich die obigen Gleichungen wesentlich, denn es wird $\varrho = 0$; $\zeta = 0$ und $\vartheta$ nur Funktion von $r$ und $z$. Die Dilatation wird dann

$$\varDelta = 0.$$

Ferner werden die Normalspannungen:

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \sigma_z = 0$$

und die Schubspannungen:

(1) $$\tau_{\theta z} = Gr\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$$

$$\tau_{rz} = 0$$

(2) $$\tau_{r\theta} = Gr\frac{\partial \vartheta}{\partial r}.$$

1) Vergl. die oben angeführte Abhandlung von Föppl in den Sitzungsberichten der Münchener Akademie. 1905.

Die Gleichgewichtsbedingungen werden daher:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \tag{3a}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} = 0 \tag{3b}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} = 0. \tag{3c}$$

Die erste und dritte dieser letzten Gleichungen sind selbstverständlich, da wir angenommen hatten, daß die Deformationen und somit also auch die Spannungen von $\theta$ unabhängig sind; dagegen gibt uns die Gleichung (3b) eine erste wesentliche Beziehung zwischen den Spannungen.

In den für uns weiterhin in Betracht kommenden Gleichungen (1), (2) und (3b) treten nur Schubspannungen auf, die in Ebenen senkrecht zu $\theta$ oder in der Richtung $\theta$ liegen; da wir einen Rotationskörper haben, sind alle diese Ebenen gleichwertig; das Problem ist also auf ein ebenes reduziert. Wir lassen deshalb im Folgenden die Indices $\theta$ überall fort und bezeichnen z. B. mit $\tau_r$ eine Schubspannung in der Meridianebene in der Richtung $r$. Kennen wir die Spannungen in einer solchen Ebene, $\theta =$ const, so kennen wir den ganzen Spannungszustand des Körpers, insbesondere also auch die Spannungen in jedem Querschnitt, da nach einem bekannten Satze der Elastizitätslehre $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ und ebenso $\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z}$ ist.

Die Gleichung (3b) schreibt sich dann also:

$$\frac{\partial \tau_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} + \frac{2\tau_r}{r} = 0$$

und das läßt sich zusammenfassen in:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r^2\tau_z) = 0. \tag{4}$$

Führen wir nun zunächst ohne Rücksicht auf die physikalische Bedeutung eine Hilfsfunktion $u$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -r^2\tau_r = \nabla_z u \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= +r^2\tau_z = \nabla_r u \end{aligned} \tag{5}$$

ein, so ist die Gleichung (4) für sich allein durch jede zweimal differentiierbare Funktion $u$ erfüllt und zwar ist diese Lösung vollständig allgemein. Dabei bezeichnen wir mit $\nabla u$ den Gradienten von $u$ und mit $\nabla_r u$, $\nabla_z u$ seinen Komponenten. Der Gradient von $u$ ist also der um $\frac{\pi}{2}$ im Sinne von der $z$-Achse zur $r$-Achse gedrehte Vektor $r^2\tau$.

Es besteht aber noch eine weitere Beziehung zwischen den Größen $\tau_r$ und $\tau_z$, welche sich aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt. Dieselben lauteten

$$\frac{\tau_z}{r} = G\frac{\partial\vartheta}{\partial z}; \quad \frac{\tau_r}{r} = G\frac{\partial\vartheta}{\partial r}.$$

Setzt man nun

(6) $$v = G\vartheta,$$

so erhält man

(7) $$\frac{\tau_z}{r} = \frac{\partial v}{\partial z} = \nabla_z v$$
$$\frac{\tau_r}{r} = \frac{\partial v}{\partial r} = \nabla_r v.$$

Für sich allein kann $v$ wieder irgendeine beliebige differentiierbare Funktion sein. Da nun aber gleichzeitig die Relationen (5) und (7) bestehen sollen, so gibt das zwei Bedingungsgleichungen für $u$ und $v$

(8) $$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r^3}\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} = +\frac{1}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r},$$

und aus diesen beiden Gleichungen folgen durch Elimination von $u$ oder $v$ die beiden adjungierten Differentialgleichungen für $u$ resp. $v$

(9) $$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$$

(10) $$\frac{\partial}{\partial z}\left(r^3\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial v}{\partial r}\right) = 0.$$

Es handelt sich also jetzt darum, Lösungen dieser beiden partiellen Differentialgleichungen bei gegebenen Randbedingungen zu finden. Da diese Randbedingungen nun aber bei den in der Praxis vorkommenden Wellen nicht analytisch, sondern graphisch gegeben sind, und da die analytische Formulierung derselben meistens ziemlich schwierig sein wird, so wird eine graphische Lösung, welche die für die Praxis nötige Genauigkeit gibt, einer analytischen vorzuziehen sein.

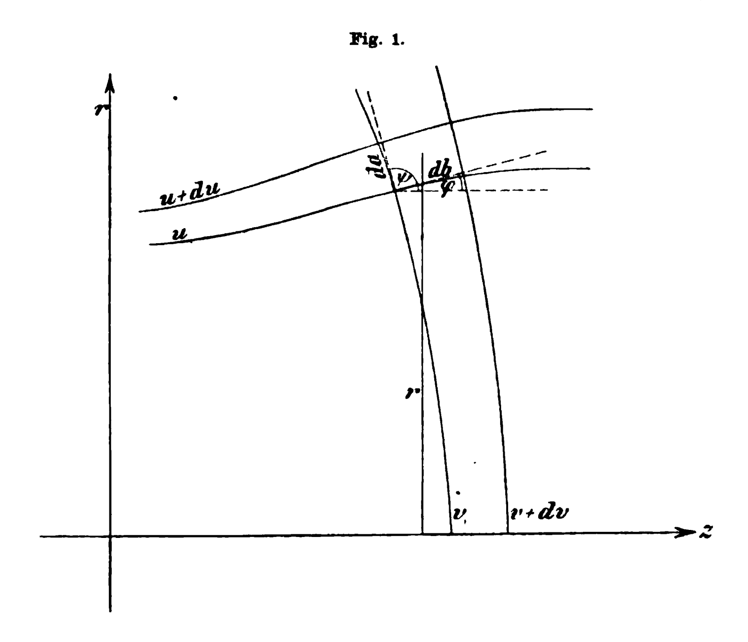
Es läßt sich nun leicht zeigen, daß die gefundenen Bedingungen auch hinreichend sind. Haben wir etwa eine Lösung $v$ der Differentialgleichung (10), die der gegebenen Randbedingung genügt, so setzen wir definitionsweise in Übereinstimmung mit (6) und (7)

$$v = G\vartheta$$
$$\frac{\tau_{z\theta}}{r} = \frac{\partial v}{\partial z}$$
$$\frac{\tau_{r\theta}}{r} = \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Nehmen wir nun noch die weiteren Bedingungen hinzu, daß die anderen Verschiebungen $\varrho$ und $\zeta$ Null sind, und daß $\vartheta$ von $\theta$ unabhängig ist, so folgt aus den Gleichungen auf S. 226, daß die Normalspannungen und $\tau_{rz}$ Null sind. Führen wir das alles in die auf S. 227 stehenden Gleichgewichtsbedingungen ein, so sind die erste und dritte identisch erfüllt, die zweite gibt nach einiger Umformung die Gleichung (10), ist also auch erfüllt. Es wird somit durch die Funktion $v$ ein Gleichgewichtszustand des tordierten Rotationskörpers dargestellt, der wirklich möglich ist. Das gleiche läßt sich von einer Lösung der Differentialgleichung (9) zeigen.

Ehe ich nun auf die Lösungen der Gleichungen (9) und (10) eingehe, möchte ich zeigen, daß die oben rein analytisch eingeführten

Fig. 1.




Funktionen $u$ und $v$ für das Problem sehr wichtige physikalische Größen sind. — Angenommen, wir hätten für irgend eine Randbedingung die obigen Gleichungen integriert, und hätten in einer Zeichnung die Kurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ eingetragen, so stehen diese Kurven überall zu einander senkrecht; denn nach (5) steht der Gradient von $u$ auf dem von $\tau$ senkrecht und der Gradient von $v$ ist nach (7) demjenigen von $\tau$ parallel. Man sieht das übrigens auch daraus, daß der Zähler in dem Ausdruck für den Kosinus des eingeschlossenen Winkels

(11) $$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = r\tau_r\tau_z - r\tau_r\tau_z$$

verschwindet. Bezeichnen wir also die Neigung der Tang nte an die Kurve $u = \text{const}$ mit $\varphi$, die der Tangente an $v = \text{const}$ mit $\psi$, wo beides gegen die positive $z$-Achse gerechnet ist, so ist

$$(12) \qquad \psi = \varphi + \frac{\pi}{2} \quad \text{(Fig. 1).}$$

Wir müssen hier in Übereinstimmung mit der Bemerkung zu den Gleichungen (5) das positive Zeichen wählen.

Die für uns wichtigeren Kurven $u = \text{const}$ können wir einfach als Spannungslinien bezeichnen; denn sie haben folgende Eigenschaften:

1. Sie geben uns die Richtung der Spannung an. Da nämlich für diese Kurven $du = 0$ ist, so ist nach Gleichung (5)

$$(13) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial z} dz = r^2 \tau_z \, dr - r^2 \tau_r \, dz = 0.$$

Also

$$(14) \qquad \frac{dr}{dz} = \frac{\tau_r}{\tau_z} = \operatorname{tg} \varphi,$$

d. h. die Spannungen in der Meridianebene fallen überall in die Richtung der Tangenten an die Kurven $u = \text{const}$. Auf die Mantelfläche der Welle mögen keine weiteren Kräfte einwirken, dann fällt, wie aus der Theorie der Torsion bekannt ist, die äußerste Spannungslinie mit dem Wellenumriß zusammen. Die Begrenzung ist also eine Kurve $u = \text{const}$. Andererseits muß aus Symmetriegründen auch die Achse einer Kurve $u = \text{const}$ sein, und zwar wollen wir festsetzen, daß auf der Achse $u = 0$ sein soll; also soll

$$(15) \qquad u = \int r^2 (\tau_z dr - \tau_r dz)$$

für $r = 0$ Null sein. Die Spannungslinien verlaufen also zwischen der Achse und der vorgegebenen Begrenzung längs der Welle, natürlich ohne sich zu schneiden.

2. Sie geben uns die Größe der an jeder einzelnen Stelle auftretenden Spannung.

Aus den Gleichungen (5)

$$(16) \qquad \begin{aligned} r^2 \tau_r &= - \nabla_z u \\ r^2 \tau_z &= \nabla_r u \end{aligned}$$

folgt nämlich sofort

$$(17) \qquad \tau = \frac{|\nabla u|}{r^2},$$

was sich, wenn wir den Abstand zweier benachbarter Kurven $u = \text{const}$ mit $da$ bezeichnen, auch schreiben läßt.

$$(18) \qquad \tau = \frac{du}{r^2 \, da}.$$

Die Spannung an einer jeden Stelle ist somit gleich dem Gradienten von $u$ durch das Quadrat des Abstandes von der Achse oder, wenn die Spannungslinien für konstante Differenzen von $u$ gezeichnet sind, umgekehrt proportional dem Produkt aus dem Quadrat der Entfernung von der Achse und dem Abstande der benachbarten Spannungslinien.

3. Endlich gibt uns die Größe von $u$ die Größe des Torsionsmomentes durch $2\pi$.

Auf das Element eines Kreisringes um die Achse auf einer Fläche $v = \text{const}$ von der Breite $da$ und dem Radius $r$ (s. Fig. 1) wirkt die Spannung

(19) $$r\,d\vartheta\,da\,\tau.$$

Nun ist

$$da = dz\cos\psi + dr\sin\psi$$
$$= -dz\sin\varphi + dr\cos\varphi$$

und nach (14)

$$\tau_z = \tau\cos\varphi \qquad \tau_r = \tau\sin\varphi.$$

Aus (19) folgt also

$$r\cdot d\vartheta da\cdot\tau = r\,d\vartheta(-\tau\sin\varphi\,dz + \tau\cos\varphi\,dr)$$
$$= r d\vartheta\,(\tau_z\,dr - \tau_r\,dz)$$

Multiplizieren wir das mit $r$ und integrieren über $\vartheta$ von 0 bis $2\pi$, so erhalten wir das Torsionsmoment dieses Ringes um die Achse, und wenn wir längs einer Kurve $v = \text{const}$ über die Torsionsmomente der einzelnen Ringe integrieren von der Achse bis zu einem Ringe, wo die Kurve $u = \bar u$ die Kurve $v = \text{const}$ schneidet und $r$, $z$ die Werte $\bar r$, $\bar z$ haben, so erhalten wir durch Vergleichen mit (15)

(20) $$D = 2\pi\int_0^{\bar r \bar z} r^2\,(\tau_z dr - \tau_r dz) = 2\pi\bar u.$$

Der Wert von $u$ mit $2\pi$ multipliziert, gibt mir also die Größe des Torsionsmomentes auf dem nach der Achse zu liegenden Teile der Rotationsfläche $v = \text{const}$. Habe ich somit die Linien $u = \text{const}$ gezeichnet für äquidistante Werte von $u$, so gibt mir die Zahl der durch ein beliebiges Stück der Linie $v = \text{const}$ gehenden Spannungslinien ein Maß für das Torsionsmoment auf der zu diesem Stück gehörenden Ringfläche.

Ebenso haben auch die Linien $v = \text{const}$ physikalische Bedeutung:

1. Sie sind Kurven konstanter Winkelverschiebung; denn nach Gleichung (6) ist auf den Kurven $v = \text{const}$

$$\vartheta = \text{const}.$$

Nun ist $\vartheta$ oben als die Winkeländerung bei der Deformation definiert; die Linien $v = \text{const}$ sind daher Linien konstanter Winkelverschiebung.

Da nun unsere Welle durch Rotation der $rz$-Ebene um die $z$-Achse entsteht, so werden alle Punkte, die auf den, bei der Rotation aus solchen Linien $v = \text{const.}$ hervorgehenden Flächen liegen, die gleiche Winkelverschiebung erfahren, sodaß sich diese Flächen bei der Torsion nicht deformieren, sondern sich als Ganzes drehen.

2. Die Kurven $v = \text{const}$ geben uns genau wie die Kurven $u = \text{const}$ ein Maß für die an jeder Stelle auftretenden Spannungen.

Bezeichnen wir nämlich den orthogonalen Abstand zweier benachbarter Kurven $v$ und $v + dv$ mit

$$db = dz \cos\varphi + dr \sin\varphi \tag{21}$$

so ist nach den Gleichungen (7)

$$\tau = r\nabla v = r\frac{dv}{db}. \tag{22}$$

Die Spannung ist somit gleich dem Abstand von der Achse mal dem Gradienten von $v$.

Der Einfachheit der weiteren Erörterung wegen nehmen wir nun an, daß das auf die Welle ausgeübte Torsionsmoment $2\pi$ ist, sodaß also $u = 1$ der der Wellenbegrenzung zugeordnete Wert von $u$ ist. Für ein beliebiges andere Torsionsmoment würde $u$ mit dem Werte eben dieses Momentes zu multiplizieren sein. Unsere Aufgabe läßt sich dann so formulieren, wenn wir uns die Welle nach beiden Seiten mit konstantem Radius ins Unendliche fortgesetzt denken: *Es soll ein sich beiderseits ins Unendliche erstreckender Streifen der $uv$-Ebene, der durch die parallelen Geraden $u = 0$ und $u = 1$ begrenzt ist, abgebildet werden auf ein sich ebenfalls beiderseits ins Unendliche erstreckendes Gebiet der $rz$-Ebene, das begrenzt ist durch die $z$-Achse und den durch den Umriß der Welle gegebenen Linienzug.*

Die Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ die in der $uv$-Ebene zwei Scharen sich rechtwinklig schneidender Geraden parallel zu den Achsen sind, gehen in der $rz$-Ebene in zwei sich ebenfalls orthogonal schneidende Kurvenscharen über. Keineswegs ist die Abbildung aber konform. Wenden wir wieder die Bezeichnungen von Fig. 1 an, so folgt aus den Gleichungen (18) und (22):

$$\frac{r\,dv}{db} = \frac{1}{r^2}\frac{du}{da}$$

oder

$$\frac{da}{db} = \frac{1}{r^3}\frac{du}{dv}. \tag{23}$$

Nehmen wir also ein kleines Quadrat der $uv$-Ebene, d. h. $du = dv$, so bildet sich dasselbe in ein Rechteck der $rz$-Ebene ab, für dessen Seiten

$$da : db = 1 : r^3 \tag{24}$$

gilt. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit der Differentialgleichung und ist somit zusammen mit der Randbedingung hinreichend zur Bestimmung des Problems. Gelingt es uns also, zwischen die Begrenzungslinie des Meridianschnittes und die Achse derart zwei orthogonale Kurvenscharen zu legen, daß die Begrenzung und die Achse selbst Kurven der einen Schar sind, und daß, wenn wir die Abbildung eines quadratischen Netzes der $uv$-Ebene zeichnen, sich die Seiten der einzelnen Maschen verhalten, wie eins zu der dritten Potenz des Abstandes von der $z$-Achse, so haben wir die Gleichungen (9) und (10) integriert und damit den Spannungszustand der Welle gefunden. Diese Kurven lassen sich nun zeichnen. Haben wir nämlich zwei koaxiale sich nach entgegengesetzten Seiten ins Unendliche erstreckende Zylinder mit konstanten Radien, die auch für beide gleich sein können, und dieselben gehen auf irgend eine Weise ineinander über, sodaß also die Variation des Querschnittradius auf ein bestimmtes endliches Stück beschränkt ist, so werden sich derartige Wellen in genügender Entfernung von der Übergangsstelle wie Wellen von konstantem Radius verhalten. Diesen Fall beherrschen wir aber analytisch. Wenn wir nämlich:

$$u = cr^4 \tag{25}$$

setzen, so ist die Gleichung (9) erfüllt, und für $v$ ergibt sich daraus nach den Gleichungen (8):

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r^3}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} = 4c.$$

Also ist mit Vernachlässigung der Konstanten

$$v = 4cz. \tag{26}$$

Die Begrenzung ist dann im Meridianschnitt eine Kurve $u = cr^4 = \text{const}$, d. h. $r = \text{const}$, also eine Gerade parallel zur $z$-Achse. Die Konstante $c$ bestimmt sich dadurch, daß

$$2\pi u_g = D_g$$

sein muß, wo $u$ an der Grenze zu nehmen ist, und $D_g$ das gesamte von der Welle übertragene Drehungsmoment ist. Also ist, falls $R$ der Radius der betreffenden Welle ist,

$$2\pi c R^4 = D_g$$

$$c = \frac{D_g}{2\pi R^4}$$

und wenn wir für $R$ jedesmal den Radius des zugehörigen Kreis-Zylinders einsetzen, so ist $c$ in den beiden Wellenteilen so bestimmt, daß $u$ auf der Begrenzung denselben Wert hat. $da$ und $db$ fallen der Richtung und Größe nach mit $dr$ und $dz$ zusammen, so daß also die Bedingung (23) erfüllt ist:

$$\frac{du}{dv} = \frac{4cr^3\,dr}{4c\,dz} = \frac{r^3\,dr}{dz}.$$

In einiger Entfernung von der Übergangsstelle können wir somit unser $uv$-Netz einzeichnen. Es handelt sich jetzt nur darum, diese beiden Netze durch die Übergangsstelle hindurch so zu verbinden, daß auch hier die Relation (23) erfüllt ist. Da $c$ so bestimmt ist, daß $u$ auf der Begrenzung den gleichen Wert hat, so sind in dem dünneren Zylinder ebensoviel Linien $u = \text{const}$ wie in dem stärkeren, so daß jedem Werte $u = \text{const}$ des einen ein Wert $u = \text{const}$ des anderen Zylinders entspricht; es muß das darum auch der Fall sein, weil jeder Querschnitt der Welle das gleiche Torsionsmoment erfährt. In der Achse ist $u = 0$, und an der Grenze möge, wie wir schon oben angenommen haben, $u = 1$ sein, so daß auf die Welle das Torsionsmoment $2\pi$ ausgeübt wird.

Um die Linien, insbesondere die Kurven $u = \text{const}$ an der Übergangsstelle zu finden, benutzen wir ein Approximationsverfahren. Wir verbinden die in die beiden Zylinder in einiger Entfernung von der Übergangsstelle eingezeichneten $u$-Linien durch diese Stelle hindurch so, wie wir uns den Verlauf etwa denken und ziehen dann in beliebigen, jedoch nicht zu großen Abständen orthogonale Trajektorien. Nun ist nach Gleichung (23):

$$du = r^3 \frac{dv}{db}\,da.$$

Also

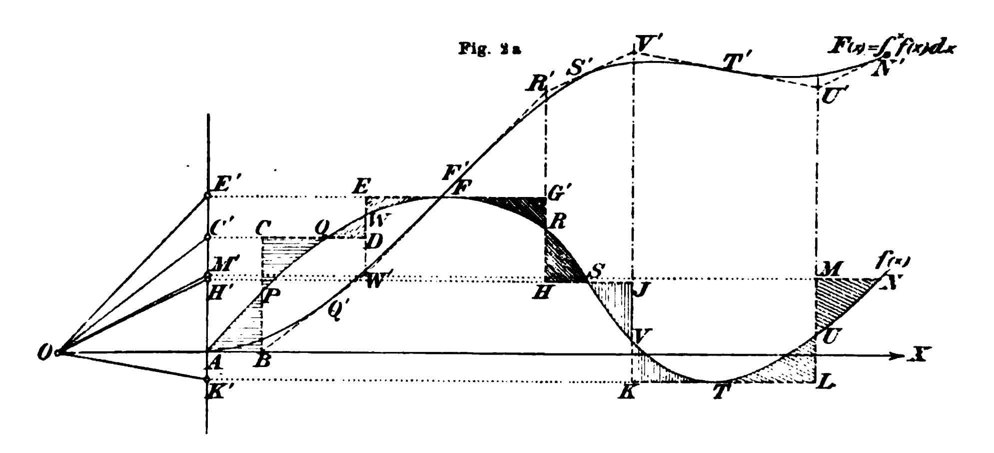
$$u = \int_0^a r^3 \frac{dv}{db}\,da,$$

wo $a$ die Bogenlänge auf der Trajektorie ist. Eine derartige Integration läßt sich graphisch nach einer von Herrn Professor Runge in seiner

Vorlesung über Differential- und Integralrechnung gebrachten Methode ausführen, wenn man die Kurve $\frac{r^3\,dv}{db}$ hat.

Diese Methode ist folgende:

Ist uns die zu integrierende Kurve $y = f(x)$ graphisch gegeben, so ersetzen wir dieselbe durch eine Stufenkurve, wie das Fig. 2a zeigt. Dabei sind die auf verschiedenen Seiten der vertikalen Stücke der gebrochenen Kurven liegenden Flächenteile zwischen ursprünglicher Kurve und der sie ersetzenden Stufenkurve gleich groß zu machen. In Fig. 2a sind diese Flächenteile gleich schraffiert. (Die Ordinate $KVJ$ ist je-




doch um etwa 1 mm zu weit nach rechts.) Die Stufenkurve schließt dann mit der Abszissenachse bis zu den Ordinaten durch $Q$, $F$, $S$ etc. gleichgroße Flächenteile ein, wie die gegebene Kurve $y = f(x)$; folglich werden die Integralkurven dieser beiden Kurven in diesen Punkten dieselben Ordinaten haben. Da außerdem noch die Ordinaten der beiden zu integrierenden Kurven in diesen Punkten gleich sind, so werden die Integralkurven hier auch dieselbe Tangente haben.

Nun läßt sich die Stufenkurve leicht integrieren. Bis zum Punkte $B$ ist der Inhalt der von der ersetzenden Stufenkurve und der Abszissenachse eingeschlossenen Fläche Null. Die Ordinate der zu dieser Kurve gehörenden Integralkurve ist also bis $B$ Null. Von dort bis zur Ordinate durch $D$, von dieser bis zu der durch $G$ usw. wächst der Inhalt kontinuierlich, die Tangente der Integralkurve in diesen einzelnen Abschnitten ist daher konstant, sodaß sich also die Integralkurve zur Stufenkurve aus geradlinigen Stücken zusammensetzt, deren Richtung [illegible]weise dort ändert, wo sich die Höhe der Stufenkurve ändert. [illegible] der einzelnen Stücke bestimmt sich dadurch, daß die

Tangente ihrer Neigung gleich der Ordinate der Stufenkurve in dem entsprechenden Abschnitte sein muß, falls für Abszissen und Ordinaten aller Kurven derselbe Maßstab gewählt wird. Am besten verfahren wir bei der Ausführung so, daß wir uns wie in Fig. 2a vor der Kurve auf der Abszissenachse die Längeneinheit $OA$ und in $A$ als Ordinaten die einzelnen Höhen der Stufenkurve auftragen. Dann gibt uns die Verbindungsgerade der einzelnen Ordinatenendpunkte mit $O$ die Neigung des geraden Stückes der Integralkurve in dem Abschnitt, in dem die Stufenkurve die betreffende Höhe hat. Durch Aneinanderreihen dieser geradlinigen Stücke erhalten wir dann die zur Stufenkurve gehörende Integralkurve.

In diese ihre Richtung sprungweise ändernde Kurve können wir leicht die zu $y = f(x)$ gehörende Integralkurve einzeichnen; denn wie wir oben sahen, haben die beiden Integralkurven in $Q'F''S'$.. dieselbe Ordinate und die gleiche Tangente. Man zeichnet also in den geradlinigen Zug eine ihre Richtung kontinuierlich ändernde Kurve ein, die diesen Zug in $Q'F'$... berührt, und zwar dort, wo $y = f(x)$ ein Maximum oder Minimum hat, das gerade Stück mit einem Wendepunkt durchsetzt, falls die ersetzende Stufenkurve so gewählt ist, daß in dem das Maximum oder Minimum enthaltenden Abschnitte die Höhe der Stufe gleich der Ordinate des Maximums resp. Minimums ist. In den anderen Punkten wird dagegen die Kurve die Geraden nur berühren, ohne sie zu durchsetzen. Ferner sieht man sofort, daß dort, wo die Kurve $y = f(x)$ die Abszissenachse unter einem von Null verschiedenen Winkel schneidet, die Integralkurve ein Maximum oder Minimum haben wird.

Man könnte übrigens die Stufen der Ersatzkurve auch so legen, daß auf beiden Seiten der horizontalen Stücke zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der Stufenkurve gleiche Flächenteile liegen. Die durch Integration gefundene gebrochene Kurve würde dann eine Sehnenkurve der Integralkurve $y = f(x)$ sein, nicht eine Tangentenkurve, wie im obigen Falle. Das erste Verfahren ist im allgemeinen vorzuziehen, weil eine Kurve durch ihre Tangente genauer als durch ihre Sehnen gegeben ist.

Aus obigem geht nun hervor, daß es wesentlich darauf ankommt, die Flächenstücke auf verschiedenen Seiten der vertikalen Geraden gleichgroß zu machen. In vielen Fällen genügt da das einfache Abschätzen. Mit größerer Genauigkeit kann man aber die Lage der vertikalen Geraden konstruktiv finden, wenn man die in den einzelnen Abschnitten liegenden Bogen als Teile einer Parabel betrachtet, deren Achse zur $x$- oder $y$-Achse parallel angenommen wird, je nachdem die

Annäherung in der einen oder der anderen Lage besser ist. Die Konstruktionen sind in beiden Fällen ähnlich:

In Fig. 2b ist angenommen, daß die Achse der Parabel horizontal liege. $CN$ und $AM$ sind die beiden horizontalen Teile der Stufenkurve, zwischen die das vertikale Stück eingezeichnet werden soll. Nun ist nach einem bekannten Satz der Inhalt des von Sehne und Parallelbogen $AFQC$ eingeschlossenen Flächenstückes gleich $\frac{2}{3}$ vom Inhalt des Parallelogrammes $ABCD$, also auch $\frac{2}{3}$ des Rechteckes $HJLR$ oder gleich dem Rechteck $MJLN$. Da ferner $E$ der Halbierungspunkt von $BC$ ist, so ist $BPC$ inhaltsgleich $JPCL$, also auch $BPCQF$ gleich $MPCN$, und wenn wir das beiden gemeinsame Stück abziehen, so sehen wir, daß die beiden schraffierten Stücke inhaltsgleich sind. Man verfährt also bei der Konstruktion der gesuchten Vertikalen folgendermaßen: Man zieht durch den Halbierungspunkt $E$ der Sehne $BC$ die Horizontale bis zum Schnitte $F$ mit dem Bogen, teilt das Stück $EF$ in drei gleiche Teile und zieht durch den Teilpunkt $G$, der näher am Bogen liegt, die gesuchte Vertikale $MN$.

Fig. 2b.

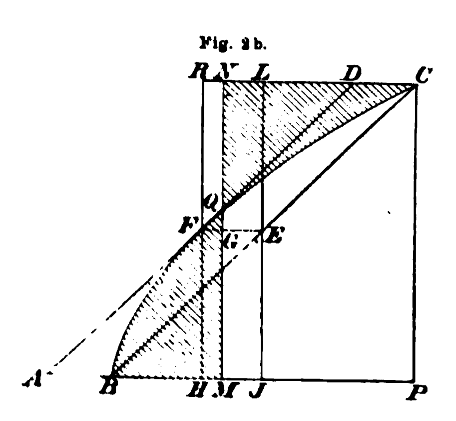
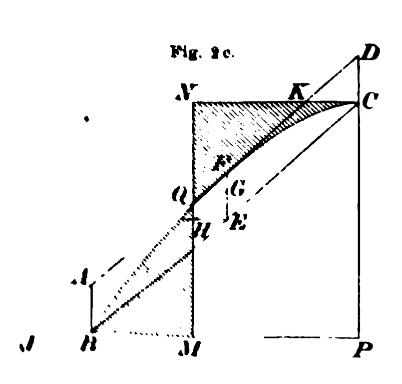



Fig. 2c.




Ähnlich sind die Verhältnisse, wenn die Parabelachse vertikal liegt, also der $Y$-Achse parallel ist. Diesen Fall zeigt Fig. 2c. $CN$ und $BM$ sind wieder die Horizontalstücke der Stufenkurve. Der Inhalt des von Sehne und Parallelbogen $BQFC$ eingeschlossenen Flächenstückes ist hier gleich $\frac{2}{3}$ des Parallelogrammes $ABCD$ und folglich auch des Parallelogrammes $JBCK$, mit dem man dann genau wie im ersten Falle verfahren kann. Praktisch führt man jetzt die Konstruktion so aus: Man zieht durch den Halbierungspunkt $E$ der Sehne die Vertikale bis zum Schnitte $F$ mit dem Bogen, teilt $FE$ in drei gleiche Teile und zieht durch den dem Bogen am nächsten liegenden Teilpunkt $G$ zur Sehne $CD$ die Parallele, die die Horizontale durch $E$ in $H$ schneidet; durch $H$ geht [illegible] gesuchte Vertikale.

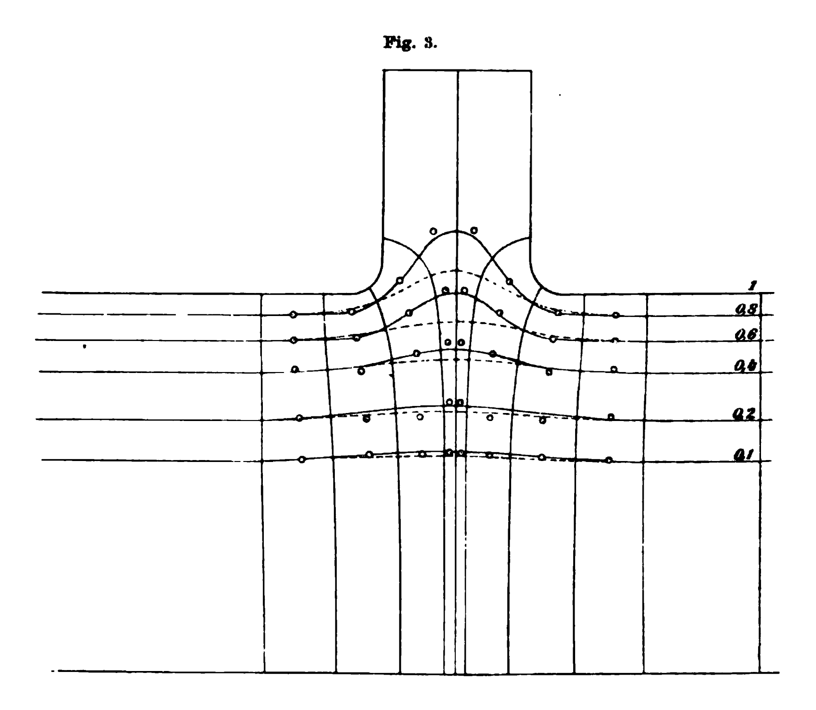
Natürlich wird man die horizontalen Stücke der Stufenkurve praktisch anordnen, daß man nicht etwa Kurvenstücke, die einen Wendepunkt enthalten, durch einen Parabelbogen ersetzt. Bei Anwendung aller dieser Hilfsmittel erhält man die Integralkurve etwa mit der Genauigkeit, die numerisch die Simpsonsche Regel gibt. Es ist dabei aber nicht vorteilhaft, die Zahl der Stufen allzu groß zu machen; denn, obwohl sich die Richtungen der aufeinanderfolgenden Geraden nur wenig ändern, kommen doch infolge der vielen Ansatzstellen in den Tangentenzug leicht Ungenauigkeiten mit hinein, die sich natürlich addieren und durch den ganzen Kurvenzug hindurch fortpflanzen. Besser ist es, die integrierende Kurve durch mehrere voneinander verschiedene Treppenkurven zu ersetzen und dann die integrierenden Tangentenzüge übereinander zu zeichnen.

Man könnte die Integration auch mit dem Integraphen ausführen. Doch ist die Rungesche Methode reichlich so genau und insofern bequemer, als man die Basis der Integration ganz beliebig, vor allen Dingen klein wählen kann. Die Ordinaten der Integralkurve werden dadurch groß, sodaß man an ihr genaue Messungen und Ablesungen machen kann. Zu meinen Zeichnungen habe ich meistens eine Basis von 5 cm, 4 cm oder nur 3 cm verwandt, während die kleinste bei dem mir zur Verfügung stehenden Integraphen einstellbare Basis etwa 7 cm war. Wollte man die Ordinaten der zu integrierenden Kurve so viel größer zeichnen, so würde die Höhe derselben bei den für uns in Betracht kommenden Kurven unverhältnismäßig groß werden. Ein weiterer Vorteil der Rungeschen Methode, der gerade für uns sehr in Betracht kommt, ist der, daß man die Integralkurve an einer ganz beliebigen Stelle, insbesondere über der Abszissenachse der zu integrierenden Kurve zeichnen kann, sodaß man direkt den zu einem Abszissenwert gehörenden Integralwert ablesen kann, während der Integraph die Integralkurve stets neben der zu integrierenden Kurve aufzeichnet, sodaß man erst die Skala der Abszissenachse übertragen muß.

Nehmen wir nun in unserm Falle an, die eingezeichneten Kurven $u = \text{const}$ seien die richtigen, so sind ihre orthogonalen Trajektorien $v = \text{const}$. Nehmen wir also zwei solcher benachbarter Trajektorien, so ist längs derselben $\Delta v = \text{const.}$ und ihr Abstand ist $\Delta b$. Diesen kann ich mir aus der Zeichnung entnehmen und mir damit an verschiedenen Stellen $\frac{r^3}{\Delta b}$ berechnen, wo $r$ der der Mittellinie zwischen $v$ und $v + \Delta v$ entsprechende Wert ist. Die so gefundenen Werte $\frac{\alpha r^3}{\Delta b}$, wo $\alpha$ irgend

ein Proportionalitätsfaktor ist, der nur dazu dienen soll, die passende Höhe der Kurven zu erhalten, trage ich mir graphisch als Funktionen von $a$ auf, das ich ebenfalls aus der Zeichnung entnehme, und zwar auch auf der Mittellinie. Die Endpunkte der Ordinaten verbinde ich und erhalte so eine Kurve, die ich graphisch nach obiger Methode integriere. Die Ordinate dieser Kurve gibt mir ein Maß für das Torsionsmoment bis zu dem zugehörigen Punkte $a$ der Abszissenachse. Der Ordinate im Endpunkte, die das gesamte auf die Welle ausgeübte Torsionsmoment darstellt, ordne ich den Wert 1 zu und bestimme

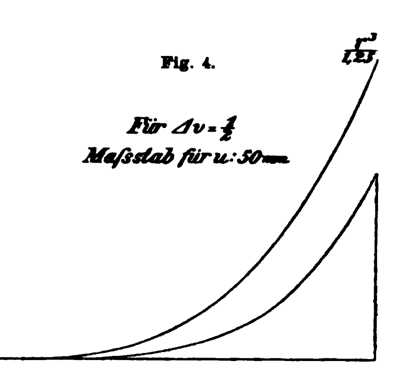
Fig. 3.




damit den Maßstab für das $u$. Zugleich wird dadurch ein Maß für das zum Intervall gehörige $\Delta v$ gewonnen, wie sich weiter unten zeigen wird. Suche ich nun die Werte von $a$ auf, die etwa den Werten: $u = 0{,}1$; $0{,}2$ etc. entsprechen, und übertrage dieselben in meine Zeichnung, so müßten diese, falls die anfänglich angenommenen Kurven richtig wären, auf diese Kurven fallen und geben so einen Anhalt, wie die Kurven $u =$ const zu korrigieren sind. Das führen wir für eine Reihe von Kurven $v$ und $v + \Delta v$ aus. — Nehmen wir z. B. eine Welle, die am Rand aufgelagert ist (Fig. 3), und tragen die Linien $u = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}4$; $0{,}6$; $0{,}8$ ein, so erhalten wir nach dieser ersten Integration nebenstehendes Bild (Fig. 3). Darin sind die gestrichelten Linien die

ursprünglich angenommenen.[1]) Die durch die Integration erhaltenen Punkte sind durch kleine Kreise angedeutet, und die nach diesen Punkten korrigierten Linien sind ausgezogen. Dabei wird man die korrigierten Linien möglichst direkt durch die gefundenen Punkte legen, wenn auch für die neuen Linien die Trajektorien etwas anders werden.

Weiter handelt sich es jetzt darum, für $v$ eine erste Annäherung zu finden. Wie oben erwähnt, ist das zu einem Intervall gehörende $\Delta v$ schon dadurch bestimmt, daß man der Endordinate $E$ der Integralkurve den Wert 1 zuordnet. Da nämlich das Torsionsmoment auf jedem Querschnitt der Welle das gleiche ist, so müßten die Endordinaten der Kurven $u = \int\limits_0^{\bar{a}} \frac{r^3 dv}{db} da$ alle gleich sein. Nun hat man aber statt $\Delta v$ irgend einen Proportionalitätsfaktor $\alpha$ eingeführt, sodaß also die Endordinate proportional dem $\alpha$, aber umgekehrt proportional dem $\Delta v$ ist. In genügender Entfernung von der Übergangsstelle ist nun sowohl $\Delta v$ wie $\Delta b$ bestimmt. Nehmen wir z. B. $\Delta v = \frac{1}{2}$, so ist, wenn man $R = 1$ nimmt, $\Delta b = 0{,}125$, da $\Delta v = \frac{4}{R^4} \Delta b$ ist. Führen wir nun die Integration der Kurven $\frac{r^3}{0{,}125}$ aus (s. Fig. 4), so erhalten wir als Endordinate 50 mm.[2]) Ist also $\Delta v = 1$, so ist die Endordinate 25 mm. Somit besteht für die Endordinate $E$ irgendeiner Integralkurve, welche die gleiche Basis hat, die Gleichung:




$$\Delta v = \frac{0{,}25\,\alpha}{E}, \tag{27}$$

wo das $\alpha$ bekannt ist.

Um aber an den verschiedenen Stellen Punkte für den Verlauf der Kurven $v = \text{const}$ zu haben, verfährt man besser so: Man schreibt die Gleichung (23):

$$dv = \frac{du}{r^3 da} db.$$

Also ist

$$v = \int \frac{du}{r^3 da} db.$$

1) Zu diesen gehören die ausgezogenen Trajektorien.

2) Die Figuren 1—11 und 13 sind auf die Hälfte, Figur 12 und die anliegenden 4 Tafeln auf $^1/_2$ der ursprünglichen Größe verkleinert hier wiedergegeben.

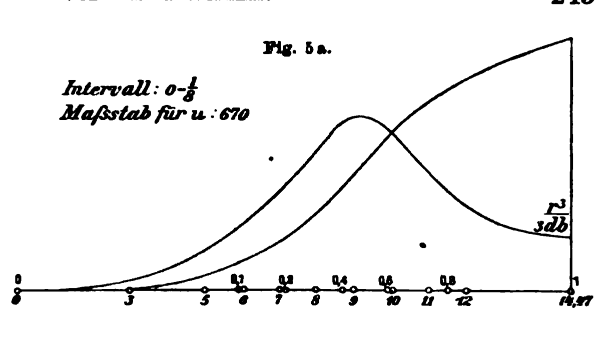
Dieses Integral können wir wiederum graphisch auswerten. Wir zeichnen dazu zwischen den einzelnen ausgezogenen Spannungslinien die Mittellinien und nehmen das diesen entsprechende $r$ und das $da$ aus der Zeichnung. Da $du$ zwischen zwei Spannungslinien konstant ist, so kann man sich $\frac{du}{r^3 da}$ berechnen und als Funktion von $b$, das man ebenfalls auf der Mittellinie nimmt, auftragen. In obigem Falle geht man dabei am besten von der Symmetrielinie aus und geht bis zu einem Punkte, wo die sämtlichen Linien $u = \text{const}$ der Begrenzung parallel laufen, sodaß dort die Linien $v = \text{const}$ Gerade sind. Diese Integrationen führt man für die einzelnen Intervalle aus. Nun kennt man in genügendem Abstand von den Bunden die Größe $\Delta b$, die der Zunahme von $v$ um eine Einheit entspricht, dieselbe ist $s = \frac{1}{4c}$, in unserem Falle also 0,25, das ist, da 10 cm als Einheit gewählt ist, 25 mm. Hat man nun die Kurven integriert und trägt in dem Teil der Integrationskurven, für den die Linien $u = \text{const}$ der Begrenzung parallel laufen, diese der Einheit von $\Delta v$ entsprechende Strecke als Abszisse ab, so gibt die zugehörige Ordinatendifferenz die Maßeinheit von $v$. Da nun die Integrationen von der Symmetrielinie, der $v = 0$ entsprechen möge, bis zu demselben $v = \text{const}$ ausgeführt sind, so müßten die Endordinaten der Integrationskurven mit dem so für jede Kurve gefundenen Maßstabe gemessen alle den gleichen Wert $n$ haben. Das wird aber nur in gewisser Annäherung der Fall sein; einmal, weil die obigen Kurven $u = \text{const}$ noch nicht völlig richtig sind, dann aber auch, weil die Integrationen sich, wegen der Länge und den vielen Richtungsänderungen, nicht so genau ausführen lassen. — Man nimmt nun zwischen den $n$ einen Mittelwert und korrigiert danach die Maßstäbe für die einzelnen Kurven. Dann sucht man damit die den einzelnen Werten $v = \text{const}$ entsprechenden Punkte auf, und zwar nimmt man dort, wo das $\Delta b$ für die entsprechenden Differenzen der Werte von $v$ größer ist, die Differenz $\Delta v$ kleiner, sodaß man in dem schwächeren Teil der Welle $v$ etwa immer um $\frac{1}{2}$, bei dem aufgelagerten Bunde aber um $\frac{1}{8}$ fortschreiten läßt. Die so gefundenen Punkte trägt man in die Zeichnung ein und zieht möglichst orthogonal zu den Spannungslinien unter Benutzung der Punkte die Linien $v = \text{const}$.

Mit Hilfe dieser Linien $v = \text{const}$ führt man die Integration

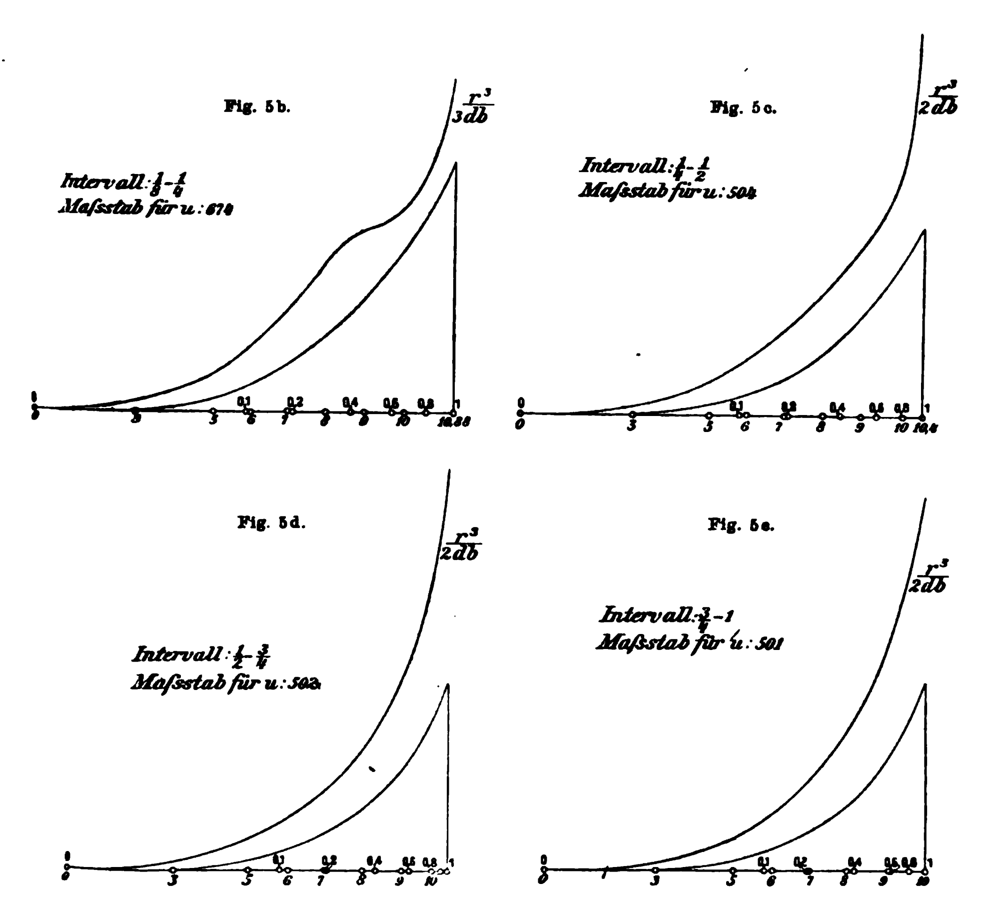
$$u = \int r^3 \frac{dv}{db} da$$

abermals aus und erhält neue Punkte für die Linien $u = \text{const}$, die aber von den vorigen Linien sehr viel weniger abweichen als im ersten Falle. So fährt man fort und findet nach einigen, etwa drei, Inte-

grationen, daß die Punkte in den Grenzen der Genauigkeit der Zeichnung garnicht mehr von denen abweichen, von denen man bei der letzten Integration ausgegangen war. Dabei

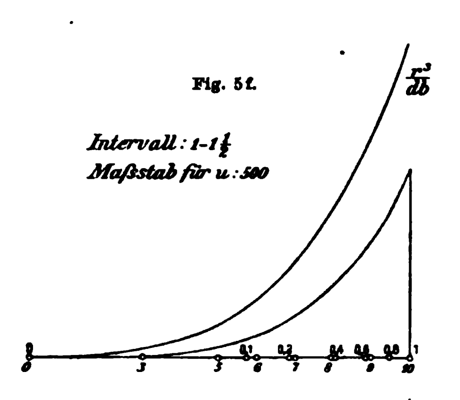


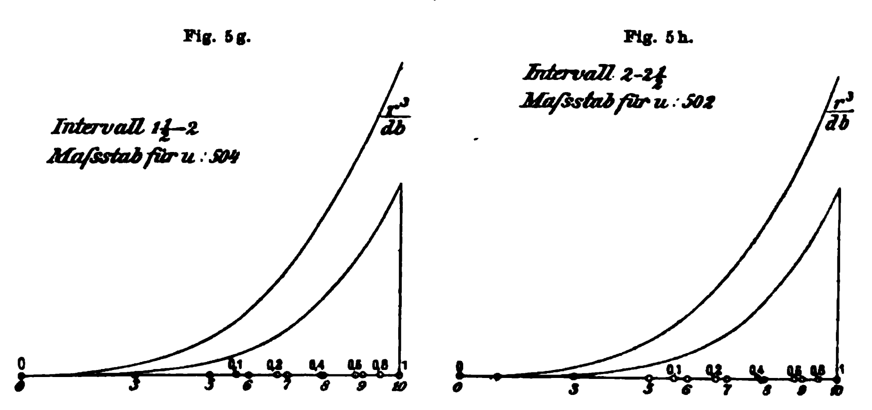

werden die Linien $u$ = const leichter festzustellen sein, als $v$ = const, weil bei ersteren Anfangs- und Endpunkt bei der Integration festliegt,




während bei den letzteren der Wert von $v$ im Endpunkt sich erst durch die Integration bestimmt und weil die Form der bei ersteren zu integrierenden Kurven viel einfacher ist als bei letzteren. Aus dem

schließlichen Zusammenfallen der Punkte ergibt sich, daß das Verfahren konvergent ist; die Konvergenz allgemein nachzuweisen, ist mir leider nicht gelungen. — Der Verlauf der Linien $u$ = const und $v$ = const ist dann für unsern Fall der, wie er auf dem anliegenden Blatt I oben rechts angegeben ist; die zugehörigen letzten Integrationskurven zeigen die Figuren 5. Bei diesen Kurven müssen die Endordinaten die in (27) angegebene Beziehung erfüllen. Inwieweit das der Fall ist, zeigt die untenstehende kleine Tabelle, in welcher die in der ersten Spalte stehenden Zahlen die nach der Formel (27) berechneten Endordinaten angeben, während die Zahlen der zweiten




Spalte die wirklich bei der Integration erhaltenen Werte geben. Man sieht daraus, daß die Endordinaten ziemlich gut stimmen.

| berechnete Endordinate | gemessene Endordinate |
|---|---|
| 667 | 670 |
| 667 | 671 |
| 500 | 504 |
| 500 | 502 |
| 500 | 501 |
| 500 | 500 |
| 500 | 504 |
| 500 | 502 |

Eine sehr geringe Verschiebung einer Kurve $v = \text{const.}$ besonders an den Stellen, wo der Wert von $r$ größer ist, wirkt schon sehr stark auf das Resultat ein. Hat man zwei benachbarte Intervalle und ist für das eine die Endordinate zu groß, für das andere zu klein, so läßt sich durch das Verschieben der dazwischenliegenden Kurve $v = \text{const}$ oft ein Ausgleich herbeiführen, und zwar hat man dabei das Intervall, dessen Endordinate zu groß ist, zu verbreitern, da $\varDelta b$ im Nenner steht. Dabei verschieben sich natürlich, falls die Verbreiterung nicht proportional der schon vorhandenen Breite gemacht wird, die Punkte für die $u$-Kurven, wie das Fig. 6, die übrigens stark übertrieben ist, zeigt. Die untere ausgezogene Integrationskurve und die unteren Punkte gehören zu dem an einer Stelle verbreiterten Intervall, während die ursprüngliche Kurve und die dazu gehörenden Punkte darüber (gestrichelt) gezeichnet sind. Man sieht, daß die Punkte nach beiden Seiten von dem verbreiterten Stück fortrücken und zwar umso stärker, je näher sie daran liegen. Bei Verschmälerung des Intervalls werden die Punkte natürlich nach der Stelle hinrücken. Man kann also zugleich mit einer solchen Änderung eine Korrektion der Punkte für die Kurven $u = \text{const}$ verbinden. Insbesondere läßt sich das gut anwenden, falls in einem Intervall alle durch Integration gefundenen Punkte zu tief und in dem benachbarten alle zu hoch liegen. Man verringert dann einfach die Breite des ersten Intervalles in der Nähe der Begrenzung etwas. Dadurch rücken dann die Punkte desselben etwas höher, während die Punkte des benachbarten verbreiterten Intervalles sich etwas nach unten verschieben.

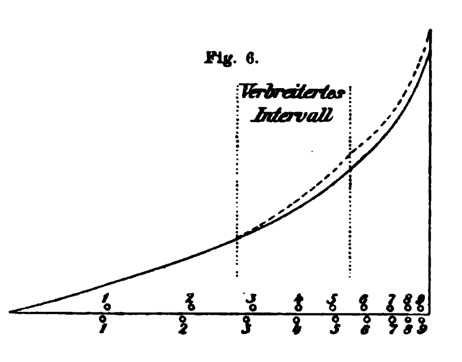


Fig. 6.

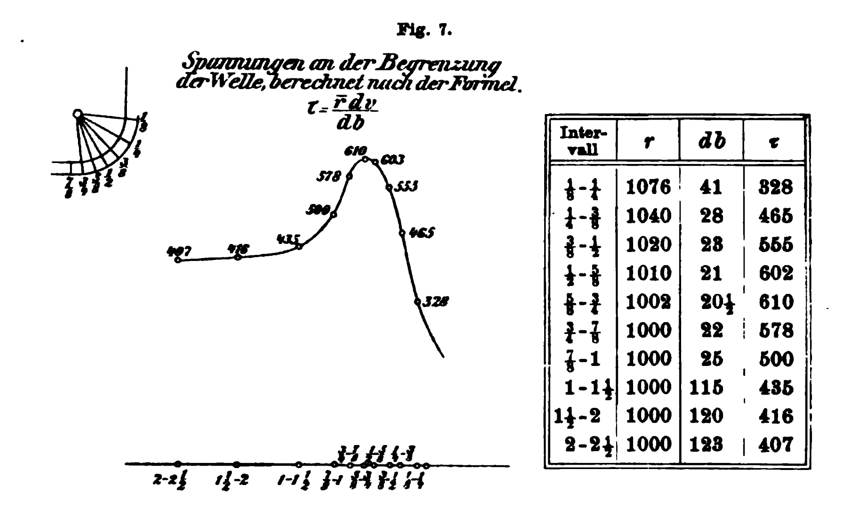
Uns interessiert nun besonders die Größe der Spannung $\tau$ an der Übergangsstelle. Um diese zu finden, benutzen wir die Relation (22):

$$\tau = r \frac{\varDelta v}{\varDelta b}.$$

Durch nochmalige Integrationen stellen wir in dem Intervall $u = 0{,}8$ bis $u = 1$ die Punkte $v = \text{const}$ fest für möglichst kleine Intervalle $\varDelta v$ (z. B. wurde in Fig. 7 $\varDelta v = \frac{1}{8}$ genommen) und ziehen durch diese die orthogonalen Trajektorien, wie das die kleine Fig. 7 oben zeigt. In der Abrundung werden dieselben alle durch den Mittelpunkt des Ab-

rundungskreises gehen. Dann messen wir auf der Begrenzung $\Delta b$ ab und berechnen uns das $\tau$, wie das die Tabelle in Fig. 7 zeigt. Dann ist dort das $\tau$ als Funktion der Länge der Begrenzung aufgetragen. Man sieht, daß die maximale Spannung etwa das 1,5 bis 1,6-fache der Spannung an der Begrenzung der kleineren Welle in genügender Entfernung von der Übergangsstelle ist. Ist letztere 4, so ist genauer

Fig. 7.




| Intervall | $r$ | $db$ | $\tau$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{8}$-$\frac{1}{4}$ | 1076 | 41 | 328 |
| $\frac{1}{4}$-$\frac{3}{8}$ | 1040 | 28 | 465 |
| $\frac{3}{8}$-$\frac{1}{2}$ | 1020 | 28 | 555 |
| $\frac{1}{2}$-$\frac{5}{8}$ | 1010 | 21 | 602 |
| $\frac{5}{8}$-$\frac{3}{4}$ | 1002 | $20\frac{1}{2}$ | 610 |
| $\frac{3}{4}$-$\frac{7}{8}$ | 1000 | 22 | 578 |
| $\frac{7}{8}$-1 | 1000 | 25 | 500 |
| 1-$1\frac{1}{2}$ | 1000 | 115 | 435 |
| $1\frac{1}{2}$-2 | 1000 | 120 | 416 |
| 2-$2\frac{1}{2}$ | 1000 | 123 | 407 |

die maximale Spannung 6,12. Dabei kann aber die zweite Dezimalstelle durchaus keinen Anspruch auf Genauigkeit machen. Ferner sieht man, daß diese maximale Spannung nicht am Anfange der Abrundung liegt, sondern etwa $\frac{1}{3}\,\varrho$ hinter dem Beginn des Abrundungskreises, also an einer Stelle, wo die Welle schon etwas stärker ist.

Es empfiehlt sich nun nach dem obigen Verfahren zunächst den ungefähren Verlauf der Linien festzustellen, die Größe von $\tau$ aber durch eine andere Art der Approximation festzustellen, die den Krümmungsradius der Kurven benutzt und uns direkt und bequemer die Größe des $\tau$ an der Begrenzung gibt. Wir gehen zur Ableitung dieser Methode von etwas allgemeineren Betrachtungen aus.

Haben wir zwei Lösungen $y$ und $\bar{y}$ einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(xy), \tag{28}$$

so muß ihre Differenz $y - \bar{y} = \varepsilon$ der Gleichung

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{d \lg \varepsilon}{dx} = \frac{f(xy) - f(x\bar{y})}{y - \bar{y}} \tag{29}$$

genügen. Die Gleichung der zu diesen Integralkurven orthogonalen Kurven ist nun

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(xy)}$$

oder:

$$\frac{dx}{dy} = -f(xy),$$

und daraus folgt:

(30) $$\frac{df(xy)}{dy} = -\frac{d^2x}{dy^2}$$

Vergleichen wir das mit Gleichung (29), so sehen wir, daß sich dieselbe auch schreiben läßt

(31) $$\frac{d\lg\varepsilon}{dx} = -\frac{d^2x}{dy^2} + (\text{Glieder mit } \varepsilon \text{ als Faktor})$$

Legen wir nun an der zu betrachtenden Stelle das Koordinatensystem so, daß die $y$-Achse tangential zu den Integralkurven liegt, so wird $dx$ der normale Abstand $da$ der zu diesen orthogonalen Kurven, und es wird:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{\varrho},$$

also gleich der Krümmung dieser Orthogonalkurven, falls man $\varrho$ positiv rechnet, wenn der Differentialquotient $\frac{dx}{dy}$ mit wachsendem $y$ wächst. Setzen wir das in Gleichung (31) ein und addieren außerdem noch auf der linken Seite

$$-\frac{d\lg\varDelta v}{dx} = 0,$$

so erhalten wir:

$$\frac{d\lg\frac{\varepsilon}{\varDelta v}}{da} = -\frac{1}{\varrho} + (\text{Glieder mit } \varepsilon \text{ als Faktor}).$$

Setzen wir nun $\varepsilon = \varDelta b$, so schreibt sich obige Gleichung:

$$\frac{d\lg\frac{\varDelta v}{\varDelta b}}{da} = \frac{1}{\varrho} + (\text{Glieder mit } \varDelta b \text{ als Faktor}).$$

Gehen wir jetzt zur Grenze über, so erhalten wir:

(32) $$\frac{db}{dv}\,\frac{d\frac{dv}{db}}{da} = \frac{1}{\varrho},$$

und das ist allgemein abgeleitet die von Herrn Föppl in den Münchener Berichten angegebene Gleichung. Berücksichtigt man nämlich die Gleichung (22), so erhält man aus (32):

$$r\frac{d\frac{\tau}{r}}{da} = \frac{\tau}{\varrho}$$

oder

$$(33)\qquad \frac{d\tau}{da} = \frac{\tau}{\varrho} - r\tau\frac{d\frac{1}{r}}{da} = \frac{\tau}{\varrho} + \frac{\tau}{r}\frac{dr}{da} = \frac{\tau}{\varrho} + \frac{\tau}{r}\cos\varphi,$$

wo $\varphi$ der Winkel zwischen $z$-Achse und Tangente an die Kurve $u = \text{const}$ ist (Fig. 1). In dieser Form gibt Herr **Föppl** die Gleichung.

Wir gehen für unsere weiteren Betrachtungen nun von der Gleichung

$$\frac{d\lg\frac{dv}{db}}{da} = \frac{1}{\varrho}$$

aus. Diese gibt integriert.

$$\lg\left(\frac{dv}{db}\right)_{a=a} - \lg\left(\frac{dv}{db}\right)_{a=0} = \int_0^a \frac{1}{\varrho}\,da$$

also

$$\frac{dv}{db} = \left(\frac{dv}{db}\right)_{a=0} e^{\int_0^a \frac{1}{\varrho}\,da}.$$

Somit nach Gleichung (22):

$$\tau = \left(\frac{dv}{db}\right)_{a=0} r e^{\int_0^a \frac{1}{\varrho}\,da}.$$

Die Konstante $\left(\frac{dv}{db}\right)_{a=0}$ bestimmen wir folgendermaßen. Auf der Begrenzung sollte $u = 1$ sein, da wir das gesamte von der Welle übertragene Drehungsmoment gleich $2\pi$ genommen hatten. Also muß

$$u = \int_0^{\bar a} r^2\tau\,da$$

$$= \left(\frac{dv}{db}\right)_{a=0} \int_0^{\bar a} r^3 e^{\int_0^a \frac{1}{\varrho}\,da}\,da = 1$$

sein, somit ist

$$(36)\qquad \tau = \frac{r e^{\int_0^a \frac{1}{\varrho}\,da}}{\int_0^{\bar a} r^3 e^{\int_0^a \frac{1}{\varrho}\,da}\,da}.$$

Wollen wir dieses nun graphisch verwenden, so zeichnen wir zunächst eine orthogonale Trajektorie zu den nach dem vorigen Verfahren schon mit guter Annäherung gefundenen Kurven $u = \text{const}$. Auf dieser entnehmen wir das zugehörige $\varrho$ der Kurven $u = \text{const}$. Dabei ist für $u = 1$ das $\varrho$ gegeben, sodaß, wenn wir uns $\frac{1}{\varrho}$ als Funktion der Bogenlänge $a$ auftragen, die Endordinate der Kurve gegeben ist. — Der Vorteil, den diese Methode gegen die vorige dadurch zu haben scheint, ist nicht sehr groß, da es doch sehr wesentlich auf die Zwischenpunkte ankommt, besonders, wenn die Endordinate Null ist, also bei geradliniger Begrenzung. Die Anfangsordinate ist natürlich stets Null, da $\varrho$ auf der Achse unendlich sein muß. Durch graphische Integration erhalten wir daraus:

$$\int \frac{1}{\varrho}\, da,$$

und mit Hilfe dieser Kurve können wir uns für einzelne Punkte $a$ die Werte

$$e^{\int \frac{1}{\varrho}\, da}$$

berechnen. Insbesondere können wir für den Endpunkt $\bar{a}$ $re^{\int_0^{\bar{a}} \frac{1}{\varrho}\, da}$ finden. Das ist der Zähler von $\tau$; um nun auch den Nenner zu finden, berechnen wir uns für verschiedene Punkte $r^3 e^{\int_0^{a} \frac{1}{\varrho}\, da}$ und tragen uns das über derselben Abszissenachse, wie vorher $\frac{1}{\varrho}$, also als Funktion von $a$ auf. Durch Integration der dadurch erhaltenen Kurve bekommen wir die Integralkurve

$$\int_0^a r^3 e^{\int_0^{a} \frac{1}{\varrho}\, da}\, da,$$

und durch die Endordinate dieser Kurve, gemessen in den Einheiten von $\tau$, wird uns der Maßstab gegeben, mit dem $re^{\int_0^{a} \frac{da}{\varrho}}$ gemessen das $\tau$ an der Begrenzung gibt. Man wird bei den Integrationen durch die Wahl einer passenden Basis und auch beim Auftragen der Punkte durch Hinzufügen irgend eines Parameters immer derartig Faktoren einführen, daß die Kurven die passende Größe erhalten. Diese müssen

natürlich bei der Bestimmung des Wertes der Endordinaten berücksichtigt werden. — Zugleich ist, wie wir oben sahen

$$u = \int_0^a r^3 e^{\int_0^a \frac{1}{\varrho} da} da.$$

Wir können also der Endordinate dieser Kurve wieder den Wert 1 zuordnen und erhalten so eine Kontrolle, inwieweit die neuen Punkte $u = 0{,}1$, $u = 0{,}2$ etc. mit den alten zusammenfallen. Ist das noch nicht in genügendem Maße der Fall, so werden die Kurven $u =$ const. nach den neu gefundenen Punkten korrigiert und die ganze Integration nochmals ausgeführt. — Auf Blatt 1 sind für die einzelnen Trajektorien der rechts stehenden Figur die so erhaltenen Kurven aufgezeichnet. Die neu erhaltenen Punkte fallen dort mit jenen, von denen man ausging, zusammen. Unten rechts ist dann nochmal die Spannung $\tau$ an der Begrenzung als Funktion der Länge dieser Begrenzung aufgetragen. Man sieht, daß die Kurve mit der von Fig. 7 im wesentlichen übereinstimmt. Im allgemeinen kommt man durch diese letzte Art der Bestimmung von $\tau$ leichter zum Ziele, insbesondere an den Stellen, wo die maximale Krümmung an der Begrenzung liegt. Wir werden daher, da uns der Verlauf der Spannungslinien weiterhin weniger interessiert, sondern hauptsächlich die Größe von $\tau$, im folgenden stets diese Methode anwenden, und zwar werden wir uns darauf beschränken, die Größe der maximalen Spannung festzustellen, denn diese bildet das wesentlichste technische Interesse.

Besonders einfach wird die Sache in dem Falle, wo schon durch den äußern Umriß der Welle die Stelle gegeben ist, an der die maximale Spannung auftritt, da es dann genügt, nur diese eine Stelle zu untersuchen.

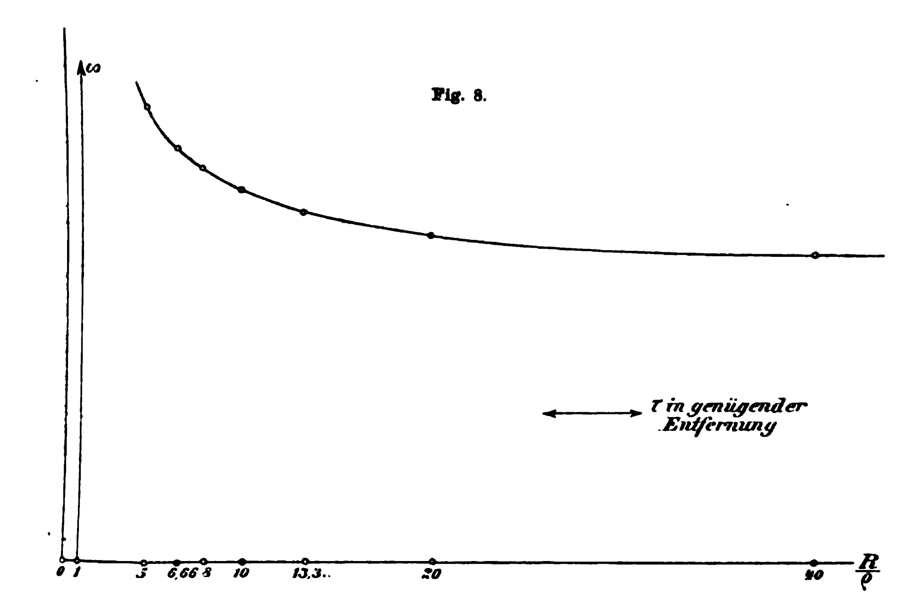
Einen solchen Fall haben wir dann, wenn etwa eine zylindrische Welle mit einer ringsherumlaufenden halbkreisförmigen Rinne versehen ist, sodaß die Meridianebene etwa die Gestalt hat, wie es das anliegende Blatt 2 für verschiedene Fälle zeigt.

Es ist von vornherein klar, daß die maximalen Spannungen an der tiefsten Stelle des Einschnittes auftreten werden und daß ferner von da aus bis zur Achse aus Symmetriegründen $da = dr$ sein wird. Wir verfahren in diesem Falle genau, wie oben angegeben ist, und wie das des näheren das anliegende Blatt 2 zeigt. Die verschiedenen Werte von $\tau$ sind dann in Fig. 8 als Funktion von $\frac{R}{\varrho}$ aufgetragen. Daneben

ist der Wert von $\tau$ in genügender Entfernung von der Übergangsstelle eingetragen. Dort wird $\varrho = \infty$ und $R = 1$, also wird

$$\tau = \frac{1}{\int\limits_0^1 r^3 dr} = 4.$$

Aus der Kurve ist zu ersehen, wie die maximale Spannung variiert bei konstant gehaltenem $R$ und variablem $\bar{\varrho}$ und auch umgekehrt bei konstantem $\bar{\varrho}$ und variablem $R$. Für $R = \bar{\varrho}$, d. h. an einer Stelle, wo die Welle unendlich dünn wird, muß natürlich $\tau$ un-




endlich groß werden, und diesem Werte muß sich $\tau$ asymptotisch nähern. Nach der andern Seite fällt die Kurve zunächst stärker, dann schwächer ab und scheint sich auch dort einem bestimmten Werte von $\tau$ asymptotisch zu nähern. Es fragt sich nun, welches ist dieser Wert?

Will man, wie das hier und auch an einer späteren Stelle der Fall ist, den Zustand in einem kleinen Bereich untersuchen, in dem $r$ sehr wenig variiert, so kann man in erster Annäherung $r$ einfach konstant setzen und dann vielleicht eine entsprechende Potenz von $r$ mit $u$ resp. $v$ vereinigen zu einer neuen Funktion $U$, die dann der Gleichung

$$\Delta U = 0$$

genügt. Hier verfahren wir so:

Wir nehmen die Differentialgleichungen (9) und (10) für $u$ und $v$, die wir in der Form schreiben:

$$(37)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0.$$

und führen, wie das Fig. 9 zeigt, Polarkoordinaten ein mit dem Pol in $r = R$ und $z = 0$. Dann wird

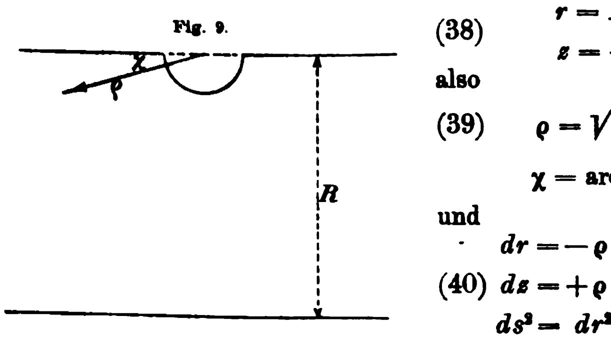


Fig. 9.

$$(38)\qquad r = R - \varrho \sin\chi$$
$$z = -\varrho \cos\chi,$$

also

$$(39)\qquad \varrho = \sqrt{(R-r)^2 + z^2}$$
$$\chi = \operatorname{arc\,tg} \frac{-R+r}{z}$$

und

$$dr = -\varrho \cos\chi\, d\chi - d\varrho \sin\chi$$
$$(40)\qquad dz = +\varrho \sin\chi\, d\chi - d\varrho \cos\chi$$
$$ds^2 = dr^2 + dz^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\chi$$

Nun wird

$$(41)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2}\,^{1)}$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho}$$

und

$$(42)\qquad \frac{3}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{3}{R - \varrho \sin\chi}\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}(-\sin\chi) + \frac{\partial u}{\partial \chi}\left(-\frac{\cos\chi}{\varrho}\right)\right)$$
$$= -\frac{3}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\sin\chi + \frac{\partial u}{\partial \chi}\frac{\cos\chi}{\varrho}\right)\left(1 + \frac{\varrho}{R}\sin\chi + \left(\frac{\varrho}{R}\sin\chi\right)^2 + \dots\right).$$

Somit lautet die Gleichung in Polarkoordinaten, wie man aus (37), (41) und 42 findet:

$$(43)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho} = -\frac{3}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\sin\chi + \frac{\partial u}{\partial \chi}\frac{\cos\chi}{\varrho}\right)$$
$$\left(1 + \frac{\varrho}{R}\sin\chi + \left(\frac{\varrho}{R}\sin\chi\right)^2 + \dots\right).$$

Ebenso erhalten wir aus der Gleichung für $v$:

$$(44)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \varrho} = \frac{3}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\sin\chi + \frac{\partial v}{\partial \chi}\frac{\cos\chi}{\varrho}\right)$$
$$\left(1 + \frac{\varrho}{R}\sin\chi + \left(\frac{\varrho}{R}\sin\chi\right)^2 + \dots\right).$$

1) Vgl. z. B. Riemann-Weber: Partielle Differentialgleichungen. Bd. 1. § 42.

Nun ist ein bekanntes Problem der Hydrodynamik das eines Kreiszylinders in einem ebenen sehr breiten Flüssigkeitsstrom. In diesem Falle haben wir es mit einer Lösung der Gleichung

$$\varDelta u = 0 \quad \text{resp.} \quad \varDelta v = 0$$

zu tun.

Die Strömungslinien werden bei diesem Probleme dargestellt durch:

$$u = c\left(\varrho - \frac{P^2}{\varrho}\right) \sin \chi. \tag{45}$$

Dabei ist $P$ der Radius des Zylinders, in unserem Falle also der Radius des halbkreisförmigen Einschnittes. $u$ ist für $\varrho = P$, also an der Begrenzung des Zylinders und für $\chi = 0$, d. h. auf der Achse Null, erfüllt also, falls wir einfach noch eine Konstante hinzuaddieren, unsere Grenzbedingungen. Wir gehen hier aber von der zugehörigen Potentialfunktion

$$v = C\left(\varrho + \frac{P^2}{\varrho}\right) \cos \chi \tag{46}$$

aus. Dieselbe erfüllt in bestimmten Gebieten annähernd unsere obige Gleichung (44), ist also in diesen Gebieten eine angenäherte Lösung unseres Problems. Gehen wir nämlich mit diesem Ansatz in unsere Gleichung (44) ein, so wird die linke Seite für sich Null, da wir ja eine Lösung von $\varDelta v = 0$ haben. Die rechte Seite wird:

$$\frac{3}{R} C\left[\left(1 - \frac{P^2}{\varrho^2}\right) \cos \chi \sin \chi - \left(1 + \frac{P^2}{\varrho^2}\right) \sin \chi \cos \chi\right]\left(1 + \frac{\varrho}{R} \sin \chi + \ldots\right)$$
$$= -\frac{3CP^2}{R\varrho^2} \sin 2\chi \left(1 + \frac{\varrho}{R} \sin \chi + \ldots\right)$$

Dieser Ausdruck wird einmal für $\chi = 0$ und $= \pi$ zu Null, sodaß also $v$ längs der geradlinigen Begrenzung eine angenäherte Lösung unserer Gleichung (44) ist. Andererseits wird an der Grenze des Zylinders, wo $\varrho = P$ ist, aus dem obigen Ausdruck

$$-\frac{3C}{R} \sin 2\chi,$$

wenn wir annehmen, daß $P$ gegen $R$ so klein ist, daß wir Glieder mit dem Faktor $\frac{P}{R}$ vernachlässigen können. Dieser Ausdruck wird nun in der Umgebung der Stelle $\chi = \frac{\pi}{2}$ beliebig klein, sodaß $v$ auch dort eine genäherte Lösung der Gleichung (44) ist.

Nun war nach Gleichung (20):

$$\tau = r\frac{dv}{db},$$

und es ist:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\varrho \partial \chi}\right)^2$$

$$= \left[C\left(1 - \frac{P^2}{\varrho^2}\right)\cos\chi\right]^2 + \left[-C\left(1 + \frac{P^2}{\varrho^2}\right)\sin\chi\right]^2$$

$$= C^2\left[1 + \frac{P^4}{\varrho^4} - 2\frac{P^2}{\varrho^2}(\cos^2\chi - \sin^2\chi)\right]$$

$$= C^2\left(1 + \frac{P^4}{\varrho^4} - 2\frac{P^2}{\varrho^2}\cos 2\chi\right).$$

Also wird für $\chi = 0$, wo das $v$, wie wir oben sahen, angenähert eine Lösung unserer Gleichung ist

$$\left(\frac{dv}{db}\right)_{\chi=0} = C\left(1 - \frac{P^2}{\varrho^2}\right).$$

Also wird dort, falls $R$ der Radius der Welle ist:

$$\tau_{\chi=0} = RC\left(1 - \frac{P^2}{\varrho^2}\right).$$

Wählt man nun $\varrho$ sehr groß gegenüber $P$, so erhält man $\tau$ in solcher Entfernung von der Übergangsstelle, daß der Einschnitt dort keinen Einfluß mehr hat. Bezeichnen wir diese Spannung mit $\tau_0$, so wird

$$C = \frac{\tau_0}{R}.$$

Wir haben nach Gleichung (46):

(47) $$v = \frac{\tau_0}{R}\left(\varrho + \frac{P^2}{\varrho}\right)\cos\chi.$$

Nun sahen wir oben weiter, daß an der Grenze der Welle auch für $\chi = \frac{\pi}{2}$ (47) eine genäherte Lösung von (44) ist. Dort haben wir aber gerade die maximale Spannung. Es wird dort

$$v = \frac{\tau_0}{R}\left(\varrho + \frac{P^2}{\varrho}\right),$$

und falls wir $\varrho = P$ setzen und $P$ sehr klein gegen $R$ annehmen, so wird:

$$\frac{dv}{db} = 2C = 2\frac{\tau_0}{R},$$

also

(48) $$\tau_{max} = 2\tau_0.$$

Somit wird an der tiefsten Stelle einer solchen halbkreisförmigen Rinne von verschwindend kleinem Radius die Spannung doppelt so groß, als an der Oberfläche der Welle in genügender Entfernung von einer solchen

Stelle; also 8, wenn sie sonst 4 ist. Vergleichen wir dieses mit unserer Kurve (Fig. 8), so sehen wir, daß das damit auch stimmt; dieselbe nähert sich asymptotisch diesem Werte. Man gewinnt zugleich hier einen gewissen Einblick darin, daß und in welcher Weise für Torsionsprobleme die Oberflächenbeschaffenheit eines Körpers einen Einfluß auf die Bruchfestigkeit desselben haben kann. Unsere Untersuchungen gelten daher nur für eine ganz glatte Oberfläche ohne irgend welche Unebenheiten.

Ausführlicher wollen wir nun noch den Fall untersuchen, daß die Welle aus zwei Zylindern von verschiedenen Radien besteht, die, wie das die Umrisse auf Blatt 3 zeigen, mittels eines Viertelkreises ineinander übergehen. Um nun zunächst zu untersuchen, in welcher Weise die maximale Spannung abhängig ist vom Verhältnis des Radius des Abrundungkreises zum Radius der kleineren Welle, wollen wir einen Fall wählen, in dem sich der Radius des schwächeren Zylinders $\bar{r}$ zu dem des stärkeren $R$ verhält $\bar{r} : R = 3 : 4$. Das Problem ist insofern anders, als das vorige, als der Ort der maximalen Spannung nicht wie beim vorigen Umriß bekannt ist. Da es uns aber nur auf den ungefähren Wert ankommt, so genügt es, wenn wir annehmen, daß die maximale Spannung etwas hinter der Ansatzstelle des Abrundungskreises liegt, wie das der bei dem aufgelagerten Bunde Blatt 1 gezeichnete Verlauf der Spannungen zeigt, und zwar etwa $\frac{3}{10}$ des Abrundungsradius von dieser Stelle entfernt.

Wir verfahren also genau, wie oben gezeigt, zeichnen nach Gutdünken die Kurven $u = \text{const}$ ein, verbessern dieselben nach dem ersten Verfahren und ziehen dann die orthogonale Trajektorie durch den Punkt, wo nach unserer Annahme die größte Spannung auftritt. Auf diese Kurve wenden wir dann das zweite Verfahren an. War die Approximation gut genug, so werden die dadurch neu gefundenen Punkte für die Kurven $u = \text{const}$ mit denen, von welchen man ausging, nahezu zusammenfallen; ist das nicht der Fall, so müssen die Kurven nochmals nach den neu gefundenen Punkten verbessert werden. Die Trajektorie muß orthogonal zu den neuen Kurven gezogen und auf sie das Verfahren nochmals angewandt werden. Wir erhalten so schließlich den Wert der Spannung, wenn wir $r e^{\int_0^{\bar{a}} \frac{1}{\varrho} da}$ durch den Wert der Endordinate der Integralkurve $\int_0^{\bar{a}} r^3 e^{\int_0^{a} \frac{1}{\varrho} da}$ dividieren. Dieses

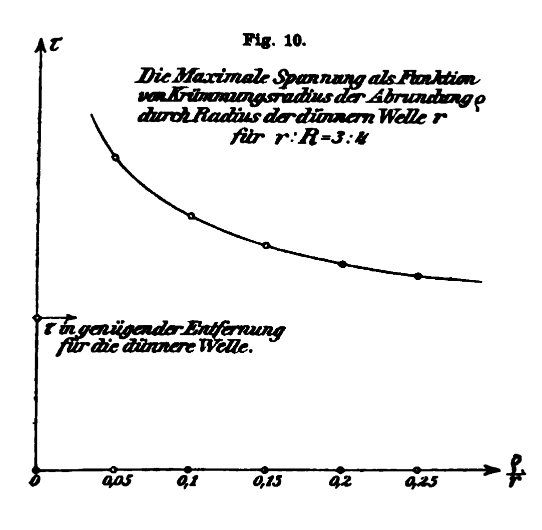
ist für fünf verschiedene Fälle durchgeführt, in denen sich der Abrundungsradius $\varrho$ zum Radius der kleineren Welle $\bar{r}$ verhielt, wie 1 : 20, 2 : 20, 3 : 20, 4 : 20 und 5 : 20 (siehe Blatt 3) und die erhaltenen Spannungen sind in Fig. 10 als Funktionen von $\frac{\bar{\varrho}}{\bar{r}}$ aufgetragen. Dabei ist die Spannung an der Oberfläche der dünneren Welle, deren Radius $\bar{r} = 1$ genommen wurde, in genügender Entfernung von der Übergangsstelle

$$\tau_0 = \frac{\bar{r}}{\int\limits_0^{\bar{r}} r^3\, dr} = 4$$

auch eingetragen.

Es zeigt sich, daß mit kleiner werdendem $\bar{\varrho}$ die Spannung sehr stark ansteigt, und es fragt sich, wird sich dieselbe für $\bar{\varrho} = 0$ einem endlichen Grenzwert nähern, oder wird sie dort unendlich werden, und falls dieses der Fall ist, in welcher Weise wird sie unendlich? Es ist immerhin von gewissem Interesse, dieses einmal zu untersuchen, da man daraus eine Übersicht gewinnt, in welcher Weise für sehr kleine Abrundungsradien die Spannungen anwachsen. In der Praxis wird eine Welle mit einer ganz scharfen Ecke natürlich nicht vorkommen, denn meistens wird dort absichtlich eine solche Abrundung angebracht werden, oder, falls dieses nicht der Fall sein sollte, wird doch die Materialbearbeitung niemals eine ganz scharfe Ecke zulassen. Jedenfalls ist es empfehlenswert, wie der Verlauf der Kurve Fig. 10 und auch die folgende Untersuchung zeigt, eine solche Abrundung anzubringen und ihren Radius nicht zu klein zu wählen.

Fig. 10.




Mathematisch betrachtet, ist eine solche scharfe Ecke ein singulärer Punkt unserer Differentialgleichung, für den sich eine Lösung in Form einer Reihenentwicklung ansetzen läßt. Zu diesem Zwecke verlegen wir die Ecke in den Punkt $r = \bar{r}$ $z = 0$ und führen genau wie oben Fig. 9 Polarkoordinaten $\varrho$ und $\chi$ ein mit der Ecke als Pol. Setzen

wir dann in Gleichung (43) für $R$ den Radius der schwächeren Welle $\bar{r}$ ein, so erhalten wir für $u$ die Gleichung

$$(49)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} = -\frac{3}{\bar{r}}\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\sin\chi + \frac{\partial u}{\varrho\,\partial \chi}\cos\chi\right)$$
$$\left(1 + \frac{\varrho}{\bar{r}}\sin\chi + \left(\frac{\varrho}{\bar{r}}\sin\chi\right)^2 \cdots\right).$$

Wir setzen nun als Lösung für $u$ eine Potenzreihe in $\varrho$ an, deren Koeffizienten Funktionen von $\chi$ sind, und die mit $\varrho^2$ beginnend nach wachsenden Potenzen von $\varrho$ fortschreitet. Gehen wir mit diesem Ansatz in Gleichung (49) ein, so ist die niedrigste Potenz der linken Seite $\varrho^{\lambda-2}$, die der rechten aber nur $\varrho^{\lambda-1}$. Für kleiner werdende $\varrho$ konvergiert die rechte Seite wegen des Faktors $\varrho^{\lambda-1}$ stärker gegen Null als die linke, die $\varrho^{\lambda-2}$ als Faktor hat. Daher müssen die Glieder der linken Seite, die $\varrho^{\lambda-2}$ enthalten, für sich Null werden, d. h. das erste Glied der Reihenentwicklung muß eine Lösung der Gleichung

$$\Delta u = 0$$

sein. Da nun der reelle oder imaginäre Teil jeder analytischen Funktion eine Lösung dieser Gleichung ist, so handelt es sich nur darum, für das erste Glied der Entwicklung eine solche analytische Funktion zu wählen, die in der Umgebung der singulären Stelle auf der Begrenzung konstant ist.

Nehmen wir etwa von

$$B(x' + iy')^{\frac{2}{3}} = B\varrho^{\frac{2}{3}} e^{i\frac{2}{3}\chi} = B\varrho^{\frac{2}{3}}(\cos\tfrac{2}{3}\chi + i\sin\tfrac{2}{3}\chi)$$

den imaginären Teil und setzen

$$x' = r - \bar{r} \qquad y' = z$$
$$\varrho = \sqrt{(r-\bar{r})^2 + z^2} \qquad \chi = \operatorname{arc\,tg}\frac{r-\bar{r}}{z},$$

so erhalten wir eine Funktion, die in der Nähe der Ecke auf der Begrenzung Null ist, denn

$$\text{für}\quad \chi = 0 \quad \text{ist}\quad r - \bar{r} = 0 \qquad z < 0 \quad \text{und}\ u = 0$$
$$\text{für}\quad \chi = \tfrac{3}{2}\pi \quad \text{ist}\quad z = 0 \quad r - \bar{r} > 0 \quad \text{und}\ u = 0.$$

Wenn wir nun ein sehr kleines Gebiet betrachten derart, daß $\varrho^{\frac{2}{3}}$ groß ist gegen $\varrho^{\frac{5}{3}}$, so stellt uns

$$u = 1 + B\varrho^{\frac{2}{3}}\sin\tfrac{2}{3}\chi$$

den Verlauf der Spannungslinien dar, falls auf der Begrenzung $u = 1$ ist. (Fig. 11.)

Das erste Glied der Reihenentwicklung ist damit gefunden; aber auch die andern Glieder lassen sich angeben. Geht man nämlich mit dem Ansatz

$$u = 1 + B\left[\varrho^{\frac{2}{3}} \sin \tfrac{2}{3}\chi + \varrho^{\frac{5}{3}} f_1(\chi) + \varrho^{\frac{8}{3}} f_2(\chi) + \cdots\right]$$

in die Gleichung (49) ein und setzt, da die entstehende Gleichung für jedes $\varrho$ erfüllt sein muß, die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $\varrho$ Null, so erhält man rekurrierende gewöhnliche Differentialgleichungen für $f_1$, $f_2$ etc., aus denen sich diese berechnen lassen. So erhält man z. B. für $f_1$ die Gleichung

$$\frac{d^2 f_1}{d\chi^2} + (\tfrac{5}{3})^2 f_1(\chi) = -\frac{2}{r} \cos \tfrac{1}{3}\chi$$

das ist aber die bekannte Gleichung der ungedämpften, erzwungenen Schwingungen, deren allgemeines Integral

$$f_1\chi = -\frac{3}{4r} \cos \tfrac{1}{3}\chi + C \sin \tfrac{5}{3}\chi + D \cos \tfrac{5}{3}\chi$$

lautet. Die Gleichungen für $f_2$ usw. haben dieselbe Form, nur daß die rechte Seite komplizierter ist. Alle diese Funktionen müssen auf der Begrenzung Null werden. Also muß $f_1 = 0$ sein.

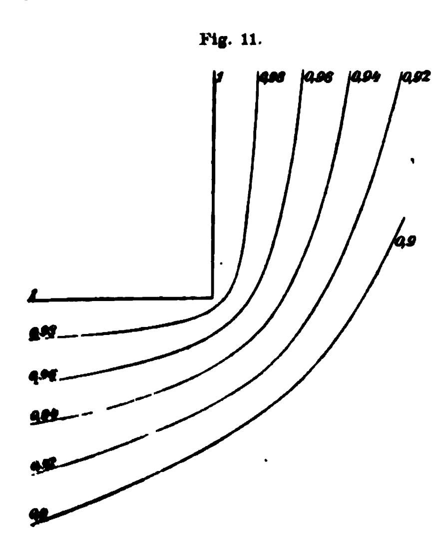


Fig. 11.

1) für $\chi = 0$; das ist der Fall, wenn $D = \frac{3}{4r}$ ist

2) für $\chi = \frac{3}{2}\pi$ das gibt $C = 0$,

also muß

$$f_1(\chi) = \frac{3}{4r}(\cos \tfrac{5}{3}\chi - \cos \tfrac{1}{3}\chi)$$

sein.

In ähnlicher Weise lassen sich auch die folgenden Glieder berechnen; doch bietet das hier weiter kein Interesse. Wir erhalten dabei als Gleichung immer die der erzwungenen Schwingungen. In der weiteren Reihenentwicklung treten dann neue Konstanten auf, die zur Befriedigung unserer Grenzbedingungen dienen können. So würden wir z. B. in Form einer unendlichen Reihe die Lösung der Differentialgleichung für den Fall erhalten können, daß auf den Halbraum ein Zylinder

vom Radius $\bar{r}$ aufgesetzt ist. Wir begnügen uns hier mit den beiden ersten Gliedern

(50) $$u = 1 + B\left[\varrho^{\frac{2}{3}} \sin \tfrac{2}{3}\chi + \frac{8}{4-}\, \varrho^{\frac{5}{3}} (\cos \tfrac{5}{3}\chi - \cos \tfrac{1}{3}\chi) \cdots\right]$$

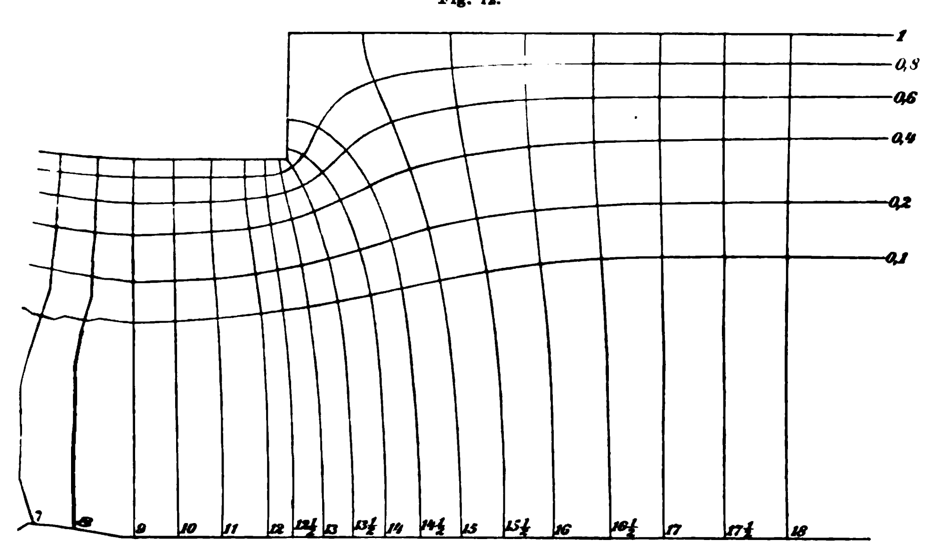
Wählen wir den betrachteten Bereich so klein, daß der Spannungszustand mit genügender Annäherung durch

(51) $$u = 1 + B\varrho^{\frac{2}{3}} \sin \tfrac{2}{3}\chi$$

dargestellt wird, so legen sich die Spannungslinien symmetrisch um die Ecke und sind am engsten für $\chi = \frac{3}{4}\pi$. Für diese Gerade folgt mit Berücksichtigung von (18) aus (51):

$$u - 1 = B\varrho^{\frac{2}{3}} = \int_0^a r^2 \tau\, da - 1 = -\int_a^{\bar{a}} r^2 \tau\, da.$$

Fig. 12.




Da nun $\varrho$ dort senkrecht zu den Spannungslinien steht und in entgegengesetztem Sinne wie $a$ gerechnet wird, so ist

$$B\varrho^{\frac{2}{3}} = \int_\varrho^0 r^2 \tau\, d\varrho$$

oder durch Differentiation

(52) $$\tfrac{2}{3} B\varrho^{-\frac{1}{3}} = -r^2\tau.$$

Um nun zu sehen, wie groß etwa die Konstante $B$ ist, verfahren wir folgendermaßen: Aus Gleichung (50) erhalten wir für $\chi = \frac{3}{4}\pi$

$$B = \frac{u-1}{\varrho^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{\varrho}{\bar{r}}\right)}$$

Verfertigen wir uns nun eine Zeichnung nach unserem obigen Verfahren für den Fall der scharfen Ecke, so können wir aus dieser entnehmen, daß etwa ist für

| | |
|---|---|
| $u = 0{,}9$ | $\varrho = 0{,}0097\ \bar{r}$ |
| $u = 0{,}8$ | $\varrho = 0{,}028\ \bar{r}$ |
| $u = 0{,}7$ | $\varrho = 0{,}0534\ \bar{r}$ |
| $u = 0{,}6$ | $\varrho = 0{,}0867\ \bar{r}$ |

Setzen wir das in obigem Ausdruck für $B$ ein, so erhalten wir:

$$B_1 = -2{,}24; \quad B_2 = -2{,}26; \quad B_3 = -2{,}25; \quad B_4 = -2{,}30;$$

also ist etwa

$$B = -2{,}26,$$

so daß wir in erster Annäherung den Spannungszustand in einer einspringenden Ecke darstellen können durch

$$u = 1 - 2{,}26\, \varrho^{\frac{2}{3}}\left(\sin \tfrac{2}{3}\chi - \frac{3\varrho}{4\bar{r}}(\cos \tfrac{5}{3}\chi - \cos \tfrac{1}{3}\chi) \cdots\right)$$

und dementsprechend wird etwa

$$\tau = \frac{4{,}52}{3\bar{r}^2 \sqrt[3]{\varrho}}$$

Daraus geht übrigens hervor, daß $B$ die Dimension $\left[m l^{\frac{4}{3}} t^{-2}\right]$ hat. Ferner sieht man daraus, daß in einer scharfen Ecke die Spannungen wie $\lim\limits_{s=0} \frac{C}{\sqrt[3]{s}}$ unendlich werden.[1])

Damit ist also gegeben, in welcher Weise sich die Kurve in Fig. 10 asymptotisch der Vertikalen durch $\frac{\varrho}{\bar{r}} = 0$ nähert. Aus der Kurve geht hervor, daß für den größten Abrundungsradius $\frac{\bar{r}}{4}$ die maximale Spannung etwa nur $1\frac{1}{4}$ der Spannung an der Oberfläche des schwächeren Zylinders beträgt, also nur eine sehr geringe Spannungszunahme stattfindet.

Es sei noch erwähnt, daß sich auch leicht der Fall der vorspringenden scharfen Ecke erledigen läßt; dort ist in erster Annäherung

$$u = 1 - C\varrho^2 \sin 2\chi.$$

1) Durch eine Verallgemeinerung obiger Untersuchung läßt sich feststellen, daß in jeder einspringenden scharfen Ecke, mag sie auch noch so flach sein, die Spannung unendlich wird.

wird auf der Halbierungslinie

$$1 + \int_{\varrho}^{0} r^2 \tau \, d\varrho = C\varrho^2,$$

$$\tau = -\frac{2C\varrho}{r^2}.$$

r Ecke selbst wird somit die Spannung, da $C$ eine endliche Größe Null.

Nun wird andererseits die maximale Spannung auch eine Funktion $\frac{\bar{r}}{R}$ sein; um das zu untersuchen, lassen wir den Abrundungsradius ant etwa gleich $\frac{1}{10}$ des Radius $\bar{r}$ des schwächeren Zylinders. Die suchungen sind durchgeführt für Wellen, bei denen sich verhält wie 1) 10:11, 2) 10:12, 3) 10:13, 4) 10:15, 5) 10:20. Um naximale Spannung hier etwas genauer zu finden, wurden die nungen in der Weise festgelegt, wie das Blatt IV zeigt, wo oben s der Verlauf der Linien für den Fall $\bar{r}:R = 10:13$ eingezeichnet Dort ist, nachdem nach der ersten Methode zunächst annd der Verlauf der Spannungslinien festgelegt ist, die Endung für die Trajektorien I, II, III und IV nach der zweiten de festgestellt. Von diesen Trajektorien endigt I in der schwächeren, der stärkeren Welle und II und III an der Übergangsstelle. liegen I und II so, daß sie die Stelle der maximalen Spannung hen sich einschließen. Es macht dann durchaus keine Schwierigweitere Trajektorien einzuschalten. Zunächst ist dann V etwa r Mitte zwischen I und II eingeschaltet. Dann muß, falls die pannung für II und V einen größeren Wert, als für I hat — wie n der Zeichnung der Fall ist — die maximale Spannung zwischen d V liegen. Hier wird abermals eine Trajektorie VI eingeschaltet. önnte man fortfahren, doch gelingt es schon so, wenn man die annung $\tau$ als Funktion der Länge der Begrenzung aufträgt, Verbindung der Punkte das maximale $\tau$ mit genügender Genauigu finden. Dieses ist geschehen in der Fig. unter dem Wellenprofile auf Blatt IV. Rechts unten ist dann noch einmal der Verlauf der Endspannung für sämtliche untersuchte Wellen aufgetragen. Es zeigt sich, daß die Kurven um so spitzer werden, je größer der Radius des stärkeren Zylinders ist. In diesem Falle ist daher die maximale Spannung schwieriger festzustellen, als in einem Falle, wo die Differenz der Zylinderradien nicht sehr groß ist, denn dann ist in einem ganzen Bereich das $\tau$ annähernd konstant gleich der maximalen Spannung. Endlich ist noch rechts auf Blatt IV das maximale $\tau$ als Funktion von

$\frac{R-\bar{r}}{R}$ aufgetragen. Die zunächst stark ansteigende Kurve wird bald sehr flach, so daß also die Spannung für noch größere Verhältnisse von $r:R$, die übrigens kaum in der Praxis vorkommen dürften, nur noch wenig wachsen wird.

Für gewöhnlich vorkommende Verhältnisse ist also die maximale Spannung bei dem Abrundungsradius $\frac{1}{10}\bar{r}$ etwa das 1,75 fache der Spannung an der Oberfläche der schwächeren Welle, so daß die Zahl 2,00, die Herr Professor Föppl in seiner Abhandlung in der Zeitschrift deutscher Ingenieure angibt, etwas hoch ist. Dementsprechend ist auch die maximale Spannung gleich der an der Oberfläche einer Hohlwelle von gleichem Radius $\bar{r}$ und etwa von der Dicke 0,19 $\varrho$.

Wir sehen also: vergrößert man das Verhältnis des Abrundungsradius zum Radius des kleineren Zylinders, so wird die maximale Spannung kleiner; vergrößert man das Verhältnis des Radius des stärkeren Zylinders zu dem des kleineren, so wird die maximale Spannung größer. Man kann nun einmal versuchen, beides zu gleicher Zeit zu tun und dadurch annähernd das Verhältnis der maximalen Spannung zu der an der Oberfläche der kleineren Welle in genügender Entfernung von der Übergangsstelle konstant zu halten. Dieses geschieht am einfachsten, indem man die Begrenzung als unveränderliches Ganzes näher an die Achse hinanschiebt oder weiter davon entfernt. Dieses ist ausgeführt für den Fall, daß der Radius der Abrundung der dritte Teil der Differenz der Radien der beiden Zylinder ist, die ja als konstant angenommen ist. In Fig. 13 ist das Resultat dieser Untersuchung aufgetragen. Die ausgezogene Kurve gibt das Verhältnis der maximalen Spannung zu der an der Oberfläche des schwächeren Zylinders als Funktion des Radius dieses Zylinders. Die gestrichelte Kurve gibt die maximale Spannung, falls auf die Welle das Drehungsmoment $2\pi$ ausgeübt wird.

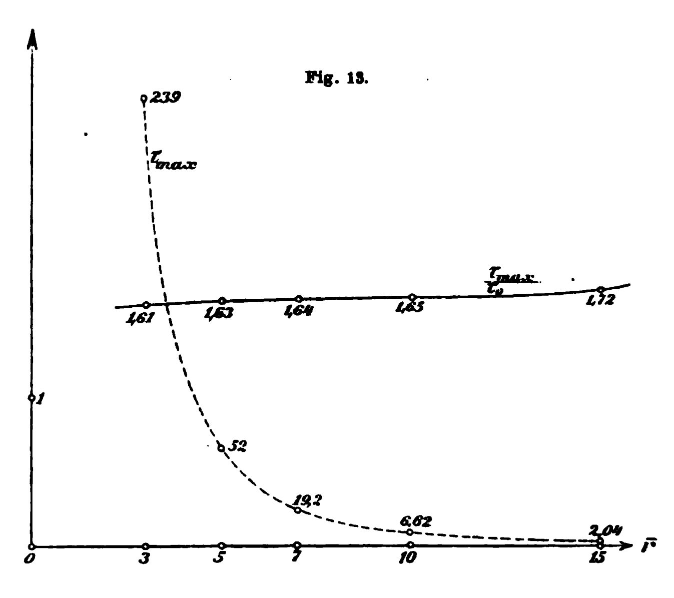
Man sieht also, das Verhältnis ist in diesem Falle nahezu konstant. Benutzt man wie oben die Formel für die Hohlwelle

$$\tau = \frac{2Mb}{a^4 - b^4}$$

wo $a$ der äußere, $b$ der innere Radius und $M$ das Torsionsmoment ist, so kann man sagen, die maximale Spannung ist in diesem Falle gleich der an der Oberfläche einer Hohlwelle, deren Radius 1 und deren Dicke gleich dem doppelten Abrundungsradius ist.

Unser Verfahren läßt sich auch auf andere Wellenumrisse anwenden, falls man es mit Rotationskörpern zu tun hat. Ist das nicht der Fall, so muß man versuchen, einen solchen zu erhalten. Dabei können manchmal die Spannungslinien auch nur auf einer Seite gegeben

sein. Ein Beispiel dafür ist ein Flansch. Um in diesem Falle einen Rotationskörper zu erhalten, nehmen wir an, die Wellen hingen längs eines Kreisringes zusammen, der durch kontinuierliche Verteilung der zusammen haltenden Bolzen bestimmt ist, aber breiter sein soll, als der so erhaltene Ring, etwa $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{5}$ des Radius $R$ der Welle. Da das nur eine rohe Annäherung der Wirklichkeit ist, so werden auch die Spannungslinien in Wirklichkeit nur annähernd so verlaufen, wie in der so erhaltenen Zeichnung, besonders in dem Flansch selbst. Indessen wird doch der Verlauf in der einspringenden Ecke ein Urteil über die dort auftretenden Spannungen gewinnen lassen. Nimmt man z. B. bei einem Abrundungsradius $\varrho = \frac{1}{5} R$, die Höhe des Flansches $\frac{6}{10} R$ und seine Breite $\frac{1}{2} R$, so zeigt sich, daß die maximale Spannung an der Abrundung immer noch $1\frac{1}{2}$ bis $1\frac{3}{4}$ mal so groß ist, als an der Oberfläche der Welle in einiger Entfernung von dem Flansch.




Zum Schluß sei endlich noch erwähnt, daß sich die hier angegebene Methode nicht nur im Falle der obigen Gleichung anwenden läßt, sondern daß sie — natürlich ihre Konvergenz vorausgesetzt — auch zur Lösung anderer Gleichungen der Form

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(xy)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f(xy)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

bei beliebigen Randbedingungen verwandt werden kann. Diese Methode wird sich also auch eignen zur Lösung der Gleichung

$$\Delta u = 0$$

insbesondere da, wo es sich um Strömungsprobleme z. B. in durch Rotation irgend einer Kurve entstandenen Röhren handelt, während bei vielen anderen Fällen die von Herrn Prof. Runge angegebene numerisch-graphische Netzmethode vorzuziehen sein wird.

# Die kubische Kreisbewegung eines starren Körpers.

Von Anton Grünwald aus Bubentsch bei Prag, z. Z. in München.

## § 1. Erklärungen. Inhaltsübersicht.

Eine Raumkurve dritter Ordnung heißt *kubische* Ellipse, wenn sie die unendlich ferne Ebene in zwei konjugiert-komplexen und in einem reellen Punkte schneidet. Gehören die beiden unendlich fernen konjugiert-komplexen Punkte dem absoluten Kugelkreise an, d. h. genügen deren unendlich große rechtwinklige Koordinaten $x$, $y$, $z$ der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, so nennt man die Raumkurve passend einen *kubischen Kreis*.

Diese durch zwei (absolute, unendlich ferne) Kreispunkte gehenden kubischen Raumkurven sind die Fußpunktskurven von hyperbolisch-paraboloidischen Regelscharen: Fällt man aus einem beliebigen Punkte, dem Pole, Lote (senkrechte Transversale) auf die Geraden der einen Schar eines hyperbolischen Paraboloides, so erfüllen die Fußpunkte dieser Lote einen kubischen Kreis, und umgekehrt kann jeder kubische Kreis als die Fußpunktskurve einer bestimmten Regelschar auf einem Paraboloide erhalten werden. Der Pol kann hierbei auf einer bestimmten, zur Richtebene dieser Schar senkrechten Geraden beliebig angenommen werden.

Die kubischen Kreise sollen *aufrecht* oder *schief* heißen, je nachdem die durch ihren reellen unendlich fernen Punkt bestimmte Richtung, mit anderen Worten, je nachdem ihre reelle Asymptote zu den durch ihre beiden absoluten Kreispunkte gelegten (parallelen) Ebenen senkrecht steht oder nicht. Die *aufrechten* kubischen Kreise liegen auf Umdrehungszylindern und sind Fußpunktskurven bezüglich einer Regelschar auf einem *gleichseitigen* hyperbolischen Paraboloide, die *schiefen* kubischen Kreise liegen auf schiefen Kreiszylindern und sind Fußpunktskurven bezüglich einer Regelschar auf einem *ungleichseitigen* hyperbolischen Paraboloide.[1])

Die Fußpunktskurven einer Parabel, identisch mit den zirkulären rationalen Kurven 3. Ordnung in einer Ebene, sind hiernach passend als *ebene kubische Kreise* zu bezeichnen.

1) Vgl. die Abhandlung des Verfassers: „Betrachtung von Fußpunktskurven in der Ebene und im Raume" in den Programmen der II. deutschen Staatsrealschule in Prag von 1906 und 1907.

In Vorlesungen über Geometrie ist es wünschenswert, die Erzeugung einfacher kubischer Raumkurven auch anschauungsmäßig, etwa in einem kinematischen Modelle vorzuführen. Hierzu sind eben die zirkulärkubischen Raumkurven, die *kubischen Kreise*, am besten geeignet, da es eine — und im Wesen *nur* eine — kinematisch sehr leicht zu erzwingende kubische, rational von einem Parameter $t$ abhängige Bewegung eines starren Körpers gibt, bei welcher alle seine Punkte reelle kubische *Kreise* beschreiben, nämlich die kubisch-zirkuläre Bewegung oder *kubische Kreisbewegung*, welche wir hier untersuchen wollen.

Sie bietet auch noch den Vorteil, bei *Betrachtung* der von den Ebenen des starren Körpers bei seiner Bewegung eingehüllten *Developpablen* zu einer anderen metrisch ausgezeichneten Gattung von Raumkurven 3. Ordnung zu führen, welche als Gratlinien dieser Developpablen auftreten. Es ist dies die Gattung der *kubischen Helix*, d. h. der Helix oder „Kurve gleicher Steigung“ $\mathfrak{O}$ auf dem einzigen kubischen Zylinder, welcher derartige wiederum *kubische* und zwar obendrein (ganz-rational)-algebraisch rektifizierbare Kurven zuläßt, deren Tangenten überall mit den Zylinderkanten gleiche Winkel einschließen. Der Orthogonalschnitt $\mathfrak{O}'$ dieses Zylinders ist eine ausgezeichnete kubische Parabel, Fig. 6, mit der Gleichung (27) $my^2 = x(x - 9m)^2$, die zweite negative Fußpunktskurve einer Geraden, d. h. die erste negative Fußpunktskurve einer Parabel in bezug auf ihren Brennpunkt als Pol, oder die Katakaustik einer Parabel bei Beleuchtung durch parallele (zur Parabelachse senkrechte) Lichtstrahlen. Diese schleifenförmige, hier als Zylinderbasis auftretende kubische Parabel wurde schon von Marquis de l'Hôpital und Tschirnhausen bemerkt und wird zuweilen nach ihnen benannt, falls man nicht den Namen *caustique podaire* oder *Orthogenide* vorzieht. Alle Orthogeniden sind einander ähnlich. Die kubische Helix ist leicht durch ein Papierblatt von der Form eines rechtwinkligen Dreieckes derart zu veranschaulichen, daß dessen Hypotenuse die Helixform annimmt, falls man das Papierstück zylindrisch verbiegt und mit der deformierten Kathete auf einer Orthogenide als Basis aufstellt.

Der interessanteste Umstand bei der kubischen Kreisbewegung, welche wir untersuchen wollen, ist aber nicht eben der, daß sie von *allen kubischen* Bewegungen am leichtesten einem starren Körper $\mathfrak{K}_1$ (hinsichtlich eines ruhenden Körpers $\mathfrak{K}$) aufgezwungen werden kann, wie wir dies in der Figur 3 durch einen besonders einfachen Mechanismus andeuten[1]), sondern daß sie die *einzige* ihrer Art ist: Wenn

1) Der Hilfskörper $\mathfrak{K}_0$ in dieser Figur beschreibt hierbei zwangläufig die als Grenzfall der schiefen (z. B. von $\mathfrak{K}_1$ ausgeführten) anzusehende *aufrechte* kubische Kreisbewegung, so daß auch für die letztere kein neuer Apparat nötig wird.

wir nämlich von den trivialen Parallelbewegungen absehen, bei welchen alle Punkte eines starren Körpers kongruente und gegeneinander nur parallel verschobene Bahnkurven beschreiben, gibt es außer der von unserem einfachen Mechanismus darstellbaren *keine* einzige reelle und von einem Parameter $t$ rational abhängige Bewegung eines starren Körpers mehr im Raume, bei welcher *alle* Punkte desselben kubische Kreise beschreiben. Vorerst weisen wir den betreffenden Satz für die ebene kubische Kreisbewegung nach, indem wir die gegeneinander beweglichen starren Körper $\Omega_1$, $\Omega$ zu übereinander gelegten ebenen Blättern zusammenschrumpfen lassen.

## § 2. Die ebene kubische Kreisbewegung als besonderer Fall der kubischen Ellipsenbewegung eines starren Blattes.

Eine keineswegs triviale Bewegung, bei welcher alle Punkte eines ebenen Blattes auf dem anderen Blatt Parabelfußpunktskurven, also kubische Kreise zeichnen, ist wohl bekannt.[1]) Es ist dies jene, bei welcher die gleitlos aneinander abrollenden Polkurven beider Blätter, also die Orte der Momentanzentren in $\Omega$ und $\Omega_1$, *symmetrische* Parabeln sind, d. h. kongruente Parabeln, welche bezüglich der Tangente in ihrem jeweilig gemeinsamen Berührungspunkte symmetrisch liegen. Da hierbei der Brennpunkt jeder der beiden Parabeln auf der Direktrix der anderen bleibt, ist es leicht, die Bewegung der Blätter gegeneinander dadurch zu erzwingen, daß man beide mit je einer geraden *Furche* und einem *Stifte* versieht, welche indes bei beiden Blättern voneinander gleichweit abstehen müssen, und dann den Stift jedes der beiden Blätter zwingt, sich in der Furche des anderen Blattes zu bewegen.

Eine der gegenseitigen Lagen beider Blätter ist als *Verzweigungsstellung* ausgezeichnet, jene nämlich, bei welcher die Verbindungslinie der Stifte zur Furchenrichtung senkrecht steht: Von dieser Lage allein aus ist es möglich, daß außer der kubischen Kreisbewegung, welche zwei symmetrischen Parabeln die Rolle von aneinander abrollenden Polkurven zuweist, noch eine ganz triviale, geradlinige Parallelbewegung des einen Blattes gegen das andere in der Furchenrichtung möglich wird, deren Eintritt aber als unerwünscht leicht zu verhindern ist.

Abgesehen vom trivialen Falle einer kubischen Parallelbewegung — mit gegeneinander nur verschobenen kongruenten Punktbahnen —

---

1) Vgl. etwa in G. Koenigs Cinématique, Paris 1897, S. 169 und Figur 58. Auch in H. Sicards Cinématique, Paris 1902, S. 100 und Figur hierzu.

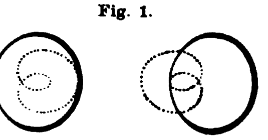
Längst vorher von Dr. L. Burmester bemerkt und durch sein symmetrisches Schleifschiebergetriebe dargestellt. Vgl. Burmesters Kinematik, Leipzig 1888, S. 334 und Fig. 390.

ist die durch solche Blätter $\Omega_1$ und $\Omega$, welche mit Furche und Stift symmetrisch ineinandergreifen, erzeugbare kubische Kreisbewegung die *einzige*[1]) rational durch einen Parameter $t$ darstellbare, bei welcher *alle* Punkte des einen Blattes auf dem anderen kubische Kreise zeichnen. Um dies einzusehen, leiten wir zuerst die Gleichungen der allgemeinen „kubischen Ellipsenbewegungen" eines starren ebenen Blattes ab. Hierunter verstehen wir solche von einem Parameter $t$ rational abhängige Bewegungen, bei denen alle Punkte ebene kubische Ellipsen beschreiben

---

1) Diese Ausschließlichkeit ist umso bemerkenswerter, als eine analoge, schon bei Bewegungen ebener Blätter, von welchen kongruente Ellipsen oder Hyperbeln als Polkurven symmetrisch aneinander abrollen, nicht mehr besteht. Die in letzterem Falle auftretenden Rouletten sind die Fußpunktskurven von Mittelpunktskegelschnitten, identisch mit den rationalen bizirkulären Kurven 4. Ordnung. Die Bewegung, welche durch symmetrisch aneinander abrollende Mittelpunktskegelschnitte gekennzeichnet ist und durch ein symmetrisches Gelenkviereck, das „Antiparallelogramm" der Brennpunkte, erzwungen werden kann, ist *keineswegs* die einzige, welche die Punkte des einen ebenen Blattes zwingt, auf den anderen rationale, bizirkuläre Kurven 4. Ord. zu zeichnen, sondern es ist durch Cayley noch eine *andere* Bewegung von der letzteren Eigenschaft bekannt geworden, bei welcher die gleitlos aneinander abrollenden Polkurven beider Blätter Pascalsche Schnecken von gleichem Umfange sind. Die Figur 1 stellt zwei solche, in Polarkoordinaten $r$, $\varphi$ durch

Fig. 1.



$$r = A \cos \varphi + B$$
$$\text{bzw.} \quad r = B \cos \varphi + A$$

darstellbare Kurven vor, die eine mit isoliertem, die andere mit nicht isoliertem Doppelpunkte. Bei der durch diese Polkurven bestimmten algebraischen Bewegung, welche nur dann eintreten kann, wenn sie von einer der in der Figur 1 angedeuteten Lagen derselben ausgeht, wo die Doppelpunkte und die Symmmetrieachsen beider Schneckenlinien zusammenfallen, treten zwei Verzweigungsstellungen auf und zwar gerade bei den gezeichneten Lagen der Polkurven. — Man kann die Bewegung Cayleys durch ein anderes symmetrisches Gelenkviereck als das obige, durch das „Deltoid", mit zwei zusammenstoßenden Seiten von der Länge $a = \frac{B^2 - A^2}{2A}$ und zwei anderen von der Länge $b = \frac{B^2 - A^2}{2B}$ erzwingen, indem man wiederum die beiden Blätter starr mit den Gegenseiten desselben verbindet. Die beiden Verzweigungsstellungen gehen durch Drehung des einen Blattes um 180° und zwar um den gemeinsamen Doppelpunkt beider Polkurven ineinander über. Gerade diese Drehbewegung ist als eine Nebenbewegung, welche nur konzentrische Kreise, sog. „Nebenkreise" erzeugt (und zwar nur von den Verzweigungsstellungen aus), immer noch mit dem Bewegungsgesetze vereinbar. Von diesen Nebenkreisen abgesehen, zeichnen bei der Cayleyschen Bewegung *alle Punkte des einen Blattes auf dem anderen rationale bizirkuläre Kurven 4. Ordnung* wie bei der obigen Koppelbewegung anderer Art, die bekanntlich auch zwei Verzweigungsstellungen hat, von welchen aus ebenfalls Nebenkreise als Punktbahnen mit zugelassen werden.

oder, was dasselbe ist, rationale ebene Kurven 3. Ordnung, welche auf der unendlich fernen Geraden neben einem reellen Punkte noch zwei bestimmte andere, nicht zusammenfallende konjugiert komplexe Punkte besitzen. Die Parametergleichungen jeder ebenen kubischen Ellipse können in der Form

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{et^2 + ft + g}{1 + t^2} \\ y &= \frac{at^3 + bt^2 + c + d}{1 + t^2} \end{aligned}\right\}$$

angesetzt werden, wobei die rechtwinkligen Punktkoordinaten $x, y$ durch einen rationalen und für reelle Punkte reellen, für imaginäre imaginären Parameter $t$ ausgedrückt erscheinen und $a, b \dots g$ reelle Konstanten sind. Der Ansatz ist derart getroffen, daß die $y$-Achse zur reellen Asymptote der Kurve parallel angenommen wird, und die Ausbreitung des Parameters auf der Kurve wurde so gewählt, daß dem unendlich fernen reellen Punkte der Wert $t = \infty$, den konjugiert komplexen, unendlich fernen Punkten aber die Werte $t = \pm i = \pm \sqrt{-1}$ entsprechen.

Soll nun eine kubische Bewegung eines starren Blattes $\mathfrak{Q}_1$ möglich sein, bei welcher nicht bloß ein Punkt dieses Blattes die kubische Ellipse $\mathfrak{K}$ mit den Gleichungen (1), sondern noch jeder beliebige andere Punkt eine andere kubische Ellipse $\mathfrak{K}'$ auf dem festen Blatte $\mathfrak{Q}$ beschreibt, so müssen sich die Koordinaten $x'$ $y'$ des auf der „Begleitkurve“ $\mathfrak{K}'$ wandernden Punktes in der Form

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{et^2 + ft + g}{1 + t^2} + \Delta x \\ y' &= \frac{at^3 + bt^2 + ct + d}{1 + t^2} + \Delta y \end{aligned}\right\}$$

darstellen lassen, wobei wir sogleich Schlüsse ziehen können, welche den Bau von $\Delta x$ und $\Delta y$ erkennen lassen:

Da $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ unendlich ferne Punkte besitzen, welche zu denselben Parameterwerten $t = \infty$ und $t = \pm i$ gehören müssen[1]), ist sowohl $\Delta x$ als $\Delta y$ in Form eines Bruches mit dem einfachen Nenner $(1 + t^2)$ anzusetzen. Da ferner $\Delta x$ und $\Delta y$ für reelle Werte von $t$, also auch für $t = \infty$, nicht unendlich werden dürfen, kann der Grad des Zählers

1) Der *reelle*, $t = \infty$ entsprechende unendlich ferne Punkt muß sogar bei beiden Kurven 3. Ord. *derselbe* sein, es besteht aber *keine* Notwendigkeit dafür, daß auch die imaginären unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ dieselben seien. Die einfachsten algebraischen Bewegungen ebener Blätter zeigen einander „begleitende“ Kurven mit verschiedenen imaginären unendlich fernen Punkten.

in $t$ bei jedem dieser beiden Brüche höchstens auf den zweiten ansteigen, so daß wir die Formen

(3) $$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{x_1 + x_2 t + x_3 t^2}{1 + t^2} \\ \Delta y = \dfrac{y_1 + y_2 t + y_3 t^2}{1 + t^2} \end{cases}$$

gewinnen, wobei zwischen den 6 Konstanten $x_1 \dots y_3$ noch gewisse Beziehungen bestehen müssen, damit auch das Quadrat der Distanz $D$ der zum selben $t$ gehörigen Punkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, nämlich

(4) $$D^2 = \overline{\Delta x^2} + \overline{\Delta y^2} = \frac{(x_1 + x_2 t + x_3 t^2)^2 + (y_1 + y_2 t + y_3 t^2)^2}{(1 + t^2)^2}$$

einen von $t$ unabhängigen konstanten Wert behalten könne. Für Bewegungen reeller Blätter kommt der Fall, daß im Zähler von $D^2$ (bei 4) alle Koeffizienten Null sind, also $D$ immer Null, $\Delta y = \pm i \Delta x$, $\begin{Bmatrix} y_1 = \pm i x_1 \\ y_2 = \pm i x_2 \\ y_3 = \pm i x_3 \end{Bmatrix}$ ist, wobei $x_1$, $x_2$, $x_3$ beliebig sein können, gar nicht in Betracht. Da $D^2$ als konstant auch für $t = \pm i$ nicht unendlich werden darf, kann sich der Zähler in (4) vom Nenner nur um einen konstanten Faktor $\mathfrak{k}$ unterscheiden, was zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2 &= \mathfrak{k} \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 &= 0 \\ 2(x_1 x_3 + y_1 y_3) + x_2^2 + y_2^2 &= 2\mathfrak{k} \\ x_2 x_3 + y_2 y_3 &= 0 \end{aligned}$$

führt.

Aus der ersten und der dritten folgt

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 = x_2^2 + y_2^2,$$

aus den beiden anderen

$$x_2 (x_1 - x_3) + y_2 (y_1 - y_3) = 0$$

und aus diesen

$$\begin{Bmatrix} x_1 - x_3 = \pm y_2 \\ y_1 - y_3 = \mp x_2 \end{Bmatrix}.$$

Die Werte $\begin{Bmatrix} x_3 = x_1 \mp y_2 \\ y_3 = y_1 \pm x_2 \end{Bmatrix}$, in $x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$ eingesetzt, liefern $0 = \mp 2 x_1 y_2 \pm 2 x_2 y_1 + x_2^2 + y_2^2$. Halten wir diese Gleichung mit $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ oder $\begin{Bmatrix} x_2 = \mu y_1 \\ y_2 = -\mu x_1 \end{Bmatrix}$ zusammen, so ergibt sich

$$\mu^2 (x_1^2 + y_1^2) \pm 2\mu (x_1^2 + y_1^2) = 0 \text{ und damit}^{1)} \ \mu = 0 \text{ oder } \mu = \mp 2.$$

1) Imaginäre Begleitkurven, entsprechend $x_1^2 + y_1^2 = 0$, interessieren uns hier nicht.

$\mu = 0$ führt zu $x_2 = y_2 = 0$, $x_3 = x_1$, $y_3 = y_1$,

$$\begin{Bmatrix} \varDelta x = x_1 & \\ & \text{konstant} \\ \varDelta y = y_1 & \end{Bmatrix},$$

also zu einer trivialen Parallelbewegung, bei welcher alle Punkte eines starren beweglichen Blattes $\Omega_1$ auf dem festen Blatte $\Omega$ kongruente und gegeneinander nur parallel verschobene Bahnen beschreiben.

$\mu = \mp 2$ führt zu der uns interessierenden *kubischen Ellipsenbewegung*, bei welcher sich ein Blatt $\Omega_1$ auch dreht, während seine Punkte kubische Ellipsen beschreiben. Es wird nämlich

$$x_2 = \mp 2 y_1, \quad y_2 = \pm 2 x_1,$$
$$x_3 = -x_1, \quad y_3 = -y_1,$$

wobei, wie auch in der Folge, die oberen bezw. unteren Vorzeichen zusammengehören. Wir haben, falls wir noch

(5) $$t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

setzen,

(6) $$\begin{Bmatrix} \varDelta x = \dfrac{x_1 \mp 2 y_1 t - x_1 t^2}{1+t^2} = x_1 \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \mp y_1 \dfrac{2t}{1+t^2} = x_1 \cos\alpha \mp y_1 \sin\alpha \\ \varDelta y = \dfrac{y_1 \pm 2 x_1 t - y_1 t^2}{1+t^2} = \pm x_1 \dfrac{2t}{1+t^2} + y_1 \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \pm x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{Bmatrix}.$$

Während also ein Punkt ($x_1 = y_1 = 0$) eines starren beweglichen Blattes $\Omega_1$ eine beliebig anzugebende kubische Ellipse $\mathfrak{K}$ (Gleichung (1)) beschreibt, kann man es durch gleichzeitige Drehung dieses Blattes um diesen Punkt, und zwar um einen gewissen, der Gleichung (5) entsprechenden Winkel $\alpha$ stets, und zwar auf *zwei* verschiedene Arten (den verschiedenen Vorzeichen in (6) entsprechend) dahin bringen, daß jeder Punkt dieses Blattes, mit den beliebig wählbaren rechtwinkligen Koordinaten $x_1$, $y_1$ (in $\Omega_1$), auf dem festen Blatte $\Omega$ ebenfalls eine kubische Ellipse zeichnet. Die Gleichungen dieser kubischen Ellipse $\mathfrak{K}'$ (bezw. einer ebensogut möglichen Begleitkurve $'\mathfrak{K}$) werden gemäß (2) und (6) lauten:

(7) $$\begin{Bmatrix} x' = \dfrac{et^2 + ft + g}{1+t^2} + x_1 \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \mp y_1 \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y' = \dfrac{at^3 + bt^2 + ct + d}{1+t^2} \pm x_1 \dfrac{2t}{1+t^2} + y_1 \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{Bmatrix}.$$

Den beiden Vorzeichen entsprechend können wir bei einer gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$, welche von einem bestimmten Punkte ($x_1 = y_1 = 0$) des Blattes $\Omega_1$ beschrieben wird, stets zwei verschiedene *kubische Ellipsenbewegungen* eines Blattes $\Omega_1$, also derartige Bewegungen an-

nehmen, daß hierbei $\mathfrak{K}$ von einem Punkte von $\mathfrak{L}_1$ beschrieben wird und alle übrigen Punkte andere gleichfalls kubische Begleitellipsen zeichnen. Die Gleichungen (7) haben wir als *Gleichungen* einer beliebigen ebenen *kubischen Ellipsenbewegung* anzusehen. Statt $\mathfrak{K}$ kann zur Bestimmung der Bewegung — bis auf die Zweideutigkeit der Drehweise — jede Begleitkurve $\mathfrak{K}'$ (bezw. $'\mathfrak{K}$) verwendet werden. Auch die Zweideutigkeit schwindet, sobald man einem Bewegungssinne auf einer dieser Kurven den entsprechenden Drehungssinn des Blattes zuweist.

Damit die Gleichungen (1) einen *kubischen Kreis* $\mathfrak{K}$ vorstellen, müssen sich für $t = \pm i$ die Zähler dieser Gleichungen wie $1 : \pm i$ verhalten, was zu den Zirkularitätsbedingungen

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} f &= \pm(b-d) \\ g - e &= \pm(c-a) \end{aligned}\right\}$$

führt. Eine der beiden kubischen Ellipsenbewegungen, welche zu jedem *kubischen Kreise* mit den Gleichungen (1) und (8) gehören, ist nun selbst eine *kubische Kreisbewegung*, indem alle Begleitkurven $\mathfrak{K}'$ (mit den Gleichungen (7)) dabei selbst *kubische Kreise* sind. Auf die Form

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{et^2 \pm (b-d)t + (e \pm [c-a])}{1+t^2} \\ y &= \frac{at^3 + bt^2 + ct + d}{1+t^2} \end{aligned}\right\}$$

können die Gleichungen jedes kubischen Kreises $\mathfrak{K}$ gebracht werden.[1]) Stellen wir hierzu die Zusatzglieder $\Delta x$, $\Delta y$ aus (6) mit der dort stehenden Folge der zweideutigen Vorzeichen, so werden auch alle Begleitkurven $\mathfrak{K}'$ mit den Gleichungen (7, 8) oder

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{et^2 \pm (b-d)t + (e \pm [c-a])}{1+t^2} + x_1 \frac{1-t^2}{1+t^2} \mp y_1 \frac{2t}{1+t^2} \\ &= \frac{(e-x_1)t^2 \pm (b-d-2y_1)t + (e \pm [c-a] + x_1)}{1+t^2} \\ y' &= \frac{at^3 + bt^2 + ct + d}{1+t^2} \pm x_1 \frac{2t}{1+t^2} + y_1 \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ &= \frac{at^3 + (b-y_1)t^2 + (c \pm 2x_1)t + (d+y_1)}{1+t^2} \end{aligned}\right\}$$

wieder *kubische Kreise*, da die Gleichungen (10) oder

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{e't^2 + f't + g'}{1+t^2} \\ y' &= \frac{at^3 + b't^2 + c't + d'}{1+t^2} \end{aligned}\right\}$$

1) Speziell für $b - d = a - c = 0$ artet $\mathfrak{K}$ in die Gerade $\left\{\begin{aligned} x &= e \\ y &= at + b \end{aligned}\right\}$ aus.

die Koeffizienten

$$\begin{cases} b' = b - y_1, & c' = c \pm 2x_1, & d' = d + y_1 \\ e' = e - x_1, & f' = \pm(b - d - 2y_1), & g' = e \pm [c - a] + x_1 \end{cases}$$

besitzen, welche wiederum die Zirkularitätsbedingungen 8′ (**analog** 8)

$$(8') \qquad \begin{cases} f' = \pm(b' - d') \\ g' - e' = \pm(c' - a) \end{cases}$$

erfüllen. Die Begleitkurven ′𝔎 der anderen Bewegung, gehörig zu den Gleichungen mit der anderen Zeichenfolge bei den Zusatzgliedern $\Delta x$, $\Delta y$:

$$(10') \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{et^2 \pm (b-d)t + (e \pm [c-a])}{1+t^2} + x_1 \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \pm y_1 \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \quad = \dfrac{(e - x_1)t^2 \pm (b - d + 2y_1)t + (e \pm [c-a] + x_1)}{1+t^2} \\ y' = \dfrac{at^3 + bt^2 + ct + d}{1+t^2} \mp x_1 \dfrac{2t}{1+t^2} + y_1 \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \quad = \dfrac{at^3 + (b - y_1)t^2 + (c \mp 2x_1)t + (d + y_1)}{1+t^2} \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} x' = \dfrac{e''t^2 + f''t + g''}{1+t^2} \\ y' = \dfrac{at^3 + b''t^2 + c''t + d''}{1+t^2} \end{cases},$$

haben Koeffizienten

$$\begin{cases} b'' = b - y_1, & c'' = c \mp 2x_1, & d'' = d + y_1 \\ e'' = e - x_1, & f'' = \pm(b - d + 2y_1), & g'' = e \pm [c - a] + x_1 \end{cases},$$

welche die Zirkularitätsbedingungen

$$(8'') \qquad \begin{cases} f'' = \pm(b'' - d'') \\ g'' - e'' = \pm(c'' - a) \end{cases}$$

nicht erfüllen, falls $x_1$ und $y_1$ von Null verschieden sind: *Zu jedem nicht ausgearteten*[1]) *ebenen kubischen Kreise 𝔎 gehört also eine einzige* (nicht triviale rationale) *kubische Kreisbewegung.* Wir können die Gleichungen (9) mit bloß den oberen Zeichen (9 +) als zu 𝔎 gehörig voraussetzen, da wir $t$ mit $(-t)$ vertauschen könnten, falls der andere durch die unteren Zeichen gegebene Fall vorläge. Bei jeder *kubischen*

1) Es kann [illegible] $\begin{cases} f'' = -(b'' - d'') \\ e'' = -(c'' - a) \end{cases}$ auch gelten, falls speziell $b - d$ [illegible] 𝔎 zu einer Geraden $\begin{cases} x = e \\ y = at + b \end{cases}$ (aus 9) ausartet.

*Kreisbewegung* können wir aus demselben Grunde in den *Bewegungsgleichungen* (10) stets nur die oberen Zeichen voraussetzen (10 +) und von diesen ausgehend Vereinfachungen vornehmen, welche die Allgemeinheit nicht beschränken.

## § 3. Die einfachste Form der Gleichungen der ebenen kubischen Kreisbewegung

erhält man, indem man unter den Begleitkurven $\mathfrak{K}'$ (Gleichung 10 +) von $\mathfrak{K}$ die einzige geradlinige heraussucht und an Stelle von $\mathfrak{K}$ setzt. Wir suchen $x_1$ und $y_1$ so, daß

$$x' = e' + \frac{(g' - e') + f't}{1 + t^2} = (e - x_1) + \frac{(c - a + 2x_1) + (b - d - 2y_1)t}{1 + t^2}$$

konstant wird, was nur für

$$\begin{Bmatrix} x_1 = \frac{a - c}{2} \text{ (wegen } 8 +) = \frac{e - g}{2} \\ y_1 = \frac{b - d}{2} \qquad\qquad\qquad = \frac{f}{2} \end{Bmatrix}$$

möglich ist und gewinnen

$$y' = at + \frac{b + d}{2}.$$

Die ursprünglich durch $\mathfrak{K}$ (Gleichung 9 +) definierte kubische Kreisbewegung des Blattes $\Omega_1$ kann nun ebenso, aber bequemer beschrieben werden, wenn man statt $\mathfrak{K}$ die durch

$$\begin{Bmatrix} x' = e - x_1 = \frac{e + g}{2} = e - \frac{a - c}{2} \\ y' = at + \frac{b + d}{2} \end{Bmatrix}$$

bestimmte Gerade wählt. Wenn das Koordinatensystem auf dem festen Blatte $\Omega$ gemäß den Transformationsgleichungen

$$\begin{Bmatrix} x' - e + \frac{a - c}{2} = x \\ y' - \frac{b + d}{2} = y \end{Bmatrix} {}^{1)}$$

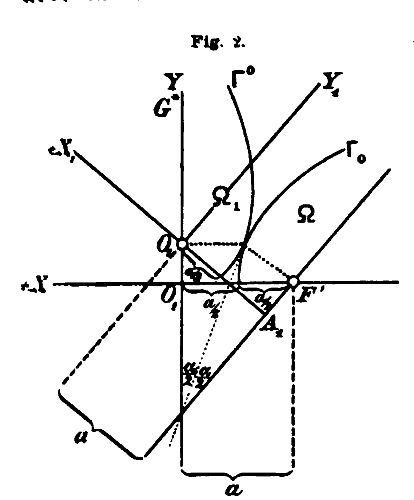
1) Wir können unbesorgt wieder diese Zeichen $x$, $y$ wählen, da eine Verwechselung mit dem ursprünglichen Koordinatensystem in $\Omega$, auf welches sich die Gleichung (1) bezogen und gegen welches das jetzige verschoben liegt, nicht zu befürchten steht.

verschoben wird, haben wir daher als die *einfachste Form der in t rationalen Gleichungen der kubischen Kreisbewegung eines reellen* (starren ebenen) *Blattes* $\Omega_1(x_1, y_1)$ an einem festen Blatte $\Omega(x, y)$ die folgende

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \phantom{at +{}} x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \\ y &= at + x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad (t = \operatorname{tg}\alpha).$$

Die so darstellbare, in ihrer Art *einzige kubische Kreisbewegung* ist aber identisch mit unserer eben beschriebenen, bei welcher kongruente Parabeln symmetrisch aneinander abrollten und welche durch ein Paar von Blättern erzwingbar war, die je mit einer Furche und einem Stifte *symmetrisch*[1]) ineinandergriffen: Dies kann man entweder daraus erkennen, daß nicht bloß der Anfang $(x_1 = y_1 = 0)$ von $\Omega_1$ auf der $y$-Achse $(x = 0)$ von $\Omega$, sondern zugleich auch der Punkt $(x = -a, y = 0)$ von $\Omega$ auf der Geraden $(x_1 = -a)$ von $\Omega_1$ wandert[2]); oder man sucht geradewegs die Polkurven auf, d. h. die Orte der Momentanzentra in beiden Blättern, und erkennt kongruente Parabeln in symmetrischer Stellung bezüglich der gemeinsamen Tangente (Fig. 2): Die Polkurve $\frac{\Gamma_0}{\Gamma^0}$ in $\frac{\Omega}{\Omega_1}$ wird erhalten, indem man aus (11) und den durch Nullsetzung der Ableitungen

Fig. 2.




$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{d\alpha} &= \phantom{\frac{a}{2}(1+t^2) +{}} x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \;\Big|\; = y - at \\ \frac{dy}{d\alpha} &= \frac{a}{2}(1+t^2) + x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \;\Big|\; = x + \frac{a}{2}(1+t^2) \end{aligned}\right\}$$

hieraus gewonnenen Gleichungen

1) $x_1 y_1 \alpha$ eliminiert:

$$(12_1)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= at \\ x &= -\frac{a}{2}(1+t^2) \end{aligned}\right\} \quad y^2 = -2a\left(x + \frac{a}{2}\right) \quad \text{Gleichung von } \Gamma_0,$$

1) Der Stiftabstand von der Furche mußte in beiden Blättern der gleiche sein.

2) Hierbei gilt im ersteren Falle $y = at$, im letzteren $y_1 = at$.

II) $xy\alpha$ eliminiert:

$$\binom{12}{\text{II}}\quad \begin{cases} x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha = -\frac{a}{2}(1+t^2) \\ x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a}{2}(1-t^2) \\ y_1 = at \end{cases} \quad y_1^2 = 2a\left(x_1 + \frac{a}{2}\right) \quad \text{Gleichung von } \Gamma^0.$$

## § 3. Die allgemeinste kubische Kreisbewegung eines starren Körpers im Raume.

Ziehen wir vorerst eine sogenannte Direktionsbewegung heran, welche wir erhalten, indem wir einen Punkt des beweglichen starren Körpers $\Omega_1(x_1, y_1, z_1)$ in einem Punkte $O$ von $\Omega(x, y, z)$ festhalten, so daß statt der eigentlich zu untersuchenden Bewegung einstweilen eine andere — hier gewiß algebraische und zwar vom dritten oder niederen Grade im Parameter $t$ — betrachtet wird, bei welcher die verschiedenen Lagen eines um $O$ beweglichen Körpers durch bloße Parallelverschiebung aus den Lagen von $\Omega_1$ gewonnen werden können, so ergibt sich als einzig mögliche *Direktionsbewegung jeder reellen kubischen Bewegung eine Rotation.* Wären nämlich die Polhodiekegel der Direktionsbewegung, d. h. die Orte der Momentanachsen durch $O$ in beiden Körpern, welche reell sein müssen, nicht zu einem Strahle zusammengeschrumpft, so müßten schon bei den Punktbahnen der Direktionsbewegung Spitzen dort auftreten, wo die Kanten des Herpolhodiekegels zur Berührung an den Polhodiekegel heranrückten; kubisch (oder von niederem Grade) könnte die Bewegung also wegen dieser Spitzen gewiß nicht sein; zu einem Strahle zusammenschrumpfende Polhodiekegel lassen aber die Direktionsbewegung als einfache Achsendrehung erkennen.

Bei der kubischen Kreisbewegung, welche wir zu untersuchen haben, können wir daher sogleich die $z$- und $z_1$-Achse zum Polhodiestrahle der Direktionsbewegung parallel annehmen. Da nun 1) die Distanzen zweier beliebiger Punkte von $\Omega_1$ bei der Bewegung erhalten bleiben, ebenso auch 2) die Projektionslänge jeder solchen Distanz auf eine Parallele zur $z$-Achse, so muß als zweite Kathete in jedem durch 1) und 2) bestimmten rechtwinkligen Dreieck auch die Projektionslänge jeder Strecke in der $xy$-Ebene erhalten bleiben, d. h. die Bewegung der orthogonalen Projektion aller Punkte einer jeden zur $z_1(z)$-Achse senkrechten Ebene von $\Omega_1$ auf die $xy$-Ebene in $\Omega$ ist im

allgemeinsten Falle eine ebene kubische Kreisbewegung[1]) mit den Gleichungen (11).

Wir haben daher bei der kubisch-zirkulären Bewegung deren Gleichungen in der Form

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \\ y = at + x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \\ z = \frac{F(t)}{1+t^2} = \frac{\mathfrak{a}t^3 + z_1 t^2 + z_2 t + z_3}{1+t^2} \end{cases} \Bigg| \; t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \; \Bigg| \; \begin{Bmatrix} \mathfrak{a}, z_1, z_2, z_3 \text{ konstant,} \\ \text{von } x_1 \text{ und } y_1 \text{ unabhängig} \end{Bmatrix}$$

anzusetzen[2]), da wiederum der Zähler $F(t)$ bei $z$ höchstens zum dritten Grade in $t$ ansteigen darf. Hierbei ist noch zu beachten, daß für $t = \pm i$ die unendlich groß werdenden Koordinaten $x, y, z$ (wegen der Erhaltung der Kreispunkte in der $x$-$y$-Ebene) in den Verhältnissen

$$x : y : z = 1 : \pm i : 0$$

stehen müssen, daß also zu gelten hat

$$[x_1(1-i^2) \mp 2y_1 i] : [\pm ai(1+i^2) \pm 2x_1 i + y_1(1-i^2)] : [\mp \mathfrak{a} i^3 + z_1 i^2 \pm z_2 i + z_3] = 1 : \pm i : 0$$

mithin $\begin{Bmatrix} z_2 = \mathfrak{a} \\ z_3 = z_1 \end{Bmatrix}$. Wir erhalten, wenn wir noch

$$\mathfrak{a} = a\mathfrak{e}$$

setzen,

$$z = a\mathfrak{e}t + z_1.$$[3])

Wir können hiernach die *Gleichungen* der reellen (nicht trivialen) *kubischen Kreisbewegung* eines starren Körpers in der Form

$$(13) \qquad \begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \\ y = at + x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \\ z = a\mathfrak{e}t + z_1 \end{cases} \Bigg| \; t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Bigg\}$$

---

1) Von den trivialen Parallelbewegungen eines starren Körpers, welche durch einen kubischen Kreis im Raume gegeben sind, sehen wir natürlich ab; ebenso sehen wir hier ab von dem Falle, bei welchem diese ebene kubische Kreisbewegung der Projektion (auf die $xy$-Ebene) zur gewöhnlichen *Rotation* ausartet; wir werden auf die letztere Möglichkeit durch einen Grenzübergang von der allgemeinen kubischen Kreisbewegung noch zurückkommen. Gleichung (16), S. 278. Vgl. die dortige Anm. 2.

2) $z$ muß für $t = \infty$ selbst *unendlich* werden, wenn keine *ebene* kubische Kreisbewegung eintreten soll, außerdem soll $z$ nur für $1 + t^2 = 0$ zu den beiden imaginären unendlich fernen Punkten führen.

3) Auch so: Soll $z = \frac{F(t)}{1+t^2}$ auch für $1 + t^2 = 0$ endlich bleiben, so muß $F(t)$ die Form $F(t) = (1 + t^2)(\mathfrak{a}t + z_1)$ besitzen, welche zu $z = \mathfrak{a}t + z_1$ führt. $z_1$ unterscheidet sich von der dritten Koordinate in $\mathfrak{K}_1$ nur durch eine Konstante, kann daher selbst als diese Koordinate gelten, wenn der Anfang auf der Geraden $x_1 = y_1 = 0$ passend gewählt wird.

anschreiben, welche der bequemsten Einlagerung beider Koordinatensysteme, des Systems $(x, y, z)$ in dem festen Körper $\Omega$, und des anderen Systems $(x_1, y_1, z_1)$ im beweglichen starren Körper $\Omega_1$ entspricht. Beide Koordinantentrieder decken sich für $t = 0$.

Ein parabolischer Zylinder $\Gamma^0$ $\left[\text{mit der Gleichung } \binom{12}{\text{II}}\right]$ von $\Omega_1$ rollt bei jeder reellen kubischen Kreisbewegung an einem kongruenten Zylinder $\Gamma_0$ $\left[\text{mit der Gleichung } \binom{12}{\text{I}}\right]$ von $\Omega$, ohne anders als in der Richtung der Zylinderkanten zu gleiten, symmetrisch ab, also so, daß die reelle und im Endlichen gelegene Fokalachse jedes der beiden Zylinder sich (parallel zu ihrer Ausgangslage) in der Direktrixebene (Polarebene der Fokalachse) des anderen Zylinders verschiebt; das Gleiten in der Kantenrichtung geschieht in dem Maße, daß alle Punkte der Fokalachse in der vorgeschriebenen Ebene parallele Gerade zeichnen, z. B.: der Anfang $O_1(x_1 = y_1 = z_1 = 0)$ von $\Omega_1$ die Gerade $G^*$ mit den Gleichungen

$$(G^*) \qquad \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = at \\ z = a\mathfrak{e}t \end{array}\right\}$$

in der Direktionsebene $x = 0$ von $\Gamma_0$. In der Fig. 2 fällt die orthogonale Projektion $G^{*\prime}$ von $G^*$ auf die Ebene $z = 0$ mit der $y$-Achse von $\Omega$ zusammen. $F(x = -a, \ y = 0)$ ist die Fokalachse von $\Gamma_0$. $G^*$ schließt mit der $x$-$y$-Ebene einen Winkel $\varphi$ ein, dessen

$$(14) \qquad \operatorname{tg} \varphi = \mathfrak{e}$$

ist. $\varphi$ ist der Winkel aller der untereinander parallelen Asymptoten der kubischen Bahnkreise unserer Bewegung mit ihren gemeinsamen Kreispunktsebenen $z =$ konstant. Er soll der „charakteristische Winkel“, und seine Tangente $\mathfrak{e}$ die „Neigung“ jedes der Kreise, und damit der kubischen Bewegung selbst genannt werden. $a$ ist der Abstand jeder der beiden Fokalachsen der Zylinder $\Gamma_0$, $\Gamma^0$ von ihrer Direktionsebene. Durch die Projektionsbewegung (mit der Konstanten $a$, Figur 2) auf die Kreispunktsebene $z = 0$ und durch die Neigung $\mathfrak{e}$ ist jede kubische Kreisbewegung gekennzeichnet: Durch *einen jeden* als Bahnkurve eines Punktes gegebenen (nicht zu einer Geraden ausgearteten) *kubischen Kreis ist eine kubische Kreisbewegung* $(a, \mathfrak{e})$ im Raume *bestimmt.* Die inverse Bewegung ist geometrisch nicht wesentlich anders gekennzeichnet und gehört zum selben $a$ und zur — absolut genommen — gleichen Neigung $(-\mathfrak{e})$.

Wird $\varphi = 90^\circ$, die Neigung $\mathfrak{e} = \operatorname{tg}\varphi = \infty$

und dabei $a = 0$ und zwar so, daß

(15) $a\mathfrak{e} = k$

endlich und konstant bleibt, so erhalten wir den Grenzfall der *aufrechten kubischen Kreisbewegung* mit den Gleichungen

$$
(16) \qquad \left\{\begin{array}{l|c} x = \quad x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha & \\ y = \quad x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha & \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t \\ z = kt + z_1 & \end{array}\right\},
$$

bei welcher sich die $z_1$-Achse auf der $z$-Achse, also „in sich" verschiebt und die Bahnlinien aller Punkte *aufrechte* kubische Kreise beschreiben, also Kurven dritter Ordnung auf Umdrehungszylindern um die $z$-Achse, welche durch Aufrollen des zwischen zwei benachbarten Asymptoten gelegenen Teiles einer (sog. verallgemeinerten, ebenen, transzendenten) Tangenslinie $\mathfrak{H}$ auf einen Zylinder gewonnen werden können, wenn hierbei die Asymptoten zur Überdeckung gelangen.[1])

Wiederum ist auch durch jeden *aufrechten* kubischen Kreis eine, und zwar wieder eine *aufrechte* kubische Kreisbewegung bestimmt.[2])

Wir wollen nun diese interessanten kubischen Kreisbewegungen starrer Körper durch einfache Mechanismen erzwingen.

## § 5. Ein Zirkel zur Erzeugung kubischer Kreise.

Wir geben dem festen Körper $\Omega$ die Form eines rechteckigen Rahmens mit zwei in ihm feststeckenden windschiefen Drahtstiften $F$ und $G^*$, deren kürzester Abstand $a$ sei. Der Winkel von $F$ und $G^*$ [illegible] $\varphi$. Die kürzeste Transversale über $F$ und $G^*$ machen wir [illegible] Achse des in $\Omega$ festgelagerten rechtwinkeligen Koordinaten[illegible] den Schnittpunkt $O$ der $x$-Achse mit $G^*$ zum Anfange und [illegible] Achse durch $O$ parallel zu $F$. Hierdurch ist die $y$-Achse [illegible]; sie schließt mit $G^*$ den Winkel $\varphi$ ein.

[1]) [illegible] Abhandlung des Verfassers, welche auf S. 264 erwähnt wurde [illegible]

[2]) [illegible] andere rationale kubische Bewegung *neben* der durch die [illegible], welche in der $xy$-Ebene eine *Rotation* zur Projektions[illegible] beiden Gleichungen von (16)), da sich $z = kt + z_1$ [illegible] durch genau dieselbe Schlußweise wie oben (vor [illegible]

Wir nehmen nun einen Hilfskörper $\Omega_0$ und geben ihm die Form eines Prismas, welches den Drahtstift $F$ derart umschließt, daß er sich sowohl um $F$ drehen als auch in der Richtung von $F$ verschieben kann.

In $\Omega_0$ betten wir den starren Körper $\Omega_1$, welcher gleichfalls Prismenform hat, in einem kongruentprismatischen Lager mit etwa zu $F$ senkrechten Führungskanten ein, so daß er sich gegen $\Omega_0$ in der Richtung dieser Kanten verschieben kann und machen an $\Omega_1$ einen Nagel mit Öse derart fest, daß der kürzeste Abstand des Ösenmittelpunktes $O_1$ von $F$ wiederum $a$ ist. In der *Figur* 3 ist dem Hilfskörper $\Omega_0$ jene Lage gegeben, bei welcher $O_1$ auf $O$ fällt; ($t = 0$, $\alpha = 0$); die Öse, deren in die $yz$-Ebene fallenden Querschnitt wir in der *Figur* 4 vergrößert zeigen, umschließt doppelkonisch den Stift $G^*$, so daß sich $G^*$ stets entlang einer (im Verlaufe der späteren Bewegung wechselnden) Konuskante an den inneren Ösenrand lehnt. $G^*$ sorgt nun dafür, daß der Ösenmittelpunkt $O_1$ stets auf der idealen $G^*$-Achse geradegeführt wird. In der in der Figur 3 gezeichneten Ausgangsstellung wählen wir im beweglichen starren Körper $\Omega_1$ das Koordinatensystem ($x_1$, $y_1$, $z_1$) so, daß es hier mit dem Systeme ($x$, $y$, $z$) zusammenfällt; dann stellen die Gleichungen (13) die kubische Kreisbewegung dar, welche unser Apparat dem beweglichen Körper $\Omega_1$ gestattet.

Fig. 3.

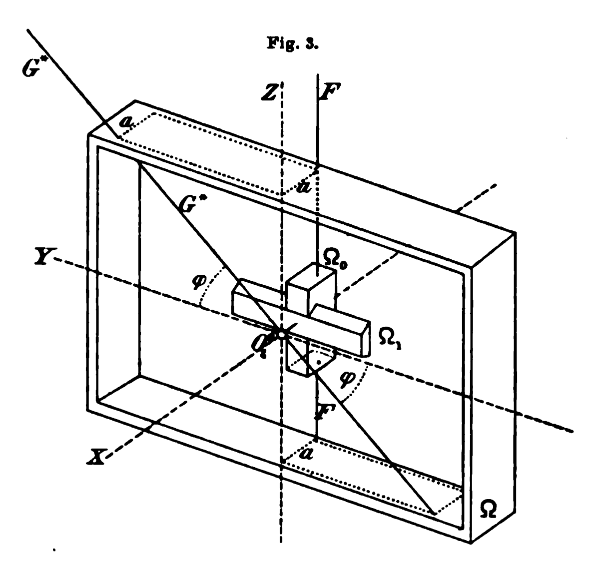
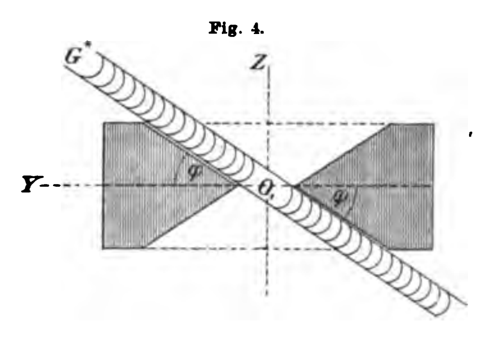



Fig. 4.




Die gezeichnete Ausgangsstellung hat einen bemerkenswerten Charakter als sog. „*Verzweigungsstellung*“, indem von ihr aus und *nur* von ihr dem Körper $\Omega_1$ außer der durch die Gleichungen (13) beschriebenen, zu $a$ und $\varphi$ gehörigen kubischen Kreisbewegung noch eine

ganz triviale geradlinige Parallelverschiebung in der Richtung von $G^*$ mit den Bewegungsgleichungen

$$(17) \qquad \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + \mathfrak{t} \\ z = z_1 + \mathfrak{e}\mathfrak{t} \end{cases} \left| \begin{matrix} \mathfrak{t} \text{ beliebig wählbarer} \\ \text{Parameter} \\ \mathfrak{e} = \operatorname{tg}\varphi \text{ (Gl. 14)} \end{matrix} \right\}$$

gestattet wird.[1]) Bei der letzteren gleitet $\Omega_1$ an $\Omega_0$ in der Richtung der $y$-Achse *und zugleich* im $\mathfrak{e}$-fachen Maße zusammen mit $\Omega_0$ in der Richtung der $z$-Achse, indem nur die Translation von $\Omega_0$ in der Richtung von $F$, nicht aber eine Drehung um $F$ in Anspruch genommen wird, so daß nicht nur der Anfang $O_1$ die Gerade $G^*$ beschreibt, sondern alle übrigen Punkte von $\Omega_1$ parallele geradlinige Bahnen.

Daran, daß von unserer Ausgangsstellung der Figur 3 aus abgesehen von der vorigen *nur* die durch die Gleichungen (13) beschriebene *kubische Kreisbewegung* wirklich von $\Omega_1$ beschrieben wird, wenn wir $\Omega$ festhalten und für geeignete Bewegungsantriebe sorgen, kann kein Zweifel aufkommen, wenn man die Projektionsbewegung in der $xy$-Ebene ins Auge faßt, welche mit der oben zur Figur 2 gehörigen identisch ist. Die $z_1$-Achse bleibt parallel zur $z$-Achse, $O_1$ wandert auf $G^*$; da ferner auch die Ebene

$$x_1 = -a$$

von $\Omega_1$ stets durch die Gerade $F(x = -a,\ y = 0)$ von $\Omega$ hindurchgelegt bleibt, ist die erwähnte Projektionsbewegung wirklich die durch die Gleichungen (11) definierte und die Gleichungen (13) geben die vollkommen zutreffende Beschreibung der Bewegungsmöglichkeit von $\Omega_1$ im Raume.

Von der Ausgangsstellung ($t = 0$) aus tritt die kubische Kreisbewegung ein, indem $\Omega_1$ zuerst jener Elementarschraubung unterworfen wird, welche die Scheitelkante $\left(x = -\frac{a}{2},\ y = 0\right)$ des festen Paraboloides $\Gamma_0$ $\left(\text{Gleichung } \binom{12}{\text{I}}\right)$ zur Zentralachse und $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\varphi$ zum Schraubenparameter hat. Die späteren, zu beliebigem $t$ gehörigen Instantanschraubungen der Bewegung geschehen um die Achsen $\left\{\begin{matrix} y = at \\ x = -\frac{a}{2}(1+t^2) \end{matrix}\right\}$,

1) Derartige „Verzweigungsstellungen" sind bei kinematischen Apparaten sehr häufig. Sie treten z. B. schon bei den ebenen symmetrischen Gelenkvierecken und zwar dort auf, wo die vier gelenkigen Punkte in eine Gerade treten. Dort erscheinen dann als Bahnkurven von diesen Stellungen aus neben den Kegelschnittsfußpunktkurven noch gewisse „Nebenkreise". Vgl. auch S. 266 und die Anm. 1 auf S. 267.

welche Kanten von $\Gamma_0$ sind; der ihnen zukommende Schraubenparameter ist $\frac{a}{2}(1+t^2)\operatorname{tg}\varphi$. Trägt man auf jeder Kante von $\Gamma_0$ den ihr zukommenden Schraubenparameter von der Ebene $z=0$ aus ab, so erfüllen die Endpunkte der so abgetragenen Parameter die Ebene

$$z + ex = 0. \qquad (e = \operatorname{tg}\varphi, \text{ Gleichung (14).)}$$

Der Hilfskörper $\Omega_0$ beschreibt während der schiefen kubischen Kreisbewegung von $\Omega_1$ seinerseits eine *aufrechte* kubische Kreisbewegung um $F$, deren Gleichungen die Form (16) erhalten, wenn wir $F$ zur $z$-Achse machen und die Koordinatentrieder für $t=0$ zusammenfallend annehmen, da von der Ausgangslage aus die Erhebung im Sinne der $z$-Achse ($F$) das $k$-fache der Tangente des halben Drehungswinkels um $F$ herum ausmacht.

Es wurde schon erwähnt, daß die Augangsstellung ($t=0$) auch für $\Omega_0$ eine Verzweigungsstellung ist, indem von ihr aus neben der *aufrechten* kubischen Kreisbewegung noch eine triviale einfache Parallelverschiebung in der Richtung von $F$ möglich ist.

Unser Zirkel für kubische Kreise — Figur 3 — gestattet es also gleichzeitig, eine schiefe und eine aufrechte kubische Kreisbewegung vorzuführen. Stecken wir etwa eine Nadel mit glänzendem Knopfe in $\Omega_1$ fest und bringen diesen Körper in seine höchste durch die schiefe Kreisbewegung gestattete Lage, so können wir ihn dann dem eigenen Gewichte folgend hinunterfallen lassen und erhalten von dem glänzenden Knopfe die rasch aufeinanderfolgenden Netzhauteindrücke aus einem recht beträchtlichen Stücke der von ihm beschriebenen kubischen Kreisbahn. Wollen wir ebenso einen *aufrechten* kubischen Kreis demonstrieren, so ist die Nadel mit dem glänzenden Knopfe einfach an $\Omega_0$ statt an $\Omega_1$ anzustecken, und dann das vorige Spiel zu wiederholen. Allerdings ist für den glatten Verlauf der Bewegung eine sehr geringe Reibung an den gleitenden Flächen die Voraussetzung. Es hätte keine Schwierigkeit, den Apparat auch für verschiedene Winkel $\varphi$ und verschiedene $a$-Werte einstellbar zu gestalten.

## § 6. Bemerkungen bezüglich der Punktbahnen bei der schiefen kubischen Kreisbewegung im Raume.

Die Tangentenfläche jedes kubischen Kreises wird von jeder Kreispunktsebene desselben ($z=$ konst.) in einer *Kardioide* geschnitten, da diese Schnittlinie von der vierten Ordnung und dritter Klasse ist und in den drei Spurpunkten des kubischen Kreises in dieser Ebene, hierunter also auch in deren Kreispunkten Spitzen besitzt. Jede Projektion eines

kubischen Kreises auf irgend eine der durch seine Kreispunkte gelegten Ebenen ($z$ = konst.) und zwar jede Zentral- oder Parallelprojektion ist ein ebener kubischer Kreis, d. h. eine Parabelfußpunktkurve, da sie kubisch, rational und zirkulär wird; sie wird nur dann ein gewöhnlicher Kreis, wenn das Projektionszentrum auf der Kurve angenommen wird und artet nicht aus, solange dieses Zentrum nicht geradezu in der betreffenden Ebene ($z$ = konst.) selbst angenommen wird. Insbesondere wird bei einer Parallelprojektion auf eine solche Ebene eine — im allgemeinen schiefe — *Cissoide*[1]) erhalten, falls die Strahlenrichtung zu einer Tangente des kubischen Kreises parallel angenommen wird.

Die Orthogonalprojektionen auf diese Ebene, etwa auf ($z = 0$), sind Fußpunktkurven bezüglich einer doppelt so großen Parabel $\Gamma$ als es $\Gamma_0$ $\left(\text{Gleichung } \binom{12}{\text{I}}\right)$ ist, wie man sofort an der ebenen Projektionsbewegung in dieser Ebene erkennt, bei welcher die Projektion des ins Auge gefaßten Punktes $(x_1, y_1, z_1)$ als von der Parabel $\Gamma^0$ $\left(\text{Gleichung } \binom{12}{\text{II}}\right)$ mitgenommen betrachtet werden kann, wenn letztere gleitlos an $\Gamma_0$ abrollt. Figur 2. [Der Pol, bezüglich dessen die Fußpunktkurvenbildung bezüglich $\Gamma$ erfolgt, hat die Koordinaten $(-x_1, +y_1;\ z_1$ ist gleichgültig, etwa $= 0)$, und $\Gamma$ ist perspektiv ähnlich zu $\Gamma_0$ bei diesem Pole als Ähnlichkeitszentrum und dem Modulus 2.]

Diese Orthogonalprojektion ist beispielsweise im besonderen Falle

I. eine schiefe *Cissoide*, wenn der der schiefen kubischen Kreisbewegung (Gleichung (13)) unterworfene Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ von $\mathfrak{K}_1$ auf der parabolischen Zylinderfläche $\Gamma^0$ $\left(\text{Gleichung} \binom{12}{\text{II}}\right)$ selbst liegt, insbesondere

   eine gerade oder gewöhnliche *Cissoide* des *Diokles*, wenn er auf der Scheitelerzeugenden $\left(x_1 = -\frac{a}{2},\ y_1 = 0\right)$ von $\Gamma^0$ liegend genommen wird.

II. eine *Sluse*sche *Konchoide*[2]), wenn $P_1$ in der Symmetrieebene $y_1 = 0$ von $\Gamma^0$ gewählt wird. Letztere artet im besonderen aus zur $y$-Achse [und dem Minimalgeradenpaar der $xy$-Ebene durch $F'(x = a, y = 0)$], wenn sich $P_1$ auf der $z_1$-Achse selbst, der Fokalachse von $\Gamma^0$ befindet, also wenn $x_1 = y_1 = 0$ ist, wie z. B. beim Anfange $O_1$, der auf $G^*$ wandert, wobei sich $G^*$ auf die $y$-Achse projiziert.

1) Vgl. Gino Loria, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1902 S. 45 und Fig. 3 der Tafel I.

2) Vgl. Gino Loria, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1902 S. 73, 71 und Fig. 11 der Tafel II.

III. eine *Ophiuride*[1]), wenn $P_1$ in der Scheiteltangentialebene $\left(x_1 = -\frac{a}{2}\right)$ von $\Gamma^0$ genommen wird; die obige *Cissoide* des *Diokles* kann auch als Sonderfall der *Ophiuride* wie auch der *Slus*eschen Konchoide angesehen werden.

IV. eine schiefe *Strophoide*[2]), wenn $P_1$ in der Direktrixebene ($x_1 = -a$) von $\Gamma^0$ gewählt wird und insbesondere

eine *gerade Strophoide*, wenn $P_1$ auf der Schnittlinie dieser Direktrixebene mit der Symmetrieebene ($y_1 = 0$) von $\Gamma^0$ genommen wird. Die gerade Strophoide kann auch als eine besondere Sluse-sche Konchoide angesehen werden.

In Ermangelung einer anderen Namengebung könnte man die speziellen schiefen kubischen Kreise, deren Orthogonalprojektion auf die Kreispunktsebenen ($z =$ konst.) eine

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Cissoide}\\ \textit{Slus}\text{esche } \textit{Konchoide}\\ \textit{Ophiuride}\\ \textit{Strophoide}\end{array}\right\} \text{ ist, als } \textit{räumliche} \left\{\begin{array}{l}\textit{Cissoide}\\ \textit{Slus}\text{esche } K.\\ \textit{Ophiuride}\\ \textit{Strophoide}\end{array}\right\} \text{ bezeichnen.}$$

Jede dieser räumlichen Kurvengestalten ist durch die als ihre Orthogonalprojektion zugehörige ebene Kurve und den charakteristischen Winkel $\varphi$ (oder die Neigung $e = \operatorname{tg}\varphi$) bestimmt.

Die räumlichen *Strophoiden*, die Bahnkurven der zu $x_1 = -a$ gehörigen Punkte von $\Omega_1$ sind bei der kubischen Kreisbewegung (Gleichung 13) dadurch besonders ausgezeichnet, daß sie auf *Umdrehungskegeln* liegen, deren Kanten die Fokalachse $F$ des festen parabolischen Zylinders $\Gamma_0$ $\left(\text{Gleichung } \binom{12}{\text{I}}\right)$ unter dem Winkel $\varphi$ schneiden.

Es genügt, die Punkte der Geraden $\Delta^*$

$$(18) \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = -a \\ z_1 + e y_1 = 0 \end{array}\right\}$$

bei der Bewegung zu verfolgen, insbesondere den Punkt $A_1$ ($x_1 = -a$, $y_1 = z_1 = 0$), zu betrachten, welcher die *räumliche gerade Strophoide* (aus Gleichung (13))

$$(19) \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -a\cos\alpha \\ y = a(t - \sin\alpha) \\ z = aet \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} \left(t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) \\ (e = \operatorname{tg}\varphi) \end{array}\right\}$$

1) G. Loria, l. c. S. 49, Fig. 5 der Tafel I.

2) G. Loria, l. c. S. 61, Fig. 7 (schiefe Strophoide), „ 8 (gerade „ ) der Tafel I.

zeichnet. Diese liegt wirklich auf dem Umdrehungskegel

$$(20) \qquad z^2 = e^2([x + a]^2 + y^2)$$

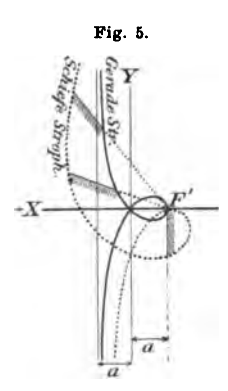
mit der Spitze $F'(x = -a, y = z = 0)$, wie die direkte Substitution von (19) in (20) lehrt. Statt sich ebenfalls durch eine Substitution davon zu überzeugen, daß auch jeder andere Punkt von $\Delta^*$ auf demselben Kegel (Gleichung (20)) bleibt, genügt es, sich daran zu erinnern, daß die durch $\Delta_1$ parallel zu $z_1$ gelegte Ebene $(x_1 = -a)$ sich unter Erhaltung des unendlich fernen Punktes der $z_1$-Achse um $F(x = -a, y = 0)$ bewegt, so daß $\Delta^*$ der Reihe nach alle Kantenlagen dieses Kegels annehmen muß.

Die Parallelen $\Delta$ zu $\Delta^*$ in der Ebene $(x_1 = -a)$ beschreiben ebensolche, nur gegen den vorigen parallel verschobene Umdrehungskegel um die $z$-Achse, wobei ihre Punkte räumliche Strophoiden zeichnen, wie denn überhaupt Punkte einer jeden Parallelen zur $z_1$-Achse kongruente und nur in der Richtung dieser Achse verschobene Bahnen besitzen.

$\Delta^*$ spielt bei der inversen Bewegung genau dieselbe Rolle wie $G^*$ bei der direkten.

Aus der Bewegung von $\Delta^*$ folgt ganz nebenbei, daß alle unter IV betrachteten ebenen schiefen Strophoiden *Konchoiden* der zu $A_1$ als Orthogonalprojektion der Bahnlinie gehörigen, ebenen geraden Strophoide sind, woraus der Satz folgt (Fig. 5):

Fig. 5.




„Alle Konchoiden einer geraden Strophoide bezüglich ihres Scheitels als Pol sind schiefe Strophoiden mit derselben Asymptote.“

Ist einmal erkannt, daß alle Parallelen $\Delta$ zu $\Delta_1$, welche in der Direktrixebene $(x_1 = -a)$ liegen, Umdrehungskegel um $F$ beschreiben, so ist auch klar, daß alle Geraden von der Richtung der $\Delta$ im Raume *Umdrehungshyperboloide* um dieselbe Achse erzeugen:

Jeder schiefe *kubische Kreis* liegt auf einem *Umdrehungshyperboloide*, welches nur bei einer *räumlichen Strophoide* zum Umdrehungs*kegel* ausartet. Die Gleichung des Umdrehungshyperboloides, auf welchem der beliebig in $\Omega_1$ anzunehmende Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ bleibt, während er die kubische Kreisbewegung mitmacht, lautet in laufenden Punktkoordinaten $x, y, z$:

$$(21) \qquad e^2[(x + a)^2 + y^2] - [z - z_1 - e y_1]^2 = e^2(x_1 + a)^2.$$

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit dieser Behauptung, indem man die aus (13) zu entnehmenden Werte von $x$, $y$, $z$ in die Gleichung (21) einsetzt.

Bei der *aufrechten* kubischen Kreisbewegung (S. 278) werden diese Umdrehungshyperboloide gemäß $a = 0$, $\mathfrak{e} = \infty$ zu gleichachsigen Umdrehungszylindern

$$x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

Bei der allgemeinen kubischen Kreisbewegung (Gleichung (13)) beschreiben alle zu den $\Delta(\Delta^*$, Gleichung (18)) parallelen Geraden des Körpers $\mathfrak{K}_1$ ähnliche Umdrehungshyperboloide (Gleichung (21)) um die Achse $F(x = -a,\ y = 0)$. Man erkennt den allgemeinen Satz, von welchem der über gewisse Konchoiden der geraden Strophoiden (Fig. 5) angeführte ein ganz besonderer Fall war:

I. „Legt man durch einen kubischen Kreis $\Phi^3$ das Umdrehungshyperboloid und verschiebt alle Punkte desselben auf den von $\Phi^3$ einfach punktierten Hyperboloiderzeugenden *um gleiche Stücke*, so gelangen sie auf einen anderen *schiefen kubischen Kreis* desselben Hyperboloides."

Ferner ergibt sich:

II. „Verschiebt man alle von einem kubischen Kreise $\Phi^3$ einfach punktierte Kanten eines Umdrehungshyperboloides parallel zu ihrer ursprünglichen Lage entlang ihrer kürzesten Transversalen mit der Drehachse $F$ des Hyperboloides *um gleiche Stücke*, so wird aus jedem kubischen Kreise $\Phi^3$ des Hyperboloides wieder ein *schiefer kubischer* Kreis des anderen, durch diese Transformation gewonnenen gleichachsigen Hyperboloides."

Die Spezialisierung bezüglich der aufrechten kubischen Kreise ist zu naheliegend, als daß sie eigens besprochen werden müßte.

Durch die Transformation I und II kann man aus jedem schiefen kubischen Kreise, z. B. der auf einem Umdrehungskegel gelegenen *räumlichen* geraden *Strophoide* alle $\infty^2$ zur selben kubischen Kreisbewegung gehörigen Begleitkurven *verschiedener* Gestalt erzeugen Fügt man noch (III) eine Parallelbewegung in der $z$-Richtung hinzu, so kann man durch (I, II, III) alle $\infty^3$ Bahnkurven der kubischen Kreisbewegung aus einer von ihnen gewinnen.

Anmerkung. Der Grenzübergang zur Neigung $\mathfrak{e} = 0$ oder der Blick auf die Projektionskurven der eben besprochenen Raumkurven in der $xz$-Ebene zeigt die Modifikation, welche bei der ebenen kubischen Kreisbewegung eintritt, wo Kreise um $F'$ (Figur 2) an Stelle der Rotationshyperboloide treten, und lehrt die Transformationen I und II, welche von jedem ebenen kubischen Kreise (Parabelfußpunktskurve) zu seinen Begleitkurven bei der (durch ihn bestimmten ebenen) kubischen Kreisbewegung führen.

## § 7. Die Gleichungen der kubischen Kreisbewegung in homogenen Plückerschen Ebenenkoordinaten und deren geometrische Deutung. Die kubische Helix und speziell die Orthogenide.

Die homogenen Plückerschen Ebenenkoordinaten, welche beim Körper $\begin{smallmatrix}\Omega\\ \Omega_1\end{smallmatrix}$ zum Koordinatensystem $\begin{smallmatrix}x,\,y,\,z\\ x_1,\,y_1,\,z_1\end{smallmatrix}$ gehören, nennen wir $\begin{smallmatrix}u,\,v,\,w,\,\varpi\\ u_1,\,v_1,\,w_1,\,\varpi_1\end{smallmatrix}$, und erhalten aus (13) oder den durch Umkehrung von (13) gewonnenen Gleichungen

$$(13^*)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \quad x\cos\alpha + y\sin\alpha - a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\\ y_1 &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha - a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\\ z_1 &= \quad z \qquad\qquad\quad - a\varepsilon\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\end{aligned}\right\}$$

gemäß den Bedingungen

$$\left\{\begin{aligned} u_1x_1 + v_1y_1 + w_1z_1 + \varpi_1 &= 0\\ u\,x + v\,y + w\,z + \varpi &= 0\end{aligned}\right\}$$

für die vereinigte Lage einer Ebene $\begin{smallmatrix}u_1v_1w_1\varpi_1\\ uvw\varpi\end{smallmatrix}$ mit einem Punkte $\begin{smallmatrix}x_1y_1z_1\\ xyz\end{smallmatrix}$ zur Gleichung

$$(u_1\cos\alpha - v_1\sin\alpha)x + (u_1\sin\alpha + v_1\cos\alpha)y + w_1z$$
$$+\left(\varpi_1 - au_1\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\alpha - av_1\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha - a\varepsilon w_1\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

und damit zu den Bewegungsgleichungen in Ebenenkoordinaten

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} u &= u_1\cos\alpha - v_1\sin\alpha\\ v &= u_1\sin\alpha + v_1\cos\alpha\\ w &= w_1\\ \varpi &= \varpi_1 - au_1(1-\cos\alpha) - av_1\sin\alpha + a(v_1 - \varepsilon w_1)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\end{aligned}\right\},$$

welche jeden Aufschluß geben über die Bewegung einer beliebigen Ebene $E_1(u_1v_1w_1\varpi_1)$ des beweglichen starren Körpers $\Omega_1$ gegen den festen Körper $\Omega$.

Die einfache dritte Gleichung unter (22) bestätigt nur die uns schon bekannte Tatsache, das $E_1$ stets die gleiche Neigung gegen die $xy$-Ebene behält, so daß sie eine *Developpable gleichen Abhanges* über einer Basiskurve $\mathfrak{H}$ dieser Ebene beschreibt. Die von $E_1$ bei der Bewegung oskulierte Kurve $\mathfrak{O}$ ist daher sicherlich eine Helix. Differentiieren wir die Gleichungen (22) nach $\alpha$, so erhalten wir — in den Koordinaten $(u', v', w', \varpi')$ einer zu $E_1$ (wie zur $xy$-Ebene) stets senkrechten und durch den Schnitt von $E_1$ mit ihrer Nachbarlage gehenden Ebene $E_1'$ — die Gleichungen

$$(22')\quad \begin{cases} u' = -u_1 \sin\alpha - v_1 \cos\alpha \\ v' = \phantom{-}u_1 \cos\alpha - v_1 \sin\alpha \\ w' = 0 \\ \varpi' = -a u_1 \sin\alpha - a v_1 \cos\alpha + a(v_1 - e w_1)\dfrac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

*der Evolute* $\mathfrak{O}'$ von $\mathfrak{H}$. (22′) geben nämlich stets die Koordinaten $(u' \ldots)$ einer Ebene $E_1'$, welche durch einen auf $\mathfrak{H}$ wandernden Punkt geht und zur Tangente an $\mathfrak{H}$ in diesem Punkte senkrecht steht.

Differentiieren wir (22′) abermals nach $\alpha$, so erhalten wir die Koordinaten $(u'', v'', w'', \varpi'')$ einer Ebene $E_1''$, welche normal zu $E_1'$ durch die (zur $xy$-Ebene senkrechte) Schnittlinie von $E_1'$ mit ihrer Nachbarlage geht:

$$(22'')\quad \begin{cases} u'' = -u_1 \cos\alpha + v_1 \sin\alpha \\ v'' = -u_1 \sin\alpha - v_1 \cos\alpha \\ w'' = 0 \\ \varpi'' = -a u_1 \cos\alpha + a v_1 \sin\alpha + \dfrac{a}{2}(v_1 - e w_1)\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^3\frac{\alpha}{2}} \end{cases}.$$

Der Schnittpunkt $(\xi, \eta, \zeta)$[1]) der Ebene $E_1, E_1', E_1''$ mit den Gleichungen (22), (22′), (22″) wandert bei Änderung des Parameters $\alpha$ auf der *Gratlinie* $\mathfrak{O}$ der von $E_1$ eingehüllten Developpablen. Die Gleichungen der letzteren — also den obigen Ausführungen gemäß einer von allen Lagen von $E_1$ oskulierten *Helix* oder „Linie gleicher Steigung" auf dem senkrecht zur $xy$-Ebene sich über $\mathfrak{O}'$ erhebenden Zylinder — ergeben sich aus (22), (22′), (22″) als

$$|\xi, \eta, \zeta, 1| = \begin{vmatrix} u, & v, & w, & \varpi \\ u', & v', & w', & \varpi' \\ u'', & v'', & w'', & \varpi'' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (u_1\cos\alpha - v_1\sin\alpha), & (u_1\sin\alpha + v_1\cos\alpha), & w_1, & \left(\varpi_1 - a u_1 + p[u_1\cos\alpha - v_1\sin\alpha] + a[v_1 - e w_1]\operatorname{tg}\frac{a}{2}\right) \\ (-u_1\sin\alpha - v_1\cos\alpha), & (u_1\cos\alpha - v_1\sin\alpha), & 0, & \left(-a[u_1\sin\alpha + v_1\cos\alpha] + a[v_1 - e w_1]\dfrac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right) \\ (-u_1\cos\alpha + v_1\sin\alpha), & (-u_1\sin\alpha - v_1\cos\alpha), & 0, & \left(-a[u_1\cos\alpha - v_1\sin\alpha] + \dfrac{a}{2}[v_1 - e w_1]\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right) \end{vmatrix}$$

---

1) Diese rechtwinkeligen Punktkoordinaten beziehen sich auf das in $\Omega$ eingelagerte System $x, y, z$; die letzteren Zeichen haben wir aber schon, als zu den laufenden Koordinaten der Punktbahnen bei der kubischen Kreisbewegung gehörig, oben verwendet und möchten kein Mißverständnis aufkommen lassen.

oder in homogenen Hesseschen Koordinaten $[\xi = \frac{\xi_1}{\xi_4},\ \eta = \frac{\xi_2}{\xi_4},\ \zeta = \frac{\xi_3}{\xi_4}]$ als

$$|\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4 =$$

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & w_1, & \left(\bar{\omega}_1 - a u_1 + \frac{a}{2}[v_1 - e w_1] \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left\{2 + \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right\}\right) \\ -(u_1 \sin\alpha + v_1 \cos\alpha), & (u_1\cos\alpha - v_1 \sin\alpha), & 0, & \left(-a[u_1 \sin\alpha + v_1\cos\alpha] + \frac{a}{2}[v_1 - e w_1]\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right) \\ -(u_1\cos\alpha - v_1\sin\alpha), & (-u_1\sin\alpha + v_1\cos\alpha), & 0, & \left(-a[u_1\cos\alpha - v_1\sin\alpha] + \frac{a}{2}[v_1 - e w_1]\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right) \end{vmatrix}$$

Die wirkliche Entwicklung liefert

$$\xi_4 = - w_1[(u_1 \sin\alpha + v_1 \cos\alpha)^2 + (u_1\cos\alpha - v_1\sin\alpha)^2] = - w_1(u_1^2 + v_1^2),$$

frei von $\alpha$; und wenn wir gemäß (5) bezeichnen,

$$\xi_1 = - w_1 a\{-(u_1\cos\alpha - v_1\sin\alpha)^2 - (u_1\sin\alpha + v_1\cos\alpha)^2$$
$$+ \frac{v_1 - e w_1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left[(u_1\sin\alpha + v_1\cos\alpha) + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(u_1\cos\alpha - v_1\sin\alpha)\right]\}$$
$$= w_1 a\{u_1^2 + v_1^2 - \tfrac{1}{2}[v_1 - e w_1](u_1[2t + t(1-t^2)] + v_1[-2t^2 + (1-t^2])\}$$
$$= w_1 a\{u_1^2 + v_1^2 - \tfrac{1}{2}[v_1 - e w_1][u_1 t(3 - t^2) - v_1(1 - 3t^2)]\};$$

$$\xi_2 = - w_1 a \cdot \frac{v_1 - e w_1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left[\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(u_1\sin\alpha + v_1\cos\alpha) - (u_1\cos\alpha - v_1\sin\alpha)\right]$$
$$= - w_1 a \cdot \frac{v_1 - e w_1}{2}[u_1(2t^2 - [1 - t^2]) + v_1(t[1 - t^2] + 2t)]$$
$$= - w_1 a \cdot \frac{v_1 - e w_1}{2}[u_1(3t^2 - 1) + v_1 t(3 - t^2)];$$

$$\xi_3 = \bar{\omega}_1 - a u_1 + \frac{a}{2}[v_1 - e w_1]\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left\{2 + \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right\}(u_1^2 + v_1^2)$$
$$= \bar{\omega}_1 - a u_1 + \frac{a}{2}[v_1 - e w_1]t(3 + t^2)(u_1^2 + v_1^2).$$

Die Parametergleichungen in Punktkoordinaten $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ lauten daher bei der von allen Lagen einer Ebene $E_1$ oskulierten *Helix* $\mathfrak{D}$:

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi + a &= \frac{a}{2}\frac{v_1 - e w_1}{u_1^2 + v_1^2}[u_1 t(3 - t^2) - v_1(3t^2 - 1)] \\ \eta &= \frac{a}{2}\frac{v_1 - e w_1}{u_1^2 + v_1^2}[u_1(3t^2 - 1) + v_1 t(3 - t^2)] \\ \zeta &= -\frac{\bar{\omega}_1}{w_1} + a\frac{u_1}{w_1} - \frac{a}{2}\frac{v_1 - e w_1}{w_1}t(3 + t^2). \end{aligned}\right\}$$

Sie zeigen uns, daß jede von einer Ebene $E_1$ bei der kubischen Kreisbewegung oskulierte Helix *kubisch* ist. Nur Ebenen von der Richtung der Geraden $\Delta$ (vgl. S. 284), bei denen

$$v_1 - e w_1 = 0$$

ist, beschreiben *Umdrehungskegel* mit den Scheiteln $\left(-a,\ 0,\ \frac{a u_1 - \varpi_1}{w_1}\right)$ auf der Fokalachse $F(\xi = -a,\ \eta = 0)$ des Zylinders $\Gamma_0$ (Gleichung $\binom{12}{I}$). Aus den Gleichungen (23) folgt, wenn wir den konstanten Winkel von $E_1$ mit der $xy$-Ebene durch $\omega$ und mit $m$ eine konstante Länge bezeichnen, daß *jede kubische Helix* $\mathfrak{D}$ *kongruent ist der durch die Gleichungen*

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= mt(3 - t^2) \\ \eta &= m(3t^2 - 1) \\ \zeta &= mt(3 + t^2)\operatorname{tg}\omega \end{aligned}\right\}$$

darstellbaren algebraisch (ganz, rational) rektifizierbaren Raumkurve 3. Ordnung, so daß wir bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems und der Konstanten $m$, $\omega$ geradezu (24) als Gleichungen der von $E_1$ oskulierten kubischen Helix ansehen können. Wählen wir $\operatorname{tg}\omega = 1$, so ist die dritte Koordinate $\zeta$ direkt gleich dem Bogen der durch die ersten beiden Gleichungen unter (24) dargestellten Helixbasis $\mathfrak{D}'$ in der $xy$-Ebene, sonst zu den letzteren proportional; man überzeuge sich zur Kontrolle davon, daß die Gleichung

$$d\zeta^2 = (d\xi^2 + d\eta^2)\operatorname{tg}^2\omega$$

wirklich zutrifft! Die Helixbasis $\mathfrak{D}'$ könnte als spezielle, zur Steigung $\omega = 0$ gehörige, also *ebene* kubische Helix angesehen werden; sie hat in den Koordinaten $\xi$, $\eta$, ferner in den gemäß

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \xi \\ \mathfrak{y} &= \eta - 8m \end{aligned}\right\} \text{ bzw. } \left\{\begin{aligned} x &= \eta + m \\ y &= \xi \end{aligned}\right\}$$

transformierten Koordinaten die Parametergleichungen

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= mt(3 - t^2) \\ \mathfrak{y} &= 3m(t^2 - 3) \end{aligned}\right\} \text{ bzw. } \left\{\begin{aligned} x &= 3mt^2 \\ y &= mt(3 - t^2) \end{aligned}\right\}$$

und dementsprechend die kartesische Gleichung

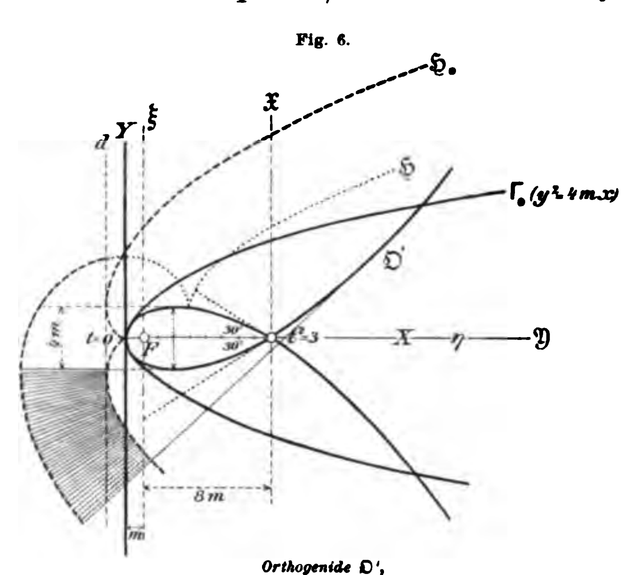
$$(26)\qquad \begin{gathered} (\eta + 4m)^3 = 27m(\xi^2 + \eta^2) \quad |\ \text{bzw. } 27m\mathfrak{x}^2 = \mathfrak{y}^2(\mathfrak{y} + 9m)\ | \\ \text{bzw. } 27my^2 = x(x - 9m)^2; \end{gathered}$$

ihr vom Punkte $(t = 0)$ gerechneter *Bogen* $s$ ist einfach

$$(27)\qquad s = mt(3 + t^2).$$

Der Bogen $\sigma$ der Helix $\mathfrak{D}$ selbst ist zum Bogen $s$ von $\mathfrak{D}'$ proportional $\sigma = \frac{s}{\cos\omega} = \frac{mt(3+t^2)}{\cos\omega}$. Die Helixbasis $\mathfrak{D}'$ ist gemäß (26) eine spezielle — im Hinblick auf (27) die einzige[1]) algebraisch rektifizierbare — kubische *Crunodalparabel*; wir wollen sie *Orthogenide*[2]) nennen und in der Figur 6 skizzieren. G. Humbert zeigt nun[3]), daß die Orthogenide nächst der Geraden die Kurve vom *niedrigsten Grade* ist, *deren Bogen als rationale Funktion der Koordinaten ausgedrückt werden kann*. Der Name *Orthogenide* kann daran erinnern, daß diese Linie als *Katakaustik einer Parabel* $\Gamma_0$

Fig. 6.




*Orthogenide* $\mathfrak{D}'$,
die zweite negative Fußpunktkurve der Geraden $d$ bezüglich $F$,
„ erste „ „ „ Parabel $\Gamma_0$ „ $F$.
Alle Evolventen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{D}'$ (Parallelkurven von $\mathfrak{H}_0$) zeigen die Gestalten der *Laguerreschen Hyperzykel*.

$$\xi^2 = 4m(\eta + m),^{4)}$$

bzw.

$$y^2 = 4mx$$

bei Parallelbeleuchtung schon in dem einfachen Falle eintritt, wo die Strahlenrichtung zur Parabelachse *orthogonal* ist.[5])

1) G. Humbert, Sur les courbes algébriques rectifiables im Journal de Mathématiques. 1888. 4. ser. IV. S. 133.

2) Anschließend an G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Leipzig, B. G. Teubner 1902, II. Bd. S. 666. Auch auf der S. 401 im I. Bde. dieses Kurvenkatalogs wird sie als eine besondere *Sinusspirale* (8) angeführt; an dieser Stelle hat sich aber G. Loria noch nicht für den von Allégret eingeführten Namen *Orthogenide* entschieden.

3) In der bei Anm. 1 angeführten Abhandlung S. 147. 15. Ex. IV.

4) Vgl. G. Humbert, l. c.; man setze für den Augenblick statt $\eta, \xi \ldots x, y$ und erhält als Gleichung der Katakaustik der Parabel $y^2 = 4mx + 4m^2$ jene, welche Humbert auf S. 148 ansetzt: $(x + 4m)^3 = 27m(x^2 + y^2)$.

5) Vgl. in den Nouv. ann. 2. ser. V. 1866 die Abhandlung von Barbier und Lucas mit der Figur auf S. 26, welche sich an die Komposition Moëssards (Figur S. 26 daselbst) anschließt und letztere wertvoll (auch in bezug auf die Genauigkeit der Zeichnung) ergänzt. Bei Moëssard tritt unsere Orthogenide $\mathfrak{D}'$ auf als Ort der Mittelpunkte jener Kreise, welche — mit bezug auf unsere Figur 6 ge-

Dem Reflexionsgesetz und einer bekannten Eigenschaft der Parabeltangenten zufolge läuft diese Kaustikeneigenschaft der *Orthogenide* darauf hinaus, daß letztere die *negative Fußpunktkurve einer Parabel* $\Gamma$ *in bezug auf ihren Brennpunkt* $F(\xi = \eta = 0)$ *als Pol* ist, daß sie daher auch die in bezug auf $F$ genommene *zweite* negative Fußpunktkurve einer *Geraden d*

$$(\eta = -2m, \quad \text{bzw.} \quad x = -m)$$

ist. Ihre Gleichung in Polarkoordinaten $\varrho$, $\omega$, welche auf $F$ als Pol und die Symmetrieachse $x$ als Polarachse bezogen sind, lautet

$$\varrho = m \cos^{-3}\frac{\omega}{3}.$$[1]

Sie zeigt die Orthogenide als besondere Sinuspirale.[2]

Die Gleichung der Orthogenide $\mathfrak{O}'$ in Plückerschen Linienkoordinaten $u$, $v$, $\varpi$ ergibt sich aus (22'), (wobei die Akzente fortgelassen werden mögen), also entsprechend

$$\left.\begin{cases} u = -v_1 \cos\alpha \\ v = -v_1 \sin\alpha \\ \varpi = -av_1 \cos\alpha + \dfrac{a}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \end{cases}\right\} \text{als } (u^2+v^2)(au-\varpi)^2-(av^2+u\varpi)^2=0, \quad (a=2m)^{3)},$$

sprochen — durch $F$ gehen und eine Parabel $\Gamma$, deren Brennpunkt $F$ ist, berühren; $\Gamma$ kann durch Verdoppelung der Längen aller von $F$ ausgehenden Leitstrahlen aus unserer Parabel $\Gamma_0$ gewonnen werden. Schon der Marquis de l'Hospital (in den Mém. de Paris X. 1666—99, dem Verf. nicht zugänglich) ist auf die Orthogenide gestoßen, weshalb sie von Cazamiam (in den Nouv. ann. 3. ser. XIII. 1894 auf S. 307) cubique de l'Hospital genannt wird. Auch Tschirnhausen (Acta eruditorum 1682, Fehler enthaltende Arbeiten) beschäftigte sich mit ihr; Archibald nennt sie deshalb in seiner Straßburger Inauguraldissertation: The cardioid and some of its related curves, 1900, geradezu Tschirnhausens cubic. Sie erscheint ihm als das kreispolare Bild einer *Kardioide* bezüglich eines um deren Spitze als Mittelpunkt beschriebenen Kreises und als inverses Bild einer anderen, von ihm Cayley sextic genannten *Sinuspirale,* welche G. Loria [l. c. I. S. 402 unter (9)] anführt. Letztere ist der Ort der Scheitel jener Parabeln, die einen Kreis berühren und einen Punkt seiner Peripherie zum gemeinsamen Brennpunkte haben. (Quest. 166 der Nouv. ann. gelöst 1848 von P. Serret).

1) Man vgl. in Schlömilch: Übungsbuch zum Studium der höh. Anal. II (2. Aufl., Leipzig 1874, S. 338 Beispiel 18). Dort wird, ausgehend von der mit (26) identischen Orthogenidengleichung $y = a_1\left(1 - \frac{x}{3a_1}\right)\sqrt{\frac{x}{a_1}} \cdots \left(a_1 = 3m = \frac{3p}{2}\right)$ u. a. die Polargleichung $\varrho = \frac{p}{2}\cos^{-3}\frac{\omega}{3}$ abgeleitet.

2) G. Loria l. c. II. S. 401 (8).

3) $a$ bedeutet hier die halbe Schleifenbreite $2m$ von $\mathfrak{O}'$, Fig. 6, $a = \frac{2a_1}{3} = p$ (bei Schlömilch vgl. die Anm. 1 auf dieser Seite).

woraus sofort die Eigenschaft von $\mathfrak{O}'$ zu erkennen ist, eine besondere *Direktionskurve*[1]) zu sein.

L. Raffy[2]) hat eingehend die *Bogenintegrale* aller rationalen kubischen Kurven der Ebene dargelegt. Er zeigt u. a. (S. 118), daß die *Orthogenide* unter diesen Kurven die *einzige* Kurve *rationaler Krümmung* ist. Der Krümmungsradius $R$ ergibt sich durch Rechnung aus unseren Parametergleichungen (24) oder (25) als

$$R = \frac{3m}{2}(1+t^2)^2, \tag{28}$$

so daß durch Elimination von $t$ aus (27) und (28) die *natürliche* Gleichung der Orthogenide $\mathfrak{O}'$

$$8mR^3 = 27(s^2 - 2mR + 4m^2)^2 \tag{29}$$

hervorgeht.

Die von uns gefundene *kubische Raumkurve* $\mathfrak{O}$ (Gleichung 24), die *Helix* auf einem *aufrechten* Zylinder mit einer *Orthogenide* $\mathfrak{O}'$ als Basis, *ist* (abgesehen von der Geraden) *die einfachste algebraische* und überhaupt die **einzige kubische** *Raumkurve*, welche Helix ist, d. h. *deren Tangenten mit einer festen Richtung gleiche Winkel einschließen.* Seien, um dies zu beweisen, mit $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die rechtwinkligen Koordinaten des laufenden Punktes einer *kubischen* Helix auf einem Zylinder bezeichnet, wobei die dritte Koordinate $\zeta$ zu einer Achse von der Richtung der Zylinderkanten gehören möge. $\zeta$ und der zugehörige Bogen $s$ der Helixbasis sind nun proportional ($\zeta = s \operatorname{tg} \omega$, wenn $\omega$ den konstanten Winkel der Helixtangenten mit der Ebene der Helixbasis vorstellt), daher muß $s$ (bis auf den konstanten Faktor $\operatorname{cotg} \omega$) dieselbe *algebraische* Funktion von $\xi, \eta$ sein wie $\zeta$. Die Zylinder, auf denen eine kubische Raumkurve liegt, können aber nur solche von der 2. oder 3. Ordnung sein. Eine algebraisch rektifizierbare eigentliche Kurve 2. O. gibt es nicht und nach den Ergebnissen von Humbert und Raffy[3]) kommt unter den (rationalen) Kurven 3. Ordnung nur die Orthogenide in Betracht. Unsere Helix $\mathfrak{O}$ ist also die einzige kubische Helix, welche es

1) E. Laguerre, Sur la géométrie de direction, im Bull. de la Soc. math. de France, VIII 1880 und in den Nouv. ann. 3. ser. II. S. 30. (Vgl. in G. Loria, Ebene Kurven, Leipzig 1902, I. Bd. S. 366). G. Humberts Abhandlungen im Journal de Math. 4. ser III. 1887 u. 4. ser. IV. 1888. S. 137 etc.

2) L. Raffy, Sur la rectification des cubiques planes unicursales, in den Annales de l'école normale supérieure 1889. 3. ser. VI. S. 103. Er nennt die Orthogeniden caustique-podaires und weist auf ihre Identität mit den Krümmungslinien einer Enneperschen Minimalfläche hin: Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces I, S. 318 etc. u. 401. Salmon, Higher plane curves, 2. Ausgabe, 3. Kap.

3) In den oben angeführten Abhandlungen.

gibt. Sie bietet wohl das einfachste Beispiel einer algebraischen Raumkurve, welche *algebraisch rektifizierbar* ist.

(29) ist die eine ihrer beiden *natürlichen* Gleichungen, während die andere die Helixeigenschaft von $\mathfrak{O}$ hervorhebt, indem sie besagt, daß der Torsionsradius $T$ zu $R$ proportional ist.[1])

## § 8. Bemerkungen über die Hüllflächen der Ebenen bei der kubischen Kreisbewegung, = die Tangentenflächen der kubischen Helix, = Flächen gleichen Abhanges über Laguerreschen Hyperzykeln.

Auch bei der ebenen und bei der *aufrechten* kubischen Kreisbewegung (Gleichung (16)) hüllen alle Ebenen $E_1$ Developpable $[\mathfrak{O}]$ ein, welche eine kubische Helix $\mathfrak{O}$, deren Gleichungen auf die Form (24) gebracht werden können, *oskulieren*.[2]) Besonders braucht man sich nur noch im letzteren Falle davon zu überzeugen, daß wirklich die Gleichungen in Ebenenkoordinaten bei der letzteren Bewegung durch den Grenzübergang (15) aus (23) hergeleitet werden können, so daß sie sich ebensogut als im allgemeinen Falle auf die Form (24) bringen lassen.

Wir haben also stets die *Developpablen gleichen Abhanges* $[\mathfrak{O}]$ vor uns, welche man auf folgende Art mittels jeder *Evolvente* $\mathfrak{H}$ der Helixbasis $\mathfrak{O}'$, d. h. jeder Evolvente *der Orthogenide* mit den Gleichungen (24) (die ersten beiden; vgl. S. 286, 287 bezüglich $\mathfrak{H}$) erzeugen kann:

„Man bewege einen starren Keil vom Öffnungswinkel $\omega$, dessen eine Keilfläche stets in der Ebene von $\mathfrak{H}$ bleibt, derart, daß die Keilkante der Reihe nach die Lagen aller Tangenten von $\mathfrak{H}$ einnimmt. Die andere Keilebene umhüllt dann $[\mathfrak{O}]$, oskuliert $\mathfrak{O}$.“

Statt $\mathfrak{H}$ kann man hierbei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die einzige symmetrische Evolvente $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{O}'$ nehmen (Fig. 6), deren Gleichungen sich als

$$\left\{x=\frac{mt^2(t^2-3)}{1+t^2},\; y=\frac{4mt^3}{1+t^2}\right\},\; (x^2+y^2)y^2-2mx(8x^2+9y^2)-27m^2y^2=0\ldots\mathfrak{H}_0$$

berechnen lassen.

---

1) Puiseux in Crelles Journal 7. Bertrand in Crelles Journal 8.

2) Die Ausartung, welche hier an Stelle der Ausartung zu Umdrheungskegeln (bei der schiefen kubischen Kreisbewegung) auftritt, wenn $E_1$ die Richtung von $\Delta$ hat (S. 284, 289), bilden bei der *ebenen* kubischen Kreisbewegung wieder Umdrehungskegel, falls $E_1$ parallel zur Scheiteltangente $\Delta$ der Parabel $\Gamma^0$ gewählt wird und nur speziell dann Umdrehungszylinder, wenn $E_1$ zu $\Delta$ parallel *und* zur $xy$-Ebene senkrecht ist; dagegen treten bei der *aufrechten* kubischen Kreisbewegung als *einzig* mögliche Ausartung Umdrehungs*zylinder* um die $z$-Achse auf, falls man $E_1$ senkrecht zur $xy$-Ebene nimmt. Ganz speziell hüllen im letzteren Falle die durch die $z$-Achse gelegten Ebenen $E_1$ die letztere Achse selbst ein.

*Die Orthogenidenevolventen* $\mathfrak{H}$ *sind identisch mit den (kubischen) Hyperzykeln* Laguerres[1]), den *Antikaustiken* einer gewöhnlichen Parabel. Man kann dies schon erkennen, wenn man die Developpable [$\mathfrak{O}$] gleichen Abhanges über einer Orthogenidenevolvente $\mathfrak{H}$ durch eine *ebene* kubische Kreisbewegung erzeugt denkt. Die von der Ebene der Parabel $\Gamma^0$ (Fig. 2) mitgenommene Gerade $e_1(u_1, v_1, \varpi_1)$, welche $\mathfrak{H}$ umhüllt (Gleichung (22)), ist nämlich offenbar das Spiegelbild einer *festen* Sehne $e$ der zu $\Gamma^0$ symmetrischen festen Parabel $\Gamma_0$ der Unterlagsebene.

Da überdies unsere Rechnung die Evolute $\mathfrak{O}'$ jeder Basis $\mathfrak{H}$ einer [$\mathfrak{O}$] (Gleichung (22)) als *Orthogenide* dargetan hat, erkennen wir mit Laguerre, daß die *Parabelkatakaustik* bei jeder Parallelbeleuchtung eine *Orthogenide* ist, also *auch dann, wenn die leuchtenden Strahlen nicht zur Parabelachse senkrecht stehen*, wie wir ursprünglich der Einfachheit wegen annahmen.[2])

1) Es sind dies besondere Direktionskurven: Laguerre, Sur la géométrie de direction, im Bull. de la Soc. math. de France VIII, 1880. Vgl. Salmon-Fiedlers Höh. K., Lpz. 1873, S. 122. Vgl. insbesondere die Berichte Laguerres über die Eigenschaften der Hyperzykel in den Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, séances des 20 et 27 mars, 3, 10 et 24 avril 1882. In den Nouv. ann. 1883. 3. ser. II. S. 16: (*) „Sur les *anticaustiques* par réflexion de la *parabole*, les rayons incidents étant parallèles" und ebenda S. 97: „Sur les courbes de direction de la troisième classe. Dort findet sich der Nachweis der Identität der kubischen, d. h. zur *Klasse 3* gehörigen *Hyperzykel* mit den *Antikaustiken* einer gewöhnlichen Parabel. Bezüglich des letzteren Begriffes vergleiche man etwa in der oben zitierten Abhandlung Humberts im Journal de Math. 1888, S. 141. 142. Die *Antikaustik* einer ebenen Kurve $\Gamma_0$ erhält man als Enveloppe der Spiegelbilder $e_1(t)$ einer festen Geraden $e$ bezüglich der Tangenten von $\Gamma_0$; sie ist also eine der Evolventen der Katakaustik dieser Kurve $\Gamma_0$ bei Beleuchtung durch Strahlen, welche zur festen Geraden $e$ senkrecht stehen. Jede Antikaustik einer $\Gamma_0$ kann daher auch als Roulette erzeugt werden, als Einhüllende einer Geraden $e_1$, welche von einem Spiegelbilde $\Gamma^0$ der Grundkurve bezüglich einer ihrer Tangenten starr mitgenommen wird, falls letzteres ($\Gamma^0$) gleitlos an $\Gamma_0$ abrollt. ($\Gamma^0$ und $\Gamma_0$ bleiben hierbei stets symmetrisch bezüglich der jeweilig gemeinsamen Tangente.)

2) Laguerre zeigt in der oben erwähnten Abhandlung (*) S. 27, *welche* Parabeln zu *einer* Orthogenide $\mathfrak{O}'$ gehören, wenn letztere als *Kata*kaustik einer Parabel $\Gamma_0$ definiert ist und die Lichtstrahlen zur Achse von $\Gamma_0$ *senkrecht* stehen: Dreht man dann den Lichtstrahl um einen Winkel $\mathfrak{w}$ und will dieselbe Orthogenide $\mathfrak{O}'$ als Katakaustik einer anderen Parabel erhalten, so hat man die letztere konfokal mit $\Gamma_0$ und zwar so zu wählen, daß jene (gerichtete) Tangente von $\Gamma_0$ *Scheitel*tangente wird, welche gegen die (ebenfalls gerichtete) Scheiteltangente von $\Gamma_0$ um $\frac{\mathfrak{w}}{2}$ nach der gehörigen Seite hin gedreht erscheint Hieraus ließe sich ohne weiteres ableiten, welche Lage die $\infty^1$ Orthogeniden haben, welche als Katakaustiken *einer* Parabel bei den verschiedenen Parallelbeleuchtungen (in der Parabelebene) auftreten.

Der Brennpunkt $F'$ von $\Gamma_0$ ist auch der Brennpunkt jeder Antikaustik $\mathfrak{H}$ von $\Gamma_0$, da nur die isotropen Tangenten von $\Gamma_0$ zur Bildung von isotropen — und mit den vorigen zusammenfallenden — Tangenten von $\mathfrak{O}'$ als Spiegelbildern einer festen Geraden $e$ Anlaß geben.

Die Laguerreschen *Hyperzykel* $\mathfrak{H}$ kann man als *Zentralprojektionen* (Schatten) einer *Kardioide* erhalten, wenn man die Schirmebene $\mathfrak{S}$ und das Zentrum $\mathfrak{L}$ (den leuchtenden Punkt) in geeigneter Weise wählt: Sei $\mathfrak{t}$ die Kardioidentangente in irgend einem ihrer Punkte, etwa in $\mathfrak{P}$, auf welcher neben $\mathfrak{P}$ noch zwei imaginäre Kardioidenpunkte liegen; diese werden aus allen Punkten eines bestimmten — um $\mathfrak{t}$ als Achse beschriebenen — Kreises $\mathfrak{K}$ durch *Minimalstrahlen* (isotrope Gerade, zu absoluten Kreispunkten führend) projiziert.

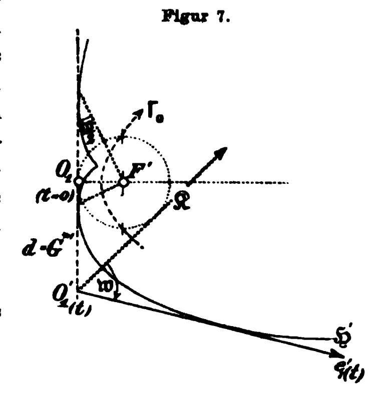
Will man einen hyperzyklischen Kardioidenschatten in $\mathfrak{S}$ haben, so nehme man $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{K}$ beliebig an und lege $\mathfrak{S}$ parallel zur Ebene $\mathfrak{L}\mathfrak{t}$.[1])

Die zwei imaginären Spitzen des Hyperzykels $\mathfrak{H}$ erhält man so durch Abschattung der zur Kardioide gehörigen Kreispunkte, da letztere die imaginären Spitzen der Kardioide vorstellen.

---

Analog den zum Schlusse des § 6 dargelegten Transformationen (I, II, III), welche von einem nicht zerfallenden kubischen Kreise zu den ihn bei der kubischen Kreisbewegung (als Bahnen anderer Punkte des beweglichen starren Körpers) begleitenden kubischen Kreisen führten, wollen wir nun solche Transformationen angeben, welche bei *einer* als Hüllfläche einer Ebene $E_1$ ($u_1$, $v_1$, $w_1$, $\omega_1$) gegebenen [weder zum Umdrehungskegel zerfallenen, noch zum aufrechten Zylinder über einem Hyperzykel ausgearteten[2])] developpablen Tangentenfläche [$\mathfrak{O}$] einer kubischen Helix $\mathfrak{O}$ zu den sie bei der kubischen Kreisbewegung *begleitenden* Developpablen führen.

Figur 7.




Auf der Anfangslage ($t = 0$) der Ebene $E_1$ liegt, da wir $E_1$ [wegen $w_1 \gtrless 0$, da sonst die obige Ausartung einträte] als gegen die $z$-Achse geneigt voraussetzen müssen, *ein* Punkt $O_1$, welcher eine Gerade $G^*$ beschreibt (S. 277). Die in $E_1$ gelegene zur $z$-Achse senkrechte *Gerade* $e_{1(t=0)}$ durch $O_1$ *beschreibt* in ihren verschiedenen Stellungen $e_{1(t)}$, bei denen sie stets eine zu $z$ senkrechte Transversale

1) Die Zentralprojektion berührt dann die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene im Bildpunkte von $\mathfrak{P}$ und geht auch durch die Kreispunkte dieser Geraden. Alle rationalen Kurven 3. Ordnung, 4. Klasse (mit drei Spitzen und einer Doppeltangente) sind kollinear! Die dreispitzige Hypozykloide Steiners z. B. gehört auch hierher, die Kollineation wäre aber in bezug auf sie nicht mehr reell.

2) Letzteres bei Ebenen senkrecht zur $xy$-Ebene ($w_1 = 0$). Diese ausgearteten Developpablen reichen zur Bestimmung einer kubischen Kreisbewegung nicht aus.

von $G^*$ bleibt, indem $O_1$ in die anderen Punktlagen $O_{1(t)}$ auf $G^*$ wandert, *eine windschiefe Fläche* $\mathfrak{H}^4$, deren Kontur bei orthogonaler Projektion auf die $xy$-Ebene ein besonders gelegener Hyperzykel $\mathfrak{H}'$ ist, welcher die Projektion $G^{*\prime}$ von $G^*$ doppelt berührt[1]) (Fig. 7). Die Erzeugenden $e_{1(t)}$ von $\mathfrak{H}^4$ kann man aus den Tangenten $e'_{1(t)}$ von $\mathfrak{H}'$ gewinnen, indem man jede der letzteren parallel zur $z$-Achse so lange verschiebt, bis sie die Gerade $G^*$ — in einem Punkte $O_{1(t)}$ — schneidet.

Man erhält *aus der* von $E_1$ erzeugten developpablen *Fläche* $[\mathfrak{D}]$ *andere* kubische Helikaltangentenflächen als *Begleitflächen*, indem man alle Tangentialebenen $E_{1(t)}$ von $[\mathfrak{D}]$ zugleich

I) um die verschiedenen Geraden $e_{1(t)}$ von $\mathfrak{H}^4$ um einen für alle diese Ebenen gleichen, sonst beliebigen Winkel dreht (so werden verschieden geneigte Begleitflächen erzeugt); ferner wenn man

II) jede $E_{1(t)}$ um die durch den Schnittpunkt $O_{1(t)}$ dieser Ebene mit $G^*$ zur $z$-Achse gelegte Parallele um einen beliebigen anderen, für alle Tangentialebenen gleichen Winkel in einem bestimmten Sinne dreht.[2])

Wenn man die Transformationen I, II nacheinander anwendet, erhält man alle $\infty^2$ Flächen $[\mathfrak{D}]$ *verschiedener* Gestalt unter den eine $[\mathfrak{D}]$ begleitenden Hüllflächen.

Nimmt man noch drittens (III) eine Parallelverschiebung in der $z$-Richtung hinzu, was auf Parallelflächenbildung hinausläuft, so kann man durch (I, II, III) überhaupt alle $\infty^3$ einander bei der kubischen Kreisbewegung begleitenden Developpablen auch ihrer Lage im Raume nach gewinnen.

---

1) Die beiden Berührungspunkte werden aus dem Brennpunkte $F'$ von $\mathfrak{H}'$ durch zueinander *senkrechte* Gerade projiziert. Vgl. die nächste Anmerkung.

2) II führt bei der ebenen kubischen Kreisbewegung zur Erzeugung eines besonders gelegenen Hyperzykels $\mathfrak{H}'$ — wie er in der Fig. 7 auftrat — durch gleichsinnige Drehung aller (gerichteten) Tangenten eines Kreises $\mathfrak{K}$ (um $F'$ mit dem Radius $2m$) um ihre Schnittpunkte $(O'_1)$ mit einer festen Tangente ($d = G^{*\prime}$) desselben und um einen für alle diese Tangenten gleichen Winkel $\mathfrak{w}$. Ändert man diesen Winkel, so kann man sich hiernach in der $xy$-Ebene die Konturen aller oben bei der Transformation II erzeugbaren Flächen vorstellen. Diese Konturen $\mathfrak{H}'$ sind die *Antikaustiken* der durch den gemeinsamen *Brennpunkt* $F'$ von $\mathfrak{H}'$ und *der Parabel* $\Gamma_0$, welche $G^{*\prime}$ zur Direktrix hat, *gelegten Sehnen* $e$ *von* $\Gamma_0$. Die Tangenten $e'_{1(t)}$ von $\mathfrak{H}'$ hat man sich als verschiedene Lagen der zu $e$ symmetrischen, von $\Gamma^0$ (Fig. 2) mitgenommenen Geraden $e'_1$ zu denken, wenn $\Gamma^0$ an der kongruenten Parabel $\Gamma_0$ symmetrisch abrollend gedacht wird. Bei unseren Konturen $\mathfrak{H}'$ gehen alle $e'_1$ durch den Brennpunkt $O'_1$ von $\Gamma^0$ und werden so von $\Gamma^0$ mitgenommen.

# Das Ausknicken von Trägern.

Von Maschineningenieur F. NUSSBAUM in Spalato.

In der vorliegenden Zeitschrift Bd. 55, Heft 1/2, S. 134 wurde die Knickerscheinung für die Säule kurz definiert, und nach einer neuen direkten Methode die genaue Knicklast bestimmt. Außer bei den Säulen können wir noch Knickerscheinungen beobachten bei der dünnwandigen Röhre oder Kugel[1]) mit äußerem Druck, bei Trägern geringer Seitensteifigkeit usw.[2]) Mit letzterem Fall wollen wir uns jetzt beschäftigen. Zum leichteren Verständnis wird auf die erwähnte Abhandlung verwiesen, weil der dort eingeschlagene Weg auch in diesem schwierigeren Falle benutzt werden soll.

Der Untersuchung legen wir wieder das Proportionalitätsgesetz zugrunde, also gelten die Resultate genau nur, wenn die größte Biegungsspannung vor dem Ausknicken die „Proportionalitätsgrenze“ nicht überschreitet. Während die früher für die Säule abgeleitete Knickformel bei Verwendung des zur Druckspannung vor dem Ausknicken gehörigen Elastizitäts- und Gleitmoduls auch für ein beliebiges Dehnungsgesetz und über die „Proportionalitätsgrenze“ als nahezu richtig angesehen werden kann, ist dies beim Träger wegen Veränderlichkeit der Biegungsspannung nicht so einfach.

A. **Prismatischer Freiträger** mit gleichmäßiger Last $p$ pro Längeneinheit, angreifend in der Höhe $h$, und Einzellast $P$ am Trägerende, angreifend in der Höhe $H$ über der Stabachse (Ort der Querschnittsschwerpunkte).

Den geknickten Träger mit beliebig zu denkendem Querschnitt veranschaulicht Fig. 1. Eine Querschnittshauptachse sei vertikal, denn andernfalls beginnt die seitliche Ausbiegung sogleich mit der Belastung. Als Urvariable diene die Stabachsenlänge vom freien Trägerende gemessen. In Fig. 2 ist ein Trägerstückchen von der Länge $dx$ heraus-

1) Auch bei beliebig großer Wandstärke ist die Knickerscheinung möglich, wie etwa an Bläschen einer unter Druck gesetzten Gelatinemasse. Bei ähnlicher Auffassung des Lichtäthers könnten vielleicht die negativen Elektronen als winzige Kugelräume von geringerem oder gar keinem Druck (begrenzt durch Knickung), und event. die positiven Elektronen als Ätherkügelchen mit Überdruck erklärt werden.

2) Eine eigentümliche Knickerscheinung ist an sehr schlanken tordierten Stäben zu beobachten.

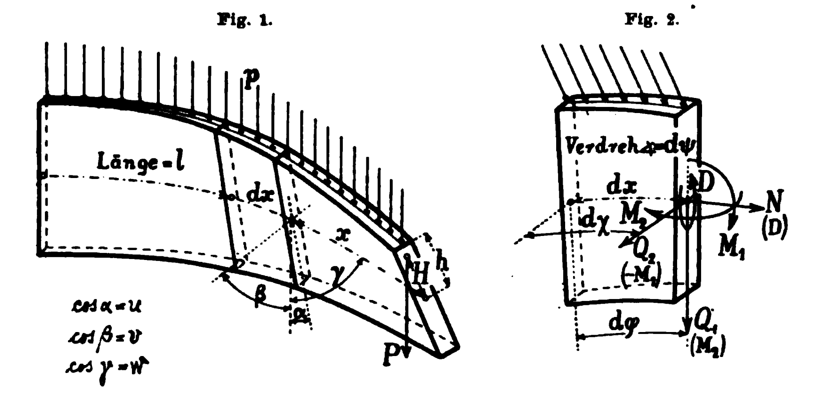
gezeichnet, auf welches wir die räumlichen Gleichgewichtsbedingungen anwenden:

$$\sum(Q_1) = 0 = Q_1 - (Q_1 + dQ_1) + Q_2 d\psi + N d\varphi + p u dx$$
$$\sum(Q_2) = 0 = Q_2 - (Q_2 + dQ_2) - Q_1 d\psi + N d\chi + p v dx$$
$$\sum(N) = 0 = N - (N + dN) - Q_1 d\varphi - Q_2 d\chi + p w dx.$$

Hier sei daran erinnert, daß sich Momente mit ihren Achsen wie Kräfte zusammensetzen;

$$\sum(M_1) = 0 = M_1 - (M_1 + dM_1) + M_2 d\psi - D d\chi + Q_1 dx + p w dx h$$
$$\sum(M_2) = 0 = M_2 - (M_2 + dM_2) - M_1 d\psi + D d\varphi + Q_2 dx$$
$$\sum(D) = 0 = D - (D + dD) + M_1 d\chi - M_2 d\varphi + p v dx h.$$

Fig. 1. Fig. 2.




Nun ist, wie in der oben erwähnten Abhandlung gezeigt wurde, die Krümmung

$$\frac{d\varphi}{dx} = a_1 M_1 + \mathfrak{a}_1 Q_1' \quad \text{und}$$
$$\frac{d\chi}{dx} = a_2 M_2 + \mathfrak{a}_2 Q_2';^{1)}$$

ferner ist die Verdrehung

$$\frac{d\psi}{dx} = bD.$$

Dabei ist für den homogenen Querschnitt

$$a_1 = \frac{1}{EI_1}, \quad \mathfrak{a}_1 = \frac{1}{G\mathfrak{F}_1}, \quad a_2 = \frac{1}{EI_2}, \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{1}{G\mathfrak{F}_2}, \quad b = \frac{1}{GJ},$$

wo $E$ und $G$ den Elastizitäts- und Gleitmodul, $I_1$ und $I_2$ die Trägheitsmomente des Querschnitts bezüglich der horizontalen bzw. verti-

1) Die Glieder mit $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ berücksichtigen die Schiebung; sie ist wie bei der Säule meist verschwindend und wird hier nur zur Vorführung des Rechnungsganges nicht vernachlässigt.

kalen Querschnittsachse, $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ die aus der Schubelastizitätstheorie bekannten Querschnittsfunktionen für vertikalen bzw. horizontalen Schub, und $J$ die aus der Torsionselastizität bekannte Querschnittsfunktion bezeichnet.

Durch Einführen dieser Beziehungen in obige Gleichgewichtsbedingungen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
Q_1'(1 - N\mathfrak{a}_1) &= Q_2 bD + Na_1 M_1 + pu \\
Q_2'(1 - N\mathfrak{a}_2) &= - Q_1 bD + Na_2 M_2 + pv \\
N' &= - Q_1(a_1 M_1 + \mathfrak{a}_1 Q_1') - Q_2(a_2 M_2 + \mathfrak{a}_2 Q_2') + pw \\
M_1' &= M_2 bD - D(a_2 M_2 + \mathfrak{a}_2 Q_2') + Q_1 + pwh \\
M_2' &= - M_1 bD + D(a_1 M_1 + \mathfrak{a}_1 Q_1') + Q_2 \\
D' &= M_1(a_2 M_2 + \mathfrak{a}_2 Q_2') - M_2(a_1 M_1 + \mathfrak{a}_1 Q_1') + pvh.
\end{aligned}$$

Diese 6 Differentialgleichungen enthalten 9 unbekannte Funktionen, die aber zum Teil gegenseitig leicht ausdrückbar sind:

$$Q_1 = (P + px)u, \quad Q_2 = (P + px)v, \quad N = (P + px)w;$$

die unbequeme Beziehung

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

werden wir nicht benötigen. Damit ersetzen wir oben $Q_1$, $Q_2$, $N$ und erhalten so ein vollständiges nichtlineares Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{vbD + wa_1 M_1 + puw\mathfrak{a}_1}{1 - (P + px)w\mathfrak{a}_1} \\
v' &= \frac{-ubD + wa_2 M_2 + pvw\mathfrak{a}_2}{1 - (P + px)w\mathfrak{a}_2} \\
w' &= -ua_1 M_1 - va_2 M_2 - u\mathfrak{a}_1[(P + px)u' + pu] - v\mathfrak{a}_2[(P + px)v' + pv] \\
M_1' &= M_2(b - a_2)D + (P + px)u + pwh - D\mathfrak{a}_2[(P + px)v' + pv] \\
M_2' &= - M_1(b - a_1)D + (P + px)v + D\mathfrak{a}_1[(P + px)u' + pu] \\
D' &= M_1(a_2 - a_1)M_2 + pvh + M_1\mathfrak{a}_2[(P + px)v' + pv] \\
&\quad - M_2\mathfrak{a}_1[(P + px)u' + pu]
\end{aligned}$$

mit den 6 unbekannten Funktionen $u$, $v$, $w$, $M_1$, $M_2$, $D$.

Bei der Integration erscheinen 6 Konstante, also sind 6 Grenzangaben nötig:

für $x = 0$ ist $M_1 = PwH$, $M_2 = 0$, $D = PvH$,

„ $x = l$ „ $u = 1$, $v = 0$, $w = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $u$ |
| $vbD$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 7 | $u'$ |
| | 2 | $v$ |
| $\dfrac{-ubD + \varkappa a_2 M_2 + pv\varkappa a_2}{1-(P+px)\varkappa a_2}$ . . . . . . . . . . . . . . | 8 | $v'$ |
| $-bD^{(n-1)}$ | 16 | $v^{(n)}$ |
| | 3 | $w$ |
| $-va_2M_2 - v\mathfrak{a}_2[(P+px)v' + pv]$ . . . . . . . . . . | 9 | $w'$ |
| | 4 | $M_1$ |
| $M_2(b-a_2)D + (P+px)u + pwh - D\mathfrak{a}_2[(P+px)v' + pv]$ . | 10 | $M_1'$ |
| $p$ | 13 | $M_1''$ |
| | 5 | $M_2$ |
| $-M_1bD + (P+px)v$; aus 8 ist $-bD$ durch $v'$ ersetzbar . . | 11 | $M_2'$ |
| $\binom{n-1}{2}M_1''v^{(n-2)} + (n-1)M_1'v^{(n-1)} + (n-1)pv^{(n-2)} + Pv^{(n-1)}$ | 14 | $M_2^{(n)}$ |
| | 6 | $D$ |
| $M_1a_2M_2 + pvh + M_1\mathfrak{a}_2[(P+px)v' + pv]$ . . . . . . | 12 | $D'$ |
| $\binom{n-1}{2}M_1''a_2M_2^{(n-3)} + (n-1)M_1'a_2M_2^{(n-2)} + phv^{(n-1)} + \binom{n-1}{2}M_1''\mathfrak{a}_2[(n-2)pv^{(n-3)} + Pv^{(n-2)}] + (n-1)M_1'\mathfrak{a}_2[(n-1)pv^{(n-2)} + Pv^{(n-1)}]$. | 15 | $D^{(n)}$ |

Letztere 3 Angaben wollen wir für die Rechnung auch auf den Anfangspunkt beziehen, d. h. $u_0$, $v_0$, $w_0$ als gegeben annehmen, und diese zum Schluß aus $u_l = 1$, $v_l = 0$, $w_l = 0$ bestimmen. Dann lassen sich mit diesen Angaben aus den Differentialgleichungen und deren Ableitungen beliebig hohe Ableitungen der gesuchten Funktionen für den Anfangspunkt ermitteln, und damit die Funktionen selbst nach der Mac-Laurinschen Reihe entwickeln.

Bevor wir jedoch daran gehen, wollen wir uns eine außerordentliche Vereinfachung dadurch verschaffen, daß wir die Durchbiegung des Trägers bei der Knickbelastung als verschwindend annehmen, also

$$a_1 = 0 \text{ und } \mathfrak{a}_1 = 0$$

setzen; da praktisch tatsächlich nur unmerkliche Durchbiegungen zu-

$x = 0$, $P =$ Knicklast

1

0, auch alle weiteren Ableitungen $= 0$

$v_0$

$-b\dot{P}Hv_0$

$$-\tfrac{1}{4}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)a_2bp^2v_0^{(n-6)} - \\ -(n-2)(n-3)(n-4)a_2bpPv_0^{(n-5)}-(n-2)(n-3)a_2bP^2v_0^{(n-4)}- \\ -bphv_0^{(n-2)}-\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)^2a_2bp^2v_0^{(n-4)}- \\ -\tfrac{1}{2}(n-2)(3n-7)a_2bpPv_0^{(n-3)}-(n-2)a_2bP^2v_0^{(n-2)}.$$

0

0, auch alle weiteren Ableitungen $= 0$

0

$P$

$p$, alle weiteren Ableitungen $= 0$

0

$Pv_0$

$\binom{n}{2}pv_0^{(n-2)} + nPv_0^{(n-1)}$

$PHv_0$

$phv_0$

$$\binom{n-1}{2}\binom{n-3}{2}a_2p^2v_0^{(n-5)}+2\binom{n-1}{2}\cdot(n-3)a_2pPv_0^{(n-4)}+ \\ +(n-1)(n-2)a_2P^2v_0^{(n-3)}+phv_0^{(n-1)}+\binom{n-1}{2}(n-2)\,a_2p^2v_0^{(n-3)}+ \\ +\left[(n-1)^2+\binom{n-1}{2}\right]a_2pPv_0^{(n-2)}+(n-1)a_2P^2v_0^{(n-1)}.$$

---

gelassen werden, ist der dadurch begangene Fehler sehr klein. Übrigens bleiben die Resultate ganz genau für den Fall, daß der Träger ursprünglich etwas aufgebogen, erst durch die Knickbelastung gerade wird.

Man erhält, um die Entwicklung kurz anzudeuten

$$u = u_0 + \frac{x}{1!}(v_0^2bPH) + \frac{x^2}{2!}(\cdots,$$

$$v = v_0 + \frac{x}{1!}\left(\frac{-u_0bPv_0H+pv_0w_0a_2}{1-Pw_0a_2}\right)+\frac{x^2}{2!}(\cdots,$$

$$w = w_0 + \frac{x}{1!}\left(Pv_0a_2\frac{u_0bPv_0H-pv_0w_0a_2}{1-Pw_0a_2}-pv_0^2a_2\right)+\frac{x^2}{2!}(\cdots,$$

$M_1 =$ usw.,

wo $u_0$, $v_0$, $w_0$ zu bestimmen[1]) sind aus

$$u_l = 1 = u_0 + \frac{l}{1!}(v_0^2 b P H) + \frac{l^2}{2!}(\cdots,$$

$$v_l = 0 = v_0 + \frac{l}{1!}\left(\frac{-u_0 b P v_0 H + p v_0 w_0 \mathfrak{a}_2}{1 - P w_0 \mathfrak{a}_2}\right) + \frac{l^2}{2!}(\cdots$$

$$w_l = 0 = w_0 + \frac{l}{1!}\left(P v_0 \mathfrak{a}_2 \frac{u_0 b P v_0 H - p v_0 w_0 \mathfrak{a}_2}{1 - P w_0 \mathfrak{a}_2} - p v_0^2 \mathfrak{a}_2\right) + \frac{l^2}{2!}(\cdots$$

Zur gesuchten Knickformel gelangen wir nun in folgender Weise: Bei der Bestimmung der Ableitungen zeigt sich, daß die von $v$ durchwegs Potenzen von $v_0$ enthalten, wonach die vorletzte Gleichung geschrieben werden kann

$$0 = v_0\left[1 + \frac{l}{1!}\left(\frac{-u_0 b P H + p w_0 \mathfrak{a}_2}{1 - P w_0 \mathfrak{a}_2}\right) + \frac{l^2}{2!}(\cdots\right].$$

Sie besagt: entweder ist $v_0 = 0$, der Träger knickt nicht aus, sondern bleibt im labilen Gleichgewicht; oder es ist für das wirkliche Ausknicken der andere Faktor

$$1 + \frac{l}{1!}\frac{v_0'}{v_0} + \frac{l^2}{2!}\frac{v_0''}{v_0} + \cdots = 0.$$

Wird in dieser Gleichung für den Beginn des Ausknickens

$$u_0 = 1,\ v_0 = 0,\ w_0 = 0$$

gesetzt, so geht sie in die gesuchte Beziehung zwischen Trägerverhältnissen und Knickbelastung über. Da uns nur dies interessiert, können wir bei der Ermittelung der Ableitungen gleich alle Glieder weglassen, welche $v_0^2$, $v_0^3$ usw., oder $w_0$, $w_0^2$ usw. enthalten. Der Rechnungsgang ist dann ein verhältnismäßig einfacher und ist im folgenden aus der Numerierung ersichtlich. (Siehe S. 300 u. 301 oben.)

Der so erhaltene Ausdruck für $v_0^{(n)}$ ist in die Gleichung

$$0 = 1 + \frac{l^1}{1!}\frac{v_0'}{v_0} + \frac{l^2}{2!}\frac{v_0''}{v_0} + \cdots$$

einzuführen, und es folgt, wenn für $l^n \frac{v_0^{(n)}}{v_0} = A_n$ geschrieben wird, die gesuchte Knickformel in der Form:

$$\begin{cases} 0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!}[A_n = -\frac{1}{4}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)x^2 A_{n-6} - \\ - (n-2)(n-3)(n-4)xXA_{n-5} - (n-2)(n-3)X^2 A_{n-4} - yA_{n-2} - \\ - \frac{1}{2}(n-2)(n-3)^2 \mathfrak{x}^2 A_{n-4} - \frac{1}{2}(n-2)(3n-7)\mathfrak{x}\mathfrak{X} A_{n-3} - \\ - (n-2)\mathfrak{X}^2 A_{n-2}],\quad A_0 = 1,\quad A_1 = -Y; \end{cases}$$

---

1) Diese Bestimmung ist freilich allgemein nicht möglich.

dabei bedeutet abkürzungsweise

$$x = \sqrt{a_2 b p l^3},\quad X = \sqrt{a_2 b P l^2},\quad y = bhpl^2,\quad Y = bHPl,\quad \mathfrak{x} = \sqrt{\mathfrak{a}_2 b p l^3},$$
$$\mathfrak{X} = \sqrt{\mathfrak{a}_2 b P l}.$$

An eine direkte Verwendung dieser äußerst verwickelten Formel ist nicht zu denken. Um ein Bild von ihr zu gewinnen, wollen wir die beiden Sonderfälle, daß bloß $p$ oder bloß $P$ wirkt, graphisch darstellen. Die die Schiebung berücksichtigenden Glieder mit $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{x}$ können wir dabei ruhig weglassen (vgl. Anm. S. 298). Dann ist entwickelt für bloßes $P$

$$Y = \frac{1 - \frac{X^2}{3\cdot 4} + \frac{X^4}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{X^6}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \cdots}{1 - \frac{X^2}{4\cdot 5} + \frac{X^4}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{X^6}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots}$$

und für bloßes $p$

$$0 = 1 - \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} - \frac{6x^2 + y^3}{6!} + \frac{96x^2y + y^4}{8!} - \frac{516x^2y^2 + y^5}{10!} +$$
$$+ \frac{7560x^4 + 1776x^2y^3 + y^6}{12!} - \frac{292680x^4y + 4746x^2y^4 + y^7}{14!} +$$
$$+ \frac{3391776x^4y^2 + 10752x^2y^5 + y^8}{16!} -$$
$$- \frac{82555200x^6 + 22785696x^4y^3 + 21672x^2y^6 + y^9}{18!} + \cdots.$$

Ist $H = 0$ bezw. $h = 0$, so ergeben sich der Eulerschen ganz ähnliche Knickformeln:

$$P = \frac{4{,}013}{\sqrt{a_2 b l^2}},$$

und

$$pl = \frac{12{,}81}{\sqrt{a_2 b l^2}}.$$

Darnach beträgt die gleichmäßige Knicklast rund das 3,2fache der Einzellast, welches Verhältnis auch für die einseitig eingespannte Säule gilt.[1])

1) Die Knickformel für diese Säule mit Einzellast $P$ und gleichmäßiger Last $pl$ lautet mit Vernachlässigung der den Schub berücksichtigenden Glieder, wenn die bekannte Größe $\frac{1}{EI} = a$ gesetzt wird:

$$0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!}[A_n = -aPl^2A_{n-2} - (n-2)apl^3A_{n-3}],\quad A_0 = 1,\quad A_1 = 0.$$

Ähnliche zusammengesetzte Säulenknickprobleme bereiten, nach dem für den Träger gegebenen Muster behandelt, keine Schwierigkeiten, sofern nicht Unstetigkeiten stören.

Die beiden Formeln $(X, Y)$ und $(x, y)$ können wir durch Kurven darstellen. Dabei empfiehlt sich horizontal $\frac{Y}{X} = \sqrt{\frac{b}{a_2}} \cdot \frac{H}{l}$ bezw.

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{b}{a_2}} \cdot \frac{h}{l},$$

und vertikal

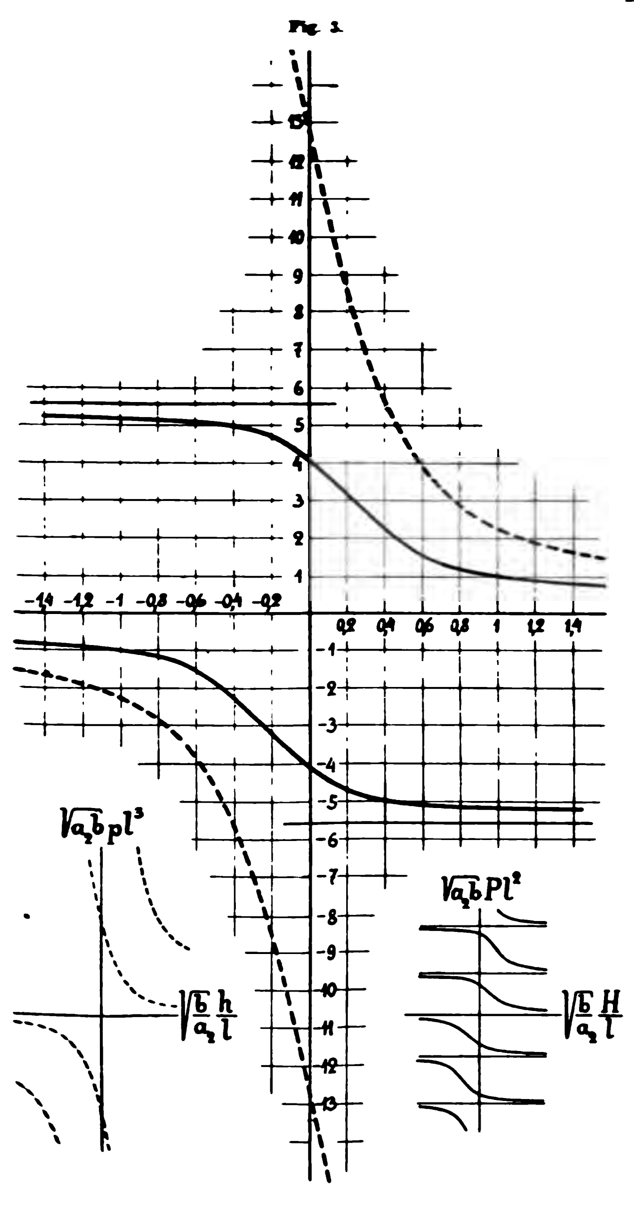
$$X = \sqrt{a_2 b} \cdot Pl^2$$

bezw.

$$x = \sqrt{a_2 b} \cdot pl^3$$

aufzutragen. Die Arbeit gestaltet sich besonders für die $(x, y)$-Kurve sehr mühsam. Wie die beiden Skizzen Fig. 3 andeuten, bestehen beide Linienzüge aus unendlich vielen Ästen, und sind so symmetrisch, daß eine Drehung in der Ebene um 180° das alte Bild ergibt. Die $(P, H)$-Kurve ist der cotangens-Linie ähnlich, freilich sind die Äste und die Asymptotenabstände nicht gleichbleibend. Die $(p, h)$-Kurve hat nur die Horizontalachse als allen Ästen gemeinsame Asymptote, die anderen Astseiten verlaufen parabelartig.

Fig. 3.




Von wirklicher Bedeutung sind nur die in Fig. 3 genau verzeichneten ersten Äste der beiden Kurven, sie entsprechen der stabilen Knicklage. Die weiteren Äste bedeuten die sehr interessanten theoretisch

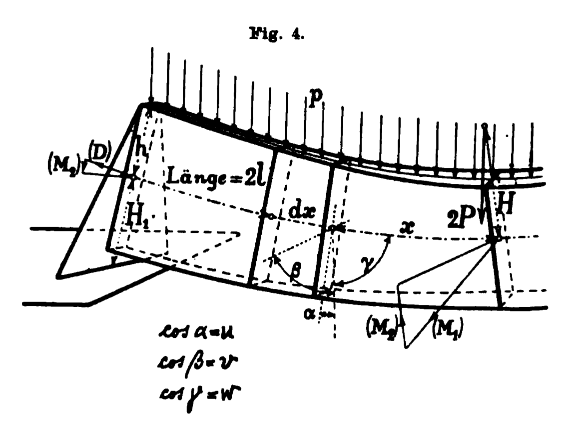
möglichen labilen Gleichgewichtsfälle mit mehreren Falten, wie sie die Rechnung auch bei der Säule oder der dünnwandigen Röhre ergibt.

Außer den besprochenen beiden Grenzfällen können beliebige Zwischenfälle als Kurven aufgetragen werden. Wir können z. B. in der allgemeinen Formel $H = 0$ und $h = 0$ annehmen, oder allgemeiner den Höhen $H$ und $h$, also $\frac{Y}{X}$ und $\frac{y}{x}$ bestimmte Werte beilegen. Es ist bemerkenswert, daß die Äste der dann verzeichneten $(X, x)$-Linie in gewissen Grenzen von parallelen Geraden wenig abweichen. Daraufhin kann die Näherungsformel aufgestellt werden

$$P \sim P_a\left(1 - \frac{p}{p_a}\right), \quad \text{oder} \quad p \sim p_a\left(1 - \frac{P}{P_a}\right);$$

dabei bedeutet $P_a$ bezw. $p_a$ die alleinige Einzel- bezw. gleichmäßige Last, die den Träger zu knicken vermag, und die der Fig. 3 entnommen werden kann. Damit ist eine brauchbare Annäherung zur exakten Formel gefunden.

**B. Prismatischer freiaufliegender Träger** mit gleichmäßiger Last $p$ pro Längeneinheit, angreifend in der Höhe $h$, und Einzellast $2P$ in der Trägermitte, angreifend in der Höhe $H$ über der Stabachse (Ort der Querschnittsschwerpunkte).




Den geknickten Träger mit beliebig zu denkendem Querschnitt zeigt Fig. 4; eine Querschnittshauptachse sei vertikal, denn sonst beginnt die seitliche Ausbiegung sofort mit der Belastung. Die Art des freien Auflagers stellt sich als gleichgültig heraus, sofern die Durchbiegung vor dem Ausknicken verschwindend ist. Als Urvariable diene die Stabachsenlänge $x$ von der Trägermitte gemessen.

Die grundlegenden Beziehungen ergeben sich in gleicher Form wie beim Freiträger, nur haben $M_1$, $M_1'$, $M_2$, $M_2'$ die entgegengesetzten Vorzeichen. Die Durchbiegung vor dem Ausknicken dürfen wir wieder außer Betracht lassen, also

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_1 = 0$$

setzen. Außerdem wollen wir diesmal zur Vereinfachung die die Schiebung

berücksichtigenden Glieder, als praktisch meist verschwindend, vernachlässigen (vgl. Anm. S. 298), also $\mathfrak{a}_2 = 0$ setzen.

Darnach haben wir von folgendem Differentialgleichungssystem auszugehen:

$$\begin{aligned}
u' &= vbD\\
v' &= -ubD - wa_2M_2\\
w' &= -va_2M_2\\
M_1' &= M_2(b - a_2)D - (P + px)u - pwh\\
M_2' &= -M_1bD - (P + px)v\\
D' &= M_1a_2M_2 + pvh.
\end{aligned}$$

Alle 6 nötigen Grenzangaben müssen an einer Trägerhälfte gefunden werden, da die zweite Hälfte durch einen Unstetigkeitspunkt von der ersten getrennt ist. Wir finden:

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $u$ |
| $vbD$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 7 | $u'$ |
| | 2 | $v$ |
| $-ubD - wa_2M_2$ . . . . . . . . . . . . . . . . | 8 | $v'$ |
| $-bD^{(n-1)}$ | 16 | $v^{(n)}$ |
| | 3 | $w$ |
| $-va_2M_2$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 9 | $w'$ |
| | 4 | $M_1$ |
| $M_2(b - a_2)D - (P + px)u - pwh$ . . . . . . . . . . | 10 | $M_1'$ |
| $-p$ | 13 | $M_1''$ |
| | 5 | $M_2$ |
| $-M_1bD - (P + px)v$; aus 8 ist $-bD$ durch $v'$ ersetzbar . . | 11 | $M_2'$ |
| $\binom{n-1}{2}M_1''v^{(n-2)} + (n-1)M_1'v^{(n-1)} + M_1v^{(n)} - (n-1)pv^{(n-2)} - Pv^{(n-1)}$ | 14 | $M_2^{(n)}$ |
| | 6 | $D$ |
| $M_1a_2M_2 + pvh$ . . . . . . . . . . . . . . . . . | 12 | $D'$ |
| $\binom{n-1}{2}M_1''a_2M_2^{(n-3)} + (n-1)M_1'a_2M_2^{(n-2)} + M_1a_2M_2^{(n-1)} + phv^{(n-1)}$ | 15 | $D^{(n)}$ |

für $x = 0$ ist $w = 0$, $D = PvH$, Horizontalmom. $= 0 = M_1 v - M_2 u$;

„ $x = l$ „ $v = 0, M_1 = (P + pl) w H_1$, Reibungsmom. $= 0 = M_2 u + Dw$.

Die Überlegung, welche zur Ausgangsgleichung für die Knickformel führt:

$$0 = 1 + \frac{l}{1!}\frac{v_0'}{v_0} + \frac{l^2}{2!}\frac{v_0''}{v_0} + \cdots,$$

ist wie beim Freiträger; die Gleichung geht in die Knickformel über durch Einsetzen der für den Ausknickbeginn geltenden Werte

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad M_{1_0} = Pl + \frac{pl^2}{2}.$$

Werden diese Werte schon bei der Bestimmung der Ableitungen verwendet, so sind Glieder mit $v_0^2$, $v_0^3$ .. gleich wegzulassen, und der Rechnungsgang gestaltet sich wie folgt:

$x = 0$, $P =$ Knicklast.

1

0, auch alle weiteren Ableitungen $= 0$

$v_0$

$-bPHv_0$

$-\frac{1}{4}(n-2)(n-3)(n-4)\cdot(n-5)a_2bp^2v_0^{(n-6)} -$
$-(n-2)(n-3)(n-4)a_2bpPv_0^{(n-5)} - (n-2)(n-3)a_2b\left(P^2 - pPl - \frac{p^2l^2}{2}\right)v_0^{(n-4)} +$
$+ 2(n-2)a_2b\left(P^2l + \frac{pPl^2}{2}\right)v_0^{(n-3)} - \left[a_2b\left(Pl + \frac{pl^2}{2}\right)^2 + bph\right]v_0^{(n-2)}$

0

0, auch alle weiteren Ableitungen $= 0$

$Pl + \frac{pl^2}{2}$

$-P$

$-p$, alle weiteren Ableitungen $= 0$

$\left(Pl + \frac{pl^2}{2}\right)v_0$

$-Pv_0 + \left(Pl + \frac{pl^2}{2}\right)v_0'$

$-\binom{n}{2}pv_0^{(n-2)} - nPv_0^{(n-1)} + \left(Pl + \frac{pl^2}{2}\right)v_0^{(n)}$

$PHv_0$

$\left[a_2\left(Pl + \frac{pl^2}{2}\right)^2 + ph\right]v_0$

$\binom{n-1}{2}\cdot\binom{n-3}{2}a_2p^2v_0^{(n-5)} + 2\binom{n-1}{2}(n-3)\cdot a_2pPv_0^{(n-4)} +$
$+(n-1)(n-2)a_2\left(P^2 - pPl - \frac{p^2l^2}{2}\right)v_0^{(n-3)} - 2(n-1)a_2\left(P^2l + \frac{pPl^2}{2}\right)v_0^{(n-2)} +$
$+\left[a_2\left(Pl + \frac{pl^2}{2}\right) + ph\right]v_0^{(n-1)}$

Durch Einführen des für $v_0^{(n)}$ gefundenen Ausdruckes in die Gleichung

$$0 = 1 + \frac{l}{1!}\frac{v_0'}{v_0} + \frac{l^2}{2!}\frac{v_0''}{v_0} + \cdots$$

folgt die gesuchte Knickformel

$$\left\{\begin{aligned} 0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!}\Big[A_n &= -\tfrac{1}{4}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)x^2 A_{n-6} - \\ &-(n-2)(n-3)(n-4)xXA_{n-5} - (n-2)(n-3)\left(X^2 - xX - \frac{x^2}{2}\right)A_{n-4} + \\ &+(n-2)(2X^2+xX)A_{n-3} - \left(\left(X+\frac{x}{2}\right)^2 + y\right)A_{n-2}\Big],\; A_0 = 1,\; A_1 = -Y; \end{aligned}\right.$$

dabei bedeutet

$$x = \sqrt{a_2 b p l^3},\quad X = \sqrt{a_2 b P l^2},\quad y = bhpl^2,\quad Y = bHPl.$$

Die Formel ist verwickelter als beim Freiträger. Wir wollen uns nur die beiden einfachsten Fälle ansehen:

Für bloße Einzellast, angreifend in der Stabachse, kann die Entwicklung in die Form gebracht werden

$$0 = 1 - \frac{X^2}{4} + \frac{X^4}{4\cdot 5\cdot 8} - \frac{X^6}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12} + \cdots,$$

daraus folgt als kleinste Wurzel $X^2 = 4.480$, also

$$\mathrm{P} = \frac{16{,}93}{\sqrt{a_2 b}\, L^2},$$

wenn $\mathrm{P} = 2P$ die ganze Einzellast, und $L = 2l$ die ganze Trägerlänge bezeichnet. Der freiaufliegende Träger trägt rund die vierfache Last des Freiträgers, also beinahe wie bei der einfachen Biegung.

Für bloße gleichmäßige Last, angreifend in der Stabachse, folgt aus der etwas umständlichen Entwicklung $X^2 = 12{,}38$, also

$$pL = \frac{28{,}15}{\sqrt{a_2 b}\, L^2}.$$

Der freiaufliegende Träger trägt rund die 2,2 fache Last des Freiträgers, und rund das $1\frac{2}{3}$ fache als im Falle der Einzellast.

---

Mit der Behandlung des Freiträgers und freiaufliegenden Trägers wollen wir uns begnügen.

**Versuche.**

Zum Schluß seien als Kontrolle der Rechnung einige Versuche mitgeteilt, welche mit einer genau ebenen Blattfeder aus gehärtetem Stahl von rund 30 cm Länge, 3,2 cm Breite und 0,06 cm Dicke ausgeführt wurden.

Längen in cm, Kräfte in kg.

| | |
|---|---|
| Biegeversuch | Freiträgerlänge $l = 26{,}9$, Endlast $P = 0{,}03$; Vergrößerung der Durchbiegung $f = 1{,}63$ | aus $f = bP\frac{l^3}{3}$ $\frac{1}{b} = 121{,}2$ |
| Torsionsversuch | Stablänge $l = 26{,}9$, Drehmoment $M = 2{,}11$; Verdrehung $\varphi = 17{,}9^0 = 0{,}3125$ abs. | aus $\varphi = clM$ $\frac{1}{c} = 181{,}7$ |

| Belastungsart mit Trägerlänge $l = 26{,}9$ | | | $P_k$ Versuch | $P_k$ $\frac{x}{\sqrt{bcl^2}} = 0{,}205x$ | $x$ aus d. Versuch korrigiert | $x$ Rechnung |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Freiträger | Endlast | | 0,805 | 0,828 | | 4,018 |
| Freiträger | Gleiche Lasten in gleichen Abständen | 2 | 1,37 | | 6,78 | |
| Freiträger | Gleiche Lasten in gleichen Abständen | 4 | 1,88 | | 9,26 | |
| Freiträger | Gleiche Lasten in gleichen Abständen | 8 | 2,23 | | 11,0 | |
| Freiträger | Gleichmäß. Last | | (2,60) | 2,63 | | 12,81 |
| Freiträger | Endlast in einer Höhe über der Achse | 10,6 | 0,482 | 0,501 | | Aus Fig. 3. |
| Freiträger | Endlast in einer Höhe über der Achse | 5,4 | 0,633 | 0,653 | | |
| Freiträger | Endlast in einer Höhe über der Achse | − 18,4 | 1,03 | 1,03 | | |
| Freiauflieg. Träger | Mittellast | | 3,42 | 3,47 | | 16,93 |
| Freiauflieg. Träger | Gleiche Lasten in gleichen Abständen | 3 | 4,52 | | 22,3 | |
| Freiauflieg. Träger | Gleiche Lasten in gleichen Abständen | 7 | 5,15 | | 25,4 | |
| Freiauflieg. Träger | Gleichmäß. Last | | (5,75) | 5,77 | | 28,15 |

Als Freiträger wurde diese Feder mit einem Ende auf ein Metallstück aufgelötet, und damit am Werktisch seitlich horizontal festgeschraubt. Die Lasten wurden in sehr kleinen, in der Stabachse liegenden Bohrungen mit Stahldrahtösen aufgehängt. Mit dem Tisch

wurde der Träger bei sehr kleiner Überschreitung der Knicklast so eingestellt, daß der Ausschlag nach beiden Seiten gleich war. Durch Verminderung der Last, bis der Täger gerade noch in der Mittellage blieb, ergab sich die Knicklast. Das geringe Eigengewicht wurde schätzungsweise berücksichtigt. Die fünfte Versuchszahl ergibt sich in der Weise, daß von den früheren Versuchen z. B. die Teillast als Abszisse und die Gesamtlast als Ordinate aufgetragen, und die durchgelegte Kurve bis zum Schnitt mit der Ordinatenachse verlängert wird. Bei den drei weiteren Versuchen wurde die Endlast in Bohrungen eines besonderen Querstückes aufgehängt.

Als frei aufliegender Träger wurde die Blattfeder an den Enden mit senkrecht zur Blattfläche stehenden Querstücken ausgestattet, und daran auf vier Drähten horizontal aufgehängt, und im übrigen wie oben verfahren. Die letzte Versuchszahl ergibt sich wieder aus den drei vorherigen.

Zur Anwendung der Knickformel wurden ferner durch einen Biegeversuch b, und durch einen Torsionsversuch $c$ ermittelt. Denn die gerechneten Werte für $b$ und $c$ sind wegen nicht genauer Kenntnis des Elastizitätsmoduls usw. ungenau.

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung mit der Rechnung eine sehr gute (1. und 2. Kolonne); die geringen Unterschiede erklären sich durch Unvollkommenheiten der Versuchsanordnung, welche die Knicklast kleiner erscheinen lassen.

Der Bau der einfachen Knickformel bleibt für andere Belastungsfälle der gleiche, es empfiehlt sich deshalb, die entsprechenden Werte der Konstante aus Versuchen zu ermitteln (oben vorletzte Kolonne). Denn das hier eröffnete Gebiet der Trägerknickung ist umfangreicher als das der Trägerbiegung, und es wird in vielen Fällen die Rechnung wegen unmöglicher Gewinnung brauchbarer Grenzbedingungen überhaupt nicht gelingen.

---

## Berichtigung zu Heft 1/2.

In dem Beispiel auf S. 138 liegt die Knickspannung nicht wie angegeben vor der Proportionalitätsgrenze, sondern nahe der Quetschgrenze; da sind $E$ und $G$ nicht mehr konstant, und es müßte deren Verlauf bekannt sein. Die angegebene Knickspannung ist richtig bei 12 m Länge der freien Säule, der Fehler ist dann $\sim 1\,\%$.

Die Schiebung ist also nur jenseits der Proportionalitätsgrenze von merklichem Einfluß; früher kommt sie, in Übereinstimmung mit den Tetmajerschen Versuchen, bloß in Betracht bei weiter Nietteilung bzw. bei weitmaschigem oder gar unkorrektem Fachwerk der Säule.

F. Nußbaum.

# Bücherschau.

**K. Schwarzschild. Untersuchungen zur geometrischen Optik.** I. Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs. Mit 6 Fig. 4°, 31 S. — II. Theorie der Spiegelteleskope. Mit 9 Fig. 4°, 28 S. — III. Über die astrophotographischen Objektive. Mit 10 Fig. 4°, 54 S. Abh. d. K. Ges. d. Wiss., Gött., Math.-Phys. Klasse. Neue Folge. Bd. IV, Nr. 1, 2, 3. Göttingen 1905.

Diese drei Abhandlungen verfolgen ein gemeinsames Ziel: es soll ein Überblick über astronomisch wichtige optische Konstruktionen gegeben, ihr Rang der Brauchbarkeit leicht von vornherein beurteilt und für bestimmte Zwecke sicher eine Auswahl getroffen werden.

Die Darstellung stützt sich auf die von Hamilton eingeführte „charakteristische Funktion“, die man nach dem Vorgange von Bruns als Eikonal bezeichnet. Es wird darunter die optische Weglänge verstanden, die ein Lichtstrahl von einem Punkt eines optischen Systems zum andern durchläuft, oder: das Eikonal ist eine Funktion der Lage der beiden betrachteten Punkte. Die Praxis entwickelt das Eikonal in Reihen, die meist so rasch konvergieren, daß schon wenige Glieder ein hinlänglich genaues Resultat liefern. Bei dieser Entwicklung treten nun 5 Glieder dritter Ordnung auf und deren Koeffizienten entsprechen ebenso viel Fehlern dritter Ordnung für ein optisches System. Sie tragen der Reihe nach die Bezeichnung sphärische Aberration, Verzeichnung, Koma, tangentiale und sagittale Bildwölbung. Die Ausdehnung der gleichen Untersuchung auf die Fehler fünfter Ordnung zeigt weiter, daß ihrer 9 existieren, im Gegensatz zu Petzval, der die Zahl zu 12 angab. Die vollständige Berechnung der Fehler dritter Ordnung für ein beliebiges zentriertes Linsensystem führt auf durchsichtige Weise zu den Seidelschen Formeln und ermöglicht es, optische Systeme zu berechnen, in denen ein oder mehrere Fehler dritter Ordnung verschwinden.

Eine praktische Anwendung des zuvor Entwickelten bringt der II. und III. Teil. Die II. Abhandlung ist der Theorie der Spiegelteleskope gewidmet, die vor den Refraktoren die Vorzüge der Billigkeit und der natürlichen Achromasie besitzen und die vermöge der Reflexionsfähigkeit des Silberbelags der Glasspiegel bis weit ins Ultraviolett hinein sich trefflich zu photographischen Aufnahmen eignen. Nachteilig fällt bei ihnen nur das allzu geringe brauchbare Gesichtsfeld in die Wagschale. Durch das Studium der Fehler dritter Ordnung für einen einzelnen Spiegel und für ein

beliebiges Spiegelsystem läßt sich aber auch dieser Nachteil des Spiegelteleskops unterdrücken und ein Instrument konstruieren, das aus einem großen und einem ihm gegenüberstehenden kleineren Spiegel besteht, der das Bild auf die zwischen beiden Spiegeln befindliche photographische Platte wirft. Die gegenseitigen Verdeckungen (Silhouettierung) der Spiegel und der in der Bildebene angebrachten Platte bedingen das beste Resultat dann, wenn der Durchmesser des kleinen Spiegels ungefähr die Hälfte des großen beträgt. Bildbeschaffenheit und Feldausdehnung kommen bei einem Verhältnis 1 : 3 von Öffnung zu Brennweite mindestens ebenso günstig heraus, wie bei den für die Himmelsaufnahme international adoptierten Standardrefraktoren, die aber nur ein Öffnungsverhältnis von 1 : 10 aufweisen. Die Konstruktion eines Spiegelsystems beliebig großer Öffnung, das auch für schiefe Strahlen strenge frei ist von sphärischer Aberration und die Sinusbedingung erfüllt, gelingt nur, wenn man die sphärischen Spiegel verläßt und für beide Spiegel die günstigsten Meridiankurven rechnet. Dann zeigt sich, daß die Spiegelflächen einem Ellipsoid beim kleinen, einem Hyperboloid beim großen Spiegel nahe kommen und daß man hoffen darf, auf diese Weise zu brauchbaren Systemen vom Öffnungsverhältnis 1 : 1 vorzudringen.

Die III. Abhandlung löst die Aufgabe der Errechnung astrographischer Objektive, die von Fehlern dritter Ordnung möglichst frei sind. Bei solchen Objektiven paart sich gewöhnlich ein mittelgroßes Gesichtsfeld mit mittlerem Öffnungsverhältnis, Bedingungen, denen gerade die Seidelschen Formeln adaptiert sind, die weder Öffnung noch Gesichtsfeld als sehr klein annehmen. Zuerst wird die dünne Einzellinse untersucht und ihre Gestalt für die verschiedenen Fälle verschwindender Fehler abgeleitet. Bei der Zusammensetzung bestimmter Systeme und deren genauerer Diskussion stößt man nun auf ein Objektiv, das dem schon von Petzval berechneten ähnlich sieht, aber vor ihm die Freiheit der Bilder von allen Fehlern dritter Ordnung (abgesehen von der Verzeichnung) voraus hat und auch nirgends gar zu kleine Krümmungsradien verlangt. Auch aus 3 getrennten Linsen kann ein Objektiv zusammengesetzt werden, das von allen Fehlern dritter Ordnung (bis auf Verzeichnung) frei ist. Dieses modifizierte Taylorobjektiv übertrifft sogar noch den Petzvaltypus an Gesichtsfeld. — Allen Ableitungen sind numerische Beispiele und genau gezeichnete Schnitte der resultierenden Konstruktionen beigefügt, aus denen man sich über die Eigenschaften der bei bestimmten Anforderungen auszuwählenden optischen Systeme leicht zu orientieren vermag.

Straßburg i. E. WIRTZ.

# Abhandlungsregister 1905—1906.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

(Fortsetzung.)

### Thermische Ausdehnung.

**1274.** *P. Koturnickij.* Vyvod charakterističeskago uravnenija po koefficientam kubičeskago rassirenija i sžatija tel (Charakteristische Gleichung, hergeleitet aus den Ausdrücken der Koeffizienten der kubischen Ausdehnung und Zusammenziehung der Körper). J.R.P.C.G. 34. 495.

**1275.** *W. Bahrdt.* Einige Versuche zur Ausdehnung fester Körper durch die Wärme. Z.P 19. 16.

**1276.** *G. Costanzo.* Über eine neue Methode den Ausdehnungskoeffizienten von Flüssigkeiten zu bestimmen. P.Z. 7. 505.

**1277.** *G. A. Corse.* On the thermal expansion of dilute solutions of certain hydroxides. P.R.S.E. 25. 281.

**1278.** *H. F. Wiebe.* Über die Beziehung des Schmelzpunktes zum Ausdehnungskoeffizienten der starren Elemente. V.D.P.G. 8. 91; A.P.L. (4) 19. 1076.

**1279.** *J. v. Panayeff.* Über die Beziehung des Schmelzpunktes zur Wärme-, ausdehnung der Metalle. A.P.L. (4) 18. 210. — *C. L. Weber.* 868.

**1280.** *A. W. Witkowski.* Über die Ausdehnung des H. Z.K.F.G. 9. 83.

Siehe auch 729; 1319 q; 1488; 3654.

### Zustandsgleichung.

**1281.** *A. Byk.* Die Zustandsgleichungen in ihren Beziehungen zur Thermodynamik. A.P.L. (4) 19. 441.

**1282.** *G. van Iterson jun.* Ableitung einiger bekannter Formeln aus einer allgemeinen Zustandsgleichung. Z.P C. 53. 633.

**1283.** *P. Kohnstamm.* Revue des travaux récents sur l'équation d'état. J.C.P. 3. 665.

**1284.** *G. Bakker.* A propos de l'équation d'état. J.C.P. 4. 67.

**1285.** *H. Happel.* Zur Zustandsgleichung einatomiger Stoffe. N.G.G. 1905. 282.

**1286.** *J. E. Verschaffelt.* Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van Van der Waals. C.A.A. 14. 686.

**1287.** *J. E. Verschaffelt.* Contribution to the knowledge of van der Waals' ψ-surface. C.P.L. Suppl. 11—12. 3.

**1288.** *H. Moulin.* Sur un terme complémentaire de la pression intérieure dans la formle de van der Waals. S.F.P. 235. 3. B.S.F.P. 1905. 98.

**1289.** *J. B. Goebel.* Über die genauere Zustandsgleichung der Gase. Z.P.C. 47. 471; 49. 129; 50. 238.

**1290.** *A. Smits.* Bijdrage tot de kennis der px- en pT-lijnen voor het geval twee stoffen een verbinding aangaan welke in de vloeistof- en gasphase is gedissocieerd. C.A.A. 14. 192.

**1291.** *A. Smits.* Beitrag zur Kenntnis der Px- und PT-Linien für den Fall, daß zwei Stoffe eine Verbindung eingehen, welche in der Flüssigkeits- und Gasphase dissociiert. Z.P.C. 54. 513.

**1292.** *A. Smits.* Over de verborgen evenwichten in de px-doorsneden onder het eutektische punt. C.A.A. 14. 564.

**1293.** *A. Smits.* Over de verborgen evenwichten in de px-doorsneden van een binair stelsel tengevolge van het optreden van vaste stoffen. C.A.A. 14. 187.

**1294.** *A. Smits* Über die verborgenen Gleichgewichte in den px-Durchschnitten eines binären Systems, die durch das Auftreten fester Stoffe verursacht werden. Z.P.C. 54. 498.

**1295.** *C. Benedicks.* Über die Anwendbarkeit der van der Waals'schen Zustandsgleichung für den festen Zustand. Z.A.C. 47. 455.

**1296.** *L. Friederich.* Études numériques sur l'équation des fluides, détermination des constantes $a$ et $b$. J.C.P. 4. 123.

**1297.** *J. D. van der Waals.* De exakte getallenwaarden van de eigenschappen der plooipuntslijn aan de zijde der componente. C.A.A. 14. 249.

**1298.** *J. J. van Laar.* Over het verloop der plooipuntslijnen bij mengsels van normale stoffen. C.A.A. 14. 14.

**1299.** *J. J. van Laar.* Sur l'allure des courbes de plissement chez les mélanges de substances normales et les équilibres possibles entre une phase gazeuse et une ou deux phases liquides. A.M.T. (2) 10. 109.

**1300.** *J. J. van Laar.* Over het verloop der spinodale en plooipuntslijnen bij binaire mengsels van normale stoffen. C.A.A. 14. 581.

**1301.** *J. J. van Laar.* Sur l'allure des courbes spinodales et des courbes de plissement. A.N. (2) 10. 373; 11. 224.

**1302.** *A. Smits.* Over de verschijnseln die optreden wanneer de plooipuntskromme de driephasenlijn van een dissocieerende binare verbinding ontmoet. C.A.A. 14. 568.

**1303.** *A. Smits.* Über die Erscheinungen, welche auftreten, wenn die Faltenpunktskurve der Löslichkeitskurve begegnet. Z.P.C. 51. 193; 52. 587.

**1304.** *A. Smits.* Over den loop der $P$, $T$-lijnen voor vast-fluide bij standvaste samenstelling. C.A.A. 14. 866.

**1305.** *J. J. van Laar.* Les courbes de plissement et leur point double chez les mélanges dans le cas que les volumes moléculaires sont inégaux. A.M.T. (2) 10. 19.

**1306.** *J. J. van Laar.* Über den Verlauf der Schmelzkurven bei festen Lösungen (oder isomorphen Gemischen) in einem speziellen Fall. Z.P.C. 55. 435.

**1306.** *A. Batschinski.* Der orthometrische Zustand. A.P.L. (4) 19. 307.

**1307.** *E. H. Amagat.* Application de la loi des états correspondants aux chaleurs spécifiques S.F.P. 249. 2.

**1308.** *G. Bakker.* Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes und die Abweichung vom Pascalschen Gesetz in der Kapillarschicht. A.P.L. (4) 20. 981.

**1309.** *J. D. van der Waals.* Eigenschappen der kritische lijn aar de zijde der componenten. C.A.A. 14. 230.

**1310.** *H Moulin.* Relations entre le volume et le covolume. B.S.F.P. 1906. 141.

**1311.** *J. D van der Waals.* De eigenschappen der doorsneden van het saturatievlak van een binair mengsel aan den kant der componenten. C.A.A. 14. 240.

**1312.** *J. D. van der Waals.* De gedaante der dorsneden van het saturatievlak loodrecht op de $x$-as, in geval er tusschen twee temperaturen driephasendruk bestaat. C.A.A. 14. 176.

**1313.** *J. J. van Laar.* L'expression pour le potentiel moléculaire des composantes d'un mélange binaire normal dans l'état liquide. A.M.T. (2) 10. 45.

**1314.** *A. W. Porter.* On the inversion-points for a fluid passing through a porous plug and their use in testing proposed equations of state. P.M. (6) 11. 554.

**1315.** *O. Tumlirz.* Die stabilen und labilen Zustände der Flüssigkeiten und Dämpfe. S.A.W. 114. 167.

**1316.** *J. J. van Laar.* Eenige opmerkingen naar aanleiding der laatste verhandelingen von Dr. Ph. Kohnstamm. C. A.A. 14. 30.

**1317.** *A. Batschinski.* Aufstellung der Gleichung für Isopentan. A.P.L. (4) 19. 310.

Siehe auch 871; 1204; 1229.

### Dampfspannung.

**1318.** *H. v. Jüptner.* Zur Kenntnis der Dampftension. Z.P.C. 55. 738.

**1319.** *P. Lehmann.* Dampf- und Lösungstension an krummen Flächen. P.Z. 7. 392.

**1319a.** *A. Speranski.* Über den Dampfdruck der festen Lösungen. Z.P.C. 46. 70; 51. 45.

**1319b.** *A. Smits.* Beitrag zur Kenntnis des Verlaufs der Dampfspannungserniedrigung bei wäßrigen Lösungen. Z.P.C. 51. 33.

**1319c.** *F. A. H. Schreinemakers.* Dampfdrucke im System: Benzol, Tetrachlorkohlenstoff und Äthylalkohol II. Z. P.C. 48. 257.

**1319d.** *J. J. van Laar.* Über die Dampftension von flüssigen Gemischen z. B. v. Br. und J, bei Annahme einer teilweisen (im Grenzfall nicht- oder total-) dissoziierten Verbindung. Z.P.C. 47. 129.

**1319e.** *J. v. Zawidzki.* Über das „Regnault'sche Gesetz" von Duhem. Z.P.C. 46. 21. — *P. Duhem* 48. 241.

Siehe auch 923; 1357.

### Gastheorie.

**1319f.** *E. Borel.* Sur les principes de la théorie cinétique des gaz. A.E.N. (3) 23. 9.

**1319g.** *H. Poincaré.* Réflexions sur la théorie cinétique des gaz. S.F.P. 250. 2; B.S.F.P. 1906. 150; J.P. (4) 5. 369.

**1319h.** *E. Varburg.* Kinetičeskaja teorija gazov (Über die kinetische Theorie der Gase). R.P.W. 3. 70.

**1319i.** *Lord Rayleigh*, *J. H. Jeans.* The dynamical theory of gases and of radiation. N. 72. 54; 101; 243.

**1319k.** *S. H. Burbury.* The *H*-theorem and Professor J. H. Jeans's dynamical theory of gases. P.M. (6) 11. 455.

**1319l.** *W. Heuse.* Ein Vorlesungsversuch zur kinetischen Gastheorie. Z.P. 19. 220.

**1319m.** *G. Zemplen.* Sur l'impossibilité des ondes de choc négatives dans les gas. C.R. 141. 710; *P. Duhem* 811.

**1319n.** *Jouguet.* Sur l'accélération des ondes de choc sphériques. C.R. 142. 1034.

**1319o.** *Lord Rayleigh.* On the momentum and pressure of gaseous vibrations and on the connexion with the virial theorem. P.M. (6) 10. 364.

**1319p.** *S. H. Burbury.* The diminution of entropy according the kinetic theory of gases. R.B.A. 75. 338.

**1319q.** *G. F. C. Searle.* The expansion of a gas into a vacuum and the determination of the specific heat at constant pressure for gases. P.C.P.S. 13. 241.

**1319r.** *G. H. Meeker.* On the distribution of velocity among the members of a group of gas-molecules. J.F.I. 159. 383.

**1319s.** *O. Postma.* Jets over de grootheid *H* in Boltzmanns Vorlesungen über Gastheorie. C.A.A. 14. 602.

**1320.** *P. Ehrenfest.* Bemerkungen zur Abhandlung des Herrn H. Reissner: Anwendung der Statik und Dynamik monozyklischer Systeme auf die Elastizitätstheorie. (A.P.L. (4) 9. 44). A.P.L. (4) 19. 210. — *H. Reissner* 1071.

Siehe auch 617; 634—35; 927; 1013; 1174; 1182; 1202; 1289; 1901; 3660.

### Wärmeleitung.

**1321.** *C. H. Lees.* The experimental foundations of the theory of heat conduction. R.B.A. 1905. 341.

**1322.** *J. Thovert.* Détermination de la conductibilité calorifique. C.R. 141. 717.

**1323.** *C. Niven.* On a method of finding the conductivity for heat. P.R.S.L. 76. 34.

**1324.** *F. A. Laws*, *F. L. Biskop* and *P. Mc Junkin.* A method of determining thermal conductivity. P.A.Bo. 41. 457.

**1325.** *F. M. Jaeger.* Een eenvoudige geometrische afleiding der betrekkingen welke tuschen de waargenomen en gezochte grootheden bestaan die bij de W. Voigtsche methode ter bepaling van 't warmegeleidingsvermogen van kristallen ter sprake komen. C.A.A. 14. 799.

**1326.** *L. Meitner.* Wärmeleitung in unhomogenen Körpern. A.A.W. 1906. 96.

**1327.** *G. Glage.* F. E. Neumanns Methode zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit gut leitender Körper in Stab- und Ringform und ihre Durchführung an Fe, Stahl, Ca, Ag, Pb, Sn, Zn, Messing, Neusilber. A.P.L. (4) 18. 904.

**1328.** *F. L. Bishop.* The thermal conductivity of lead. P.A.Bo. 41. 671.

**1329.** *I. Kruckenberg.* Über die physikalischen Eigenschaften schwedischer Eisenerze. A.M.A.I. 2. Nr. 1.

**1330.** *R. Weber.* La détermination de la conductibilité calorifique des liquides. B.S.V. 31. 209.

**1331.** *Dolph.* Comparative heat conduction and radiation of insulating varnishes. A.E.N.Y. 17. 216.

Siehe auch 519—20; 1125; 3661—62.

### Wärmestrahlung.

**1332.** *F. Hasenöhrl.* Über die thermodynamischen Gesetze der Wärmestrahlung. V.V.F.U.W. 10. 157.

**1333.** *J. H. Jeans.* A comparison of 2 theories of radiation. N. 72. 293.

**1334.** *J. H. Jeans.* On the laws of radiation. P.R.S.L. 76. 545.

**1335.** *M. Cantor.* Die Strahlung des schwarzen Körpers und das Dopplersche Prinzip. A.P.L. (4) 20. 333.

**1336.** *P. Ehrenfest.* Bemerkung zu einer neuen Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes. P.Z. 7. 527.

**1337.** *J. H. Jeans.* Bemerkung zu einer neuen Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes. P.Z. 7. 667.

**1338.** *P. Ehrenfest.* Über die physikalischen Voraussetzungen der Planckschen Theorie der irreversiblen Strahlungsvorgänge. S.A.W. 114. 1301.

**1339.** *P. Ehrenfest.* Zur Planckschen Strahlungstheorie. P.Z. 7. 528.

**1340.** *V. v. Türin.* Beiträge zur Energetik der Strahlungsenergie. A.N.L. 5. 202.

**1341.** *A. D. Denning.* A simple method of determining the radiation constant. P.P.S.L. 19. 670.

**1342.** *A. D. Denning.* A simple method of determining the radiation constant: suitable for a laboratory experiment. P.M. (6) 10. 270.

**1343.** *O. Tumlirz.* Ein Apparat zur absoluten Messung der Wärmestrahlung. J.P.R. 19. 13.

**1344.** *J. Swinburne.* The question of temperature and efficiency of thermal radiation. F.P.S.L. 20. : 3.

**1345.** *H. A. Lorentz.* Over de warmtestraling in een stelsel lichamen von overal gelijke temperatur. C.A.A. 14. 345.

**1346.** *J. T. Bottomley.* Thermal radiation at very low temperatures. R.B.A. 1905. 330.

**1347.** *N. P. Myškin.* Dviženie tela nachodjaščagosja v potoke lučistoj energii (Über die Bewegung eines im Strome der strahlenden Energie befindlichen Körpers). J.R.P.C.G. 34. 24.

**1348.** *P. Czermak.* Ein Versuch über die Reflexion der Wärmestrahlung. Z.P. 19. 233.

**1349.** *E. Aschkinaß.* Die Wärmestrahlung der Metalle. A.P.L. (4) 17. 960.

**1350.** *B. Kučera* und *B. Mašek.* Über die Strahlung des Radiotellurs. P.Z. 7. 337; 630.

**1351.** *F. Richarz.* Bemerkungen zur Theorie des Kirchhoffschen Gesetzes. Z.W.P. 1. 5.

Siehe auch 111; 1039; 1175; 1201; 1258; 1319 i; 1331; 1402; 1595—96; 1630; 1838; 1845—46; 1865—66; 2105; 2298; 2599.

### Flammen.

Siehe 1260; 1477—79; 2310; 3663.

### Explosion.

**1352.** *J. E. Petavel.* The pressure of explosions: experiments on solid and gaseous explosives. T.R.S.L. 205. 357.

Siehe auch 386; 2301—02; 3773; 3664

### Wärmemessung.

**1353.** *U. Behn.* Über die Wärmein[illegible] [illegible] 1904—05. 33.

**1354.** *H. Kamerlingh Onnes* and [illegible] On the measurement of very [illegible]ratures V. C.P.L. 85.

**1355.** [illegible] *Richards, L. J. Hender*[illegible] [illegible] *Forbes.* Über die Elimi[illegible] [illegible]mometrischer Nachwir[illegible] [illegible] Wärmeverlusten in [illegible] Z.P.C. 52. 551. — [illegible] Steinwehr 54. 428.

**1356.** [illegible] und *A. Jaquerod.* [illegible]hzienten von *H* u. [illegible] Volumen und ver[illegible] [illegible]rücken. Z.P.C. 45.

**1357.** *N. W. Travers, G. Senter* und *A. Jaquerod.* Über die Dampfdrucke von flüssigem *H* bei Temperaturen unterhalb seines Siedepunktes nach der *H*- und Heliumskala mit konstantem Volumen. Z.P.C. 45. 416; 435.

**1358.** *F. Dreyer* und *T. Rotarski.* Einige Konstanten des *p*-Azophenetols. Z.P.C. 54. 353.

Siehe auch 652; 2299; 2305—06; 3665.

### Elektrizität und Magnetismus.

**1359.** *O. Chvolson.* Sovremennoe sostojanie učenija ob električeskich i magnitnych javlenijach (Der gegenwärtige Stand der Lehre von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen). R.P.W. 3. 1.

**1360.** *A. A. Skeels.* The real nature of electricity and magnetism. J.A.E.S. 28. 368.

### Elektrizität.

**1361.** *E. Riecke.* Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität. A.Gr. (3) 9. 1; 245.

**1362.** *A. Séligmann-Lui.* Bases d'une théorie mécanique de l'électricité. J.P. (4) 5. 508.

Siehe auch 279; 478; 619; 631; 928—29; 2144; 2938—3174.

### Elektrizitätserregung.

Siehe 1386; 1606; 3480.

### Pyroelektrizität.

**1363.** *W. Voigt.* Über Pyroelektrizität an zentrisch-symmetrischen Kristallen. N.G.G. 1905. 394.

### Piezoelektrizität.

**1364.** *W. Voigt.* Über Piezoelektrizität zentrischer Kristalle. N.G.G. 1905. 431.

**1365.** *T. Tamaru.* Bestimmung der piezoelektrischen Konstanten von krystallisierter Weinsäure. N.G.G. 1905. 128.

### Hydroelektrizität.

**1366.** *E. Aselmann.* Über Elektrizitätsträger, die durch fallende Flüssigkeiten erzeugt werden. A.P.L. (4) 19. 960.

**1367.** *S. Sano.* On the electric force at any point in a liquid in which the process of diffusion is going on. P.T.M. 2. 465.

**1368.** *S. Sano.* Über die elektrische Kraft an irgend einem Punkte in einer Flüssigkeit, in welcher ein Diffusionsprozeß vor sich geht. P.Z. 7. 318.

Siehe auch 896.

### Elektrostatik.

**1369.** *C. W Oseen.* Über einige elektrostatische Probleme. A.M.A.F. 2. Nr. 5.

**1370.** *T. Levi-Civitià.* Sopra un problema d'elettrostatica che si è presentato nella costruzione dei cavi. R.C.M.P. 20. 173; 201.

**1371.** *P. W. Bridgman.* The electrostatic field surrounding two special columnar elements. P.A.Bo. 41. 617.

**1372.** *V. v. Lang.* Über das elektrostatische Drehfeld. V.B.P.C.U. 7. 110.

**1373.** *V. v. Lang.* Versuche im elektrostatischen Drehfelde. A.A.W. 1906. 119.

**1374.** *T. J. I'A. Bromwich.* Some contributions to the theory of 2 electrified spheres. M.M. (2) 35. 1.

**1375.** *H. Benndorf.* Über die Störung des homogenen elektrischen Feldes durch ein leitendes dreiachsiges Ellipsoid. A. A.W. 1906. 112.

**1376.** *V. Schaffers.* Pression électrostatique, pouvoir des pointes et vent électrique. A.S.B. 29B. 417.

**1377.** *M. P. Myškin.* Svojstva naelektrizovannago ostrija (Eigenschaften einer elektrisierten Spitze). R.P.W. 3. 55.

**1378.** *F. Kohlrausch.* Über elektrostatische Kapazität und Widerstandskapazität. V.D.P.G. 8. 151.

**1379.** *G. Ercolini.* L'elettrostrizione del caucciù. N.C.P. (5) 10. 185.

Siehe auch 478; 532; 610; 637; 1675—76; 2339; 2951; 3134.

### Elektrische Entladung.

**1380.** *E. Reiger.* Untersuchungen über Entladungen. S.M.P.E. 37. 1.

**1381.** *A. A. Trusevič.* Opyty s električeskim razrjadom (Versuche über die elektrische Entladung). R.P.W. 3. 97.

**1382.** *Langevin.* Récherches récentes sur le mécanisme de la décharge disruptive. B.S.I.E. (2) 6. 69; B.S.F.E. 1905. 25.

**1383.** *J. de Kowalski.* Les phénomènes qui accompagnent les décharges électriques de l'air. B.S.F.T. 1905. 69.

**1384.** *P. Ewers.* Die Spitzenentladung in ein- und zweiatomigen Gasen. A.P. L. (4) 17. 781.

**1385.** *J. Frank.* Über die Beweglichkeit der Ladungsträger der Spitzenentladung. V.D.P.G. 8. 252.

**1386.** *M. Toepler.* Beobachtungen im Grenzgebiete zwischen Spitzenstrom und Büschellichtbogen (Glimmstrom). A.P. L. (4) 18. 757.

**1387.** *H. Sieveking.* Beiträge zur Theorie der elektrischen Entladung in Gasen. A.P.L. (4) 20. 209.

**1388.** *L. Amaduzzi.* Scariche elettriche in gas rarefatti. N.C.P. (5) 10. 386.

**1389.** *M. Matthies.* Über die Glimmentladung in den Dämpfen von $HgCl_2$, $HgBr_2$, $HgJ_2$. A.P.L. (4) 17. 675.

Siehe auch 803; 806; 1117; 1462; 2155; 2325—28.

### Konduktoren.

**1390.** *Curiot* et *Meunier.* Recherches sur l'action des conducteurs électriques incandescents et de l'étincelle électrique dans les mélanges grisouteux. R.U.M. 10. 215.

**1391.** *G. Oliva.* Variazione di resistenze nei conduttori discontinui. B.C.N. 20. 165.

**1392.** *O. Heaviside.* The magnetic inertia of a charged conducteur in a field of force. N. 73. 582.

**1393.** *P. Genuardi.* Rappresentazioni geometriche e proprietà armoniche della resistenza equivalente in un sistema di 2 conduttori derivati. R.T.M. 2. 21.

Siehe auch 1374; 1491; 1505; 1507; 1680; 2952.

### Elektrischer Funke.

**1394.** *S. Schwedoff.* Ballistische Theorie der Funkenentladung. Die Schlagweite. A.P.L. (4) 19. 918.

**1395.** *J. Koch.* Über die Energieentwicklung und den scheinbaren Widerstand des elektrischen Funkens. A.P.L. (4) 20. 601.

**1396.** *V. K. Lebedinsky.* O dejstvii ultrafioletovago sveta na električeskuju iskru (Über die Wirkung des ultravioletten Lichts auf den elektrischen Funken). J.R.P.C.G. 34. 31.

Siehe auch 1127; 1139; 1390; 1399; 1453—54; 1672; 2961.

### Kondensatoren.

**1397.** *N. A. Bulgakov.* K teorii ploskago kondensatora (Zur Theorie des ebenen Kondensators). J.R.P.C.G. 34. 315.

**1398.** *Swayne.* An adjustable condenser. A.E.N.Y. 17. 478.

**1399.** *G. Rempp.* Die Dämpfung von Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke. A.P.L. (4) 17. 627.

**1400.** *T. Noda.* Dämpfung eines Kondensatorkreises mit einem Zusatzkreise. A.P.L. (4) 19. 715. — *P. Drude* 737.

**1401.** *A. Heydweiller.* Energie, Dauer, dämpfende Wirkung und Widerstand von Kondensatorfunken. A.P.L. (4) 19. 649.

**1402.** *F. Sanford.* On the wavelength of the radiation given off in an alternating condenser field P.R. 21. 343.

**1403.** *Devaux-Charbonnel.* Mesure de temps très courts par la décharge d'un condensateur. C.R. 142. 1080.

**1404.** *A. Zeleny.* The capacity of mica condensers. P.R. 22. 65.

**1405.** *H. Diesselhorst.* Zu Maxwells Methode der absoluten Messung von Kapazitäten. A.P.L. (4) 19. 382.

**1406.** *P. Magini.* Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore R.A.L.R. (5) 15 A. 6; 270; 308.

**1407.** *L. Bassi.* Variazione della capacità elettrica di un condensatore per tensione del coibente. A.A.U.V. 21. 111.

**1408.** *Zimmermann.* The aluminium electrolytic condenser E.R.N.Y. 46. 813.

**1409.** *V. Mitkevič.* Primenenie aljuminievа kondensatora dlja polučenija poющej voltovoj dugi (Die Anwendung des Aluminiumkondensators auf den singenden Voltaschen Bogen). J.R.P.C.G. 34. [illegible]

**1410.** *W. Kaminski.* Theorie der Resonanz phasenwechselnder Schwingungen A.P.L. (4) 20. 766.

Siehe auch 384; 2685; 2958; 3065; 3114.

## Dielektrizität.

**1411.** *M. [illegible]* Ujabb adatok a dielektromos testek [illegible] (Neue Beiträge [illegible] der dielektrischen Körper). [illegible]

**1412.** *[illegible]* Contact with [illegible] P.P.S.L. 19. 724.

**1413.** *[illegible]* The dielectric [illegible] R.A.A. 10. 122.

**1414.** *[illegible].* Contri[illegible] des diélectriques liquides. [illegible] S.F.P. 1906. 111; J.P. [illegible]

[illegible] The dielectric strength [illegible] P.M. (6) 11. 237.

[illegible] and *M. Wien.* The [illegible] the lines of force [illegible]

[illegible] Vereinfachte Maß[illegible]apparate für die [illegible] P. 19. 219.

[illegible] Notes on a [illegible] constants [illegible] frequencies.

[illegible]

**1418.** *A. Occhialini.* La constante dielettrica dei gas in relazione con la loro densità. N.C.P. (5) 10. 217.

**1419.** *E. Bauer.* Über die Beziehung zwischen elektrolytischer Dissoziation und Dielektrizitätskonstante. Z.E. 11. 936.

Siehe auch 733; 1553; 1662; 2153.

## Influenz.

Siehe 1598.

## Elektrodynamik.

**1420.** *E. Riecke.* Über die Elektromechanik des Galvanismus und der Wärme. D.V.N. 77. 26; V.D.P.G. 7. 263.

**1421.** *R. H. Weber.* Die Gleichungen der Elektrodynamik für bewegte Medien, abgeleitet aus einer Erweiterung des Faradayschen Gesetzes. V.G.H. (2) 8. 201.

**1422.** *R. Gans.* Die Grundgleichungen der Elektrodynamik. V.G.H. (2) 8. 208.

**1423.** *F. Hasenöhrl.* Zur Integration der Maxwell'schen Gleichungen. V.D.P.G. 7. 450.

**1424.** *A. Einstein.* Zur Elektodynamik bewegter Körper. A.P.L. (4) 17. 891.

**1425.** *R. Gans.* Zur Elektrodynamik in bewegten Medien. II. A.P.L. (4) 18. 172.

**1426.** *G. Giorgi.* Sul calculo delle soluzioni funzionali originate dai problemi di elettrodinamica. A.A.E.I. 9. 651.

**1427.** *Z. Bouty.* Passage d'électricité à travers des couches de gaz épaisses. Loi de Paschen. Application à la haute athmosphère. J.P. (4) 5. 229.

**1428.** *E. van der Ven.* La charge de contact entre un paroi poreux et des solutions salines. A.M.T. (2) 10. 85.

**1429.** *N. Bulgacov.* Étude de la décharge oscillatoire à l'aide d'un galvanomètre. A.P.M. (8) 17. Nr. 4.

Siehe auch 807; 1597; 2633.

## Elektromotorische Kraft.

**1430.** *E. F. Nichols.* Die Möglichkeit einer durch zentrifugale Beschleunigung erzeugten elektromotorischen Kraft. P.Z. 7. 640.

**1431.** *J. N. Zuk.* Demonstracija ponderomotornych sil voznikajuščich pri elektrizacii. Demonstration der ponderomotorischen Kräfte im elektrischen Felde R.P.W. 3. 205; J.R.P.C.G. 34. 32.

**1432.** *G. Galeotti.* Über die elektromotorischen Kräfte, welche an der Ober-

fläche tierischer Membranen bei der Berührung mit verschiedenen Elektrolyten zustandekommen. Z.P.C. 49. 542.

1433. *C. Nordmann.* Sur les forces électromotorices de contact entre métaux et liquides et sur un perfectionnement de l'ionographe. C.A. 142. 626.

1434. *T. Wulf.* Über den Einfluß des Druckes auf die elektromotorische Kraft der Gaselektroden. Z.P.C. 48. 87.

1435. *K. E. Guthe.* A new determination of the electromotive force of Weston and Clark standard cells by an absolute electrodynamometer. B.B.S.W. 2. 33.

1436. *Becknell.* The residual electromotive force of the carbon arc. E.R.N.Y. 47. 398.

Siehe auch 897; 1128—29; 1367—68; 1537; 1554; 1558; 2330; 2582; 2640; 2954; 2957—58; 3026.

### Ohmsches Gesetz.

1437. *K. Wagner.* Über den experimentellen Nachweis des Ohmschen Gesetzes mittels des elektrischen Instrumentariums von Hartmann und Braun. V.B.P.C.U. 7. 10.

### Elektrisches Potential.

1438. *J. Billitzer.* Zur Bestimmung absoluter Potentialdifferenzen. Z.E. 12. 281.

1439. *R. Luther.* Über die Zählung der Elektrodenpotentiale. Z.E. 11. 777. — *F. Krüger.* 780.

1440. *H. Wolff.* Über die Messung des Potentials im elektrischen Felde. Z.P. 19. 218.

1441. *Tits.* Sur la mesure des potentiels disruptifs. A.S.B. 30. A. 190.

1442. *N. A. Hesekus.* Vlijanie stepeni gladkosti ili poverchnostnoj plotnosti tela na ego električeskuju raznost prikosnovenija (Einfluß des Grades der Glätte oder der Oberflächendichte des Körpers auf die durch Berührung erzeugte Potentialdifferenz). J.R.P.C.G. 34. 1.

1443. *E. Aoyagi.* Graphical representation of potential drops and distribution of currents in a net work. M. C.K. 1. Nr. 1.

1444. *J. Thomae.* Bemerkung über das elektrische Potential bei geradlinigen Elektroden. B.G.L. 57. 68.

1445. *J. Tafel.* Kathodenpotential und elektrolytische Reduktion in schwefelsaurer Lösung. Z.E. 12. 112.

1446. *J. Tafel* und *K. Naumann.* Beziehungen zwischen Kathodenpotential und elektrolytischer Reduktionswirkung. Z.P.C. 50. 713.

1447. *J. Pollak.* Potentialmessungen im Hg-Lichtbogen. A.P.L. (9) 19. 217; 880.

1449. *G. N. Lewis.* Das Potential der Sauerstoffelektrode. Z.P.C. 55. 465.

1450. *L. Sauer.* Bezugselektroden. Z.P.C. 47. 146.

1451. *W. Maitland.* Über das Jodpotential und das Ferri-Ferro-Potential. Z.E. 12. 263.

1452. *R. Gans.* Das Potential einer leitenden Kreisscheibe. Z.S. 53. 434.

1453. *M. Toepler.* Über Funkenspannungen. A.T.K. (4) 19. 191.

1454. *J. Algermissen.* Über das statische Funkenpotential bei großen Schlagweiten. A.P.L. (4) 19. 1007.

Siehe auch 1331; 1524; 1527; 1606; 1617; 2331—32; 2954—56; 2984—85; 3137; 3667.

### Elektrische Leitfähigkeit.

1455. *H. Jäger.* Über die elektrolytische Leitfähigkeit. S.V.N.W. 46. 147.

1456. *P. Blackman.* Quantitative relation between molecular conductivities. P.M. (6) 11. 416.

1457. *P. Walden.* Über organische Lösungs- und Ionisierungsmittel. II. Z.P.C. 54. 129; 55. 207; 281; 683.

1458. *W. R. Bousfield.* Ionengrößen in Beziehung zur Leitfähigkeit des Kohärers. Z.P.C. 53. 257.

1459. *R. Thöldte.* Der Einfluß der Ionisation auf die Leitungsfähigkeit des Kohärers. A.P.L. (4) 17. 694.

1460. *K. Arndt.* Leitfähigkeitsmessungen an geschmolzenen Salzen. Z.E. 12. 337.

1461. *E. Aschkinass.* Elektrische Leitungsfähigkeit und Reflexionsvermögen der Kohle. A.P.L. (4) 18. 373.

1462. *K. Przibram.* Über Elektrizitätsleitung und Entladung in schlechtleitenden Flüssigkeiten. A.A.W. 1905. 414; S.A.W. 114. 1461.

1463. *F. Barmwater.* Über das Leitvermögen der Gemische von Elektrolyten. Z.P.C. 45. 557.

1464. *J. H. Mathews.* On the relation between electrolytic conductivity, specific inductive capacity and chemical activity of certain liquids. J.P.C. 10. 216.

1465. *A. Magnus.* Ein neues Widerstandsgefäß zur Bestimmung des Leitvermögens von Flüssigkeiten. V.D.P.G. 8. 1.

1466. *Hollard.* Conductibilité des mélanges d'acide sulfurique avec les sulfates. Formation de complexes d'hydrogène. B.S.F.P. 1906. 128.

1467. *B. Schapire.* Beitrag zur Kenntdes elektrischen Leitvermögens von NaCl und KCl in Wasseräthylalkoholgemischen. Z.P.C. 49. 513.

1468. *G. Jaffé.* Sur la conductibilité électrique de l'éther de pétrole sous l'action du radium. J.P. (4) 5. 263.

1469. *Dutoit.* Über molekulare Leitfähigkeit, Betrag und Gesetze der Dissoziation organischer und unorganischer Lösungsmittel. Z.E. 12. 642.

1470. *J. Gibson.* Preliminary note on the conductivity of concentrated aqueous solutions of electrolytes. P.R.S.E. 26. 234.

1471. *W. C. D. Whetham.* Die elektrische Leitfähigkeit verdünnter Lösungen von $H_2SO_4$. Z.P.C. 55. 200.

1472. *F. Kohlrausch* und *F. Henning.* Das Leitvermögen wäßriger Lösungen von Radiumbromid. A.P.L. (4) 20. 96.

1473. *A. Wassmuth.* Über die Leitfähigkeit gewisser wässeriger Lösungen von Kochsalz und Natriumkarbonat. A.A.W. 1906. 335.

1474. *Nutting.* Some new rectifying effects in conducting gases. W.E. 36. 48.

1475. *Z. Bouty.* Passage de l'électricité à travers des couches de gaz épaisses. Loi de Paschen. Application à la haute athmosphère. S.F.P. 243. 2.

1476. *A. A. Robb* On the conduction of electricity through gases between parallel plates. P.M. (6) 10. 237; 669.

1477. *H. A. Wilson.* The electrical conductivity of flames. P.P.S.L. 19. 713.

1478. *E. Bloch.* Conductibilité des gas issus d'une flamme. J.P. (4) 4. 760; B.S.F.P. 1905. 83; 430.

1479. *H. A. Wilson* and *E. Gold.* On the electrical conductivity of flames containing salt vapours for rapidly alterating currents. P.P.S.L. 20. 128; P.M. (6) 11. 484.

1480. *H. Dufour.* Die Leitfähigkeit der Luft in bewohnten Räumen. P.Z. 7. 259.

1481. *H. Gerdien.* Demonstration eines Apparats zur absoluten Messung der elektrischen Leitfähigkeit der Luft. D.V.N. 77. 54.

1482. *N. Majoli.* Alcune sperienze sui contatti imperfetti. N.C.P. (5) 10. 152.

1483. *T. Levi-Cività.* Über eine technische Aufgabe, die in Beziehung zur konformen Abbildung steht. D.V.N. 77. 20.

Siehe auch 544; 860; 1104; 1609; 1688; 2154; 2247; 2333—34; 2339; 2959.

### Elektrischer Widerstand.

1484. *F. A. Wolff.* Direct reading methods of resistance comparison. P.R. 23. 64.

1485. *A. Koepsel.* Gleichmäßig veränderliche hohe Widerstände und Selbstinduktionen. V.D.P.G. 8. 121.

1486. *Armagnat.* Boîte pour la mesure de la résistance des électrolytes. S.F.P. 245—47. 4.

1487. *G. Accolla.* Su un metodo per la misura delle piccole variazioni di resistenza negli elettroliti e sua applicazione. A.G.C. (4) 18. Nr. 6.

1488. *W. Broniewski.* Relations entre la variation de la résistance électrique et la dilatation des solides monoatomiques. J.C.P. 4. 285.

1489. *Blanc.* Sur la résistance au contact de 2 métaux. B.S.F.P. 1905. 73.

1490. *A. Blanc.* Sur les résistances de contact. B.S.F.P. 1905. 430; J.P. (4) 4. 743.

1491. *W. A. Price.* The electrical resistance of a conductor, the measure of the current passing. P.P.S.L. 19. 658.

1492. *C. Tissot.* Sur la résistance d'émission d'une antenne. C.R. 142. 703.

1493. *A. Battelli.* Resistenza elettrica dei soleuoidi per correnti di alta frequenza. R.A.L.R. (5) 15. A. 148.

1494. *Broca* et *Turchini.* Expériences sur la résistance des fils métalliques par les courants de haute fréquence. B.S.F.P. 1905. 81.

1495. *Wood.* Determination of the spezific electrical resistance of coal and ore. E.E.L. 36. 232.

1496. *C. Hering.* Electrical resistivity of iron and steel at high temperatures. E.C.I. 4. 47.

1497. *E. Dorn.* Eine Methode zur Messung des elektrischen Widerstandes an lebenden Bäumen. P.Z. 6. 835.

1498. *P. Massoulier.* Sur la relation qui existe entre la résistance électrique et la viscosité des solutions électrolytiques. C.R. 143. 218.

**1499.** *P. Weiss.* Note sur les propriétés des contacts imperfaits. B. S. F. P. 1905. 105.

Siehe auch 1378; 1391; 1393; 1395; 1401; 1598; 1622; 1671; 2956; 2960—61.

### Elektrischer Strom.

**1500.** *C. Alasia.* Alcune formule delle correnti elettriche in quantità complesse. R. T. M. 2. 89.

**1501.** *Sakulka.* Über die Grundwirkungen elektrischer Ströme. S.V.N.W. 45. Nr. 10.

**1502.** *G. Oliva.* Sulla equazione di una corrente variabile. B.C.N. 20. 236.

**1503.** *P. Barry.* La règle de Maxwell sur le flux de force maximum. I.E.P. 11. 372.

**1504.** *H. Sartori.* Sopraelevazione di tensione nei circuiti elettrici. M.T.M. 8. 451.

**1505.** *Field.* Eddy currents in large slot-wound conductors. P.A.I.E.E. 24. 659.

**1506.** *Raymond.* Power capacity of a running stream without storage. E.R. N.Y. 46. 570.

**1507.** *H. Fletcher-Moulton.* Current flow in rectangular conductors. P.L.M.S. (2) 3. 104.

**1508.** *M. U. Schoop.* Verteilung der Stromlinien im Elektrolyten des Sammlers. C.A.E. 7. 193.

**1509.** *J. Révilliod.* Sur la répartition des courants électriques dans un réseau. C.R. 141. 151.

**1510.** *B. O. Peirce.* On the manner of growth of a current in the coil of a nearly closed electromagnet as influenced by the width of the air gap. P.A.Bo. 41. 505.

**1511.** *G. Grassi.* Effetto delle correnti parassite nei circuiti indotti. R.A.N. (3) 12. 128.

**1512.** *J. A. Flemming.* The construction and use of oscillation valves for rectifying high-frequency electric currents. P.P.S.L 20. 177.

**1513.** *W. Nernst* und *E. S. Merriam.* Zur Theorie des Reststroms. Z.P.C. 53. 235.

**1514.** *A. Wehnelt.* Ein elektrisches Ventilrohr. S.M.P.E. 37. 264.

**1515.** *J. M. de Madariaga.* Sobre la representacion simbólica par complejas imaginarias de las magnitudines sinusoidales. R.A.M. 3. 287.

Siehe auch 1109; 1130—31; 1493—94; 1557; 1611; 1618—21; 2335—36; 2957; 2962—63; 2968; 2971—77; 3117.

### Gleichstrom.

Siehe 1528; 2523; 2526; 2529—34; 2969; 3008—14; 3048—53; 3090; 3127; 3499.

### Wechselstrom.

**1516.** *R. Salvadori.* Uso degli immaginari nelle correnti alternate. R.T.I. 3. 17.

**1517.** *A. L. Geršun.* O nekotorych svojstvach vyšrjamlennago peremennago toka. (Über einige Eigenschaften des gleichgerichteten Wechselstromes). J.R.P.C.G. 34. 32.

**1518.** *V. Mitkevič.* K voprosu o narušenii simetrii peremennago toka. (Beitrag zum Studium der Dyssymmetrie der Wechselströme). J.R.P.C.G. 34. 17.

**1519.** *M. A. Satelen.* Kurbograf dlja peremennych tokov (Ondograph für die Wechselströme). J.R.P.C.G. 34. 28.

**1520.** *V. Novák* und *B. Maku.* Neue Methode zur Messung der augenblicklichen Werte des Wechselstroms (tschech.) S.G.B. 1905. Nr. 29.

**1521.** *M. Reithoffer.* Aufzeichnungen elektrischer Wechselströme. S.V.N.W. 46. 421.

**1522.** *P. G. Gundry.* On the asymmetrical action of an alternating current on a polarizable electrode. P.M. (6) 11. 329.

**1523.** *T. Gross.* Über die Einwirkung von Wechselströmen auf die Elektroden. Z.E. 12. 177.

**1524.** *P. G. Gundry.* Über die mittlere Spannung von Elektroden unter der Wirkung von Wechselströmen. Z.P.C. 53. 177.

**1525.** *Lincoln.* A single phase system of alternating-current distribution. W.E. 36. 129.

**1526.** *A. G. Rossi.* Studio teorico di una coppia di circuiti induttivi in parallele su corrente alternativa. R.T.T. 2. 21; 143; 193; 303.

**1527.** *R. B. Owens.* Conversion from constant alternating potential to constant alternating current. C.E.T. 1901. 349.

**1528.** *A. Nodon.* La transformation directe des courants alternatifs en courants continus. Co. 47. 336.

**1529.** *A. Blondel.* Étude simplifié des effets de capacité des lignes à currants alternatifs. C.R. 142. 1503.

**1530.** *A. Wehnelt.* Ein elektrisches Ventilrohr. A.P.L. (4) 19. 138.

**1531.** *A. Blondel.* Application du principe de la superposition à la trans-

mission des courants alternatifs sur une longue ligne. C.R. 142. 1086.

Siehe auch 1182; 1479; 1657; 1686; 1689; 2851—53; 2526; 2535—40; 2546 bis 2548; 2552; 2554; 2615; 2617; 2624; 2642; 2964—67; 2970; 3001; 3015—25; 3054—58; 3115; 3128; 3146; 3454; 3545.

### Drehstrom.

Siehe 1675; 2527; 2541; 2550—51; 2624; 2870; 2977; 3005; 3013; 3026; 3059 bis 3065; 3080—3139; 3156—57.

### Galvanische Polarisation.

**1582.** *F. Krüger.* Über Polarisationskapazität. Z.P.C. 45. 1.

**1583.** *F. Willaert.* Recherches sur la polarisation produite par le passage du courant électrique dans un gaz. A.S.B. 30 B. 67.

**1584.** *R. Thöldte.* Die Bestimmung der galvanischen Polarisation während des Schlusses des Stromes. A.P.L. (4) 18. 1061; 19. 877.

**1585.** *S. T. Milner.* On the polarization of a metallic anode. P.M. (6) 9. 645.

**1586.** *G. N. Lewis* and *R. F. Jackson.* Galvanic polarization of a mercury cathode. P.A.Bo. 41. 399.

**1587.** *R. Salvadori.* Sulla variazione della forza elektromotrice di polarizzazione colla pressione. R.T.I. 3. 1.

**1588.** *G. C. Schmidt.* Über Polarisationserscheinungen in Vakuumröhren. A.P.L. (4) 18. 869.

Siehe auch 1522; 1669; 2387.

### Elektrische Schwingungen.

**1539.** *R. Kennedy.* Electromagnetic oscillations. E.R. 40. 667; 704.

**1540.** *Lord Rayleigh.* On electrical vibrations and the constitution of the atom. P.M. (6) 11. 117; 292.

**1541.** *F. Hasenöhrl.* Über die Methoden der Integration der Maxwellschen Gleichungen für elektrische Schwingungen. D.V.N. 77. 19.

**1542.** *J. Algermissen.* Verhältnis von Schlagweite und Spannung bei schnellen Schwingungen. A.P.L. (4) 19. 1016.

**1543.** *T. P. Black.* Über den Widerstand von Spulen für schnelle elektrische Schwingungen. A.P.L. (4) 19. 157.

**1544.** *L. Mandelstam* und *N. Papalexi.* Über eine Methode zur Erzeugung phasenverschobener schneller Schwingungen. P.Z. 7. 303.

**1545.** *G. Vanni.* Le oscillazioni elettriche e la telegrafia senza filo. C.C.E. 1. 65.

**1546.** *A. Kalähne.* Elektrische Schwingungen in ringförmigen Metallröhren. A.P.L. (4) 18. 92; 19. 80; 879.

**1547.** *F. Hack.* Das elektromagnetische Feld in der Umgebung eines gedämpft schwingenden Oszillators. A.P.L. (4) 18. 634.

**1548.** *N. A. Bulgakov.* Podsčet elektroemkosti dlja vibratora A S Popova (Berechnung der elektrischen Kapazität von Popov's Oszillator). J.R.P.C.G. 34. 209.

**1549.** *C. Fischer.* Methode zur getrennten Untersuchung der Schwingungen gekoppelter Oszillatoren. A.P.L. (4) 19. 182.

**1550.** *C. Tissot.* Orde de grandeur des forces électromotrices mises en jeu dans les antennes réceptoires. B.S.F.P. 1906. 54.

**1551.** *C. Tissot.* Sur la résonance des systèmes d'antennes. J.P. (4) 5. 326.

**1552.** *J. W. Nicholson.* On electrical vibrations between confocal elliptical cylinders with special reference to short waves. P.M. (6) 10. 225.

**1553.** *F. Beaulard.* Sur la léviation d'un ellipsoide diélectrique placé dissymétriquement dans un champ électrique homogène. Application à la mesure du pouvoir inducteur spécifique de l'eau. J.P. (4) 5. 165.

**1554.** *F. F. Almy.* Some observations upon the action of coherers when subjected to direct electromotive forces. P.I.A.S.D. 10. 49.

Siehe auch 1133; 1410; 1429; 2542; 2972; 3100—01.

### Elektrische Wellen.

**1555.** *E. Gehrcke.* Über elektrische Wellen. A.Gr. (3) 9. 150.

**1556.** *A. Garbasso.* De undulationibus electricis. M.A.C.M. 23. 1.

**1557.** *A. Despaux.* Ondes électriques et courant électrique. R.S. (5) 6. 5.

**1558.** *Biedermann.* Electromotive force wave forms. J.I.E.E. 35. 493.

**1559.** *A. Fisch.* Diagrammes des lignes de force des ondes électriques se propageant le long des fils conducteurs. A.S.G. (4) 20. 442.

**1560.** *F. Lori.* Il meccanismo del rivelatore magnetico delle onde hertziane. N.C.P. (5) 10. 297.

**1561.** *L. H. Walter.* Magnetic electric waves. E.M.L. 4. 127; 362.

1562. *L. W. Austin.* The electrolytic wave detector. P.R. 22. 364.

1563. *C. Tissot.* Détecteurs d'ondes électriques à gaz ionisés. S.F.P. 250. 3.

1564. *F. C. Blake* and *C. R. Fountain.* The transmission and reflection of electric waves by screens of resonators and by grids. P.R. 21. 409.

1565. *W. v. Ignatowsky.* Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht. A.P.L. (4) 18. 495; 1078.

1566. *C. Schaefer.* Über Absorption und Dispersion elektrischer Wellen. A.Gr. (3) 10. 113.

1567. *J. R. v. Geitler.* Über die Absorption und das Strahlungsvermögen der Metalle für Hertzsche Wellen. A.A.W. 1906. 305.

1568. *A. R. Kolli.* Izsledovanie dispersii električeskich voln v vode (Untersuchung über die Dispersion der elektrischen Wellen im Wasser). J.R.P.C.G. 34. 32.

1569. *R. A. Fessenden.* Method of producing waves of frequency intermediate between heat waves and Hertzian waves. N. 73. 428.

1570. *M. Paetzold.* Strahlungsmessungen an Resonatoren im Gebiet kurzer elektrischer Wellen. A.P.L. (4). 19. 116. — *E. Aschkinass* 841.

1571. *A. Turpain.* Les expériences de Hertz et leurs applications pratiques. B.S.C.I. 1901. 83.

1572. *W. Seitz.* Die Wirkung eines unendlich langen Metallzylinders auf elektrische Wellen. A.P.L. (4) 19. 554.

1573. *W. S. Franklin.* Electric waves and the behaviour of long-distance transmission in lines. J.F.I. 160. 51.

1574. *C. Schaefer* und *M. Laugwitz.* Zur Theorie des Hertz'schen Erregers und über Strahlungsmessungen an Resonatoren. A.P.L. (4) 20. 355.

1575. *A. Garbasso.* Zur Geschichte der multiplen Resonanz. A.P.L. (4) 20. 846.

Siehe auch 1552; 2578—79; 2615; 2940; 2968; 2971; 2978; 3102.

### Elektronentheorie.

1576. *W. Wien.* Über Elektronen. N.R. 20. 545; 557; V.D.P.G. 7. 259.

1577. *F. Schmitt.* Über die Elektronentheorie. Z.K.F.G. 9. 168.

1578. *P. Hertz.* Zur Elektronentheorie. P.Z. 7. 347.

1579. *A. Sommerfeld.* Zur Elektronentheorie. D.V.M. 15. 51.

1580. *A. Sommerfeld.* Zur Elektronentheorie III. N.G.G. 1905. 201.

1581. *W. Kaufmann.* Teorija elektronov (Die Entwicklung des Elektronenbegriffs). R.S.W. 3. 42.

1582. *A. H. Bucherer.* Introduction mathématique à la théorie des électrons. A.S.G. (4) 22. 105.

1583. *W. Kaufmann.* Über die Konstitution des Elektrons. A.P.L. (4) 19. 487; S.A.B. 1905. 949.

1584. *H. A. Lorentz.* Résultats et problèmes de la théorie des électrons. A.N. (2) 11. 1.

1585. *G. Holzmüller.* Zur vorläufigen Orientierung über die Elektronentheorie. U M.N. 11. 117.

1586. *H. Poincaré.* Sur la dynamique de l'électron. R.C.M.P. 21. 129.

1587. *J. D. van der Waals.* Opmerkingen naar aanleiding van de dynamica van het electron. C.A.A. 14. 509.

1588. *J. D. van der Waals jr.* Remarques sur la dynamique de l'électron. A.N. (2) 11. 307.

1589. *M. Brillouin.* Inertie des électrons. C.R. 141. 942.

1590. *J. Geest.* Das Feld eines rotierenden Elektrons. P.Z. 7. 160.

1591. *R. Gans.* Zur Elektronenbewegung in Metallen. A.P L. (4) 20. 293.

1692. *O. Heaviside.* The transverse momentum of an electron. N. 72. 429.

1593. *H. Nagaoka.* Virial of molecular forces due to electron atoms, the characteristic equation and the Joule-Kelvin effect P.T.M. 2. 335.

1594. *E. Wiechert.* Bemerkungen zur Bewegung der Elektronen bei Überlichtgeschwindigkeit. N.G.G. 1905. 75.

1595. *T. Tommasina.* Sur la théorie cinétique de l'électron qui doit servir de base à la théorie électronique des radiations. A.S.G. (4) 20. 713.

1596. *T. Tommasina.* Über die kinetische Theorie des Elektrons als Grundlage d. Elektronentheorie d. Strahlungen. P.Z. 7. 56.

1597. *E. Riecke.* Über die Elektronentheorie des Galvanismus und der Wärme. J.R.E. 3. 24.

1598. *E. Bose.* Widerstandsänderungen dünner Metallschichten durch Influenz. Eine direkte Methode zur Bestimmung der Zahl der negativen Leitungselektronen. P.Z. 7. 373.

1599. *E. Kohl.* Über die Bewegungsgleichungen und die elektromagnetische Theorie der Elektronen. A.P.L. (4) 19. 587.

**1600.** *C. E. Guye.* Sur la valeur du rapport $e/\mu_0$ de la charge à la masse de l'électron. A.S.G. (4) 21. 346.

**1601.** *J. A. Fleming.* The magnetic field of a moving electron. E.T.L. 22. 84.

**1602.** *A. Righi.* Di alcune non recenti esperienze considerate dal punto di vista della teoria elettronica. M.S.It. (3) 14.

**1603.** *J. Traube.* Volumtheorie und Elektronentheorie. J.R.E. 3. 184.

Siehe auch 629; 817; 1040; 1653; 2945 bis 2948; 2962.

## Thermoelektrizität.

**1604.** *E. Lecher.* Zur Theorie der Thermoelektrizität. A.P.L. (4) 20. 480; A.A.W. 1906. 48.

**1605.** *E. Lecher.* Über Thermoelektrizität P.Z. 6. 781; V.D.P.G. 7. 331.

**1606.** *N. A. Hesehus.* Vlijanie temperatury na električeskuju raznost prikosnovenija i ob elektrizacii pyli (Der Einfluß der Temperatur auf die elektrische Kontaktdifferenz und über die Elektrisation des Staubes). J.R.P.C.G. 34. 25.

**1607.** *N. A. Hesehus.* O sootvetstvii meždu količestvom električestva i entropiej (Die Korrespondenz zwischen der Elektrizitätsmenge und der Entropie). J.R.P.C.G. 34. 325.

**1608.** *Goldschmidt.* Temperature curves and the rating of electrical machinery. E.R. 56. 518.

**1609.** *J. Koenigsberger* und *O. Reichenheim.* Über ein Temperaturgesetz der elektrischen Leitfähigkeit fester einheitlicher Substanzen und einige Folgerungen daraus. P.Z. 7. 570.

**1610.** *C. Bellia.* L'isteresi nelle coppie termoelectriche. B.G.C. 91. 27.

**1611.** *K. Kobald.* Über den Satz vom Minimum der Joule'schen Wärme für veränderliche lineare Ströme. D.V.N. 77 41.

**1612.** *E. Bausenwein.* Über die Abhängigkeit des Peltiereffektes Konstantan-Fe von der Temperatur. A.A.W. 1905 464; S.A.W. 114. 1625.

**1613.** *E. Lecher.* Über den Wendepunkt des Peltiereffektes bei Fe-Cu. P.Z. 7 34.

**1614.** *E. Lecher.* Thomsoneffekt in Fe, Cu, Ag und Konstantan. A.A.W. 1905 144; S.A.W. 114. 1599; A.P.L. (4) 19 853.

**1615.** *Weese.* Die Erwärmung von Feldspulen Z.E.M. 8. 163.

**1616.** *W. D. Henderson.* The thermoelectric behaviour of silver in a thermoelement of the first class. P.R. 23. 101.

**1617.** *Palme.* Zusammenhang von Temperatur und Spannung bei Thermoelementen. Z.B.W.B. 11. 344.

**1618.** *V. Ignatovskij.* O nagrevanii nemagnitnych steržnej tokami Fuko (Über die Erwärmung nichtmagnetischer Drähte durch die Foucault'schen Ströme). J.R.P.C.G. 34. 49.

**1619.** *V. Ignatovskij.* O nagrevanii steržnej tokami Fuko v peremennom magnitnom pole (Über die Erhitzung der Drähte durch die Foucault'schen Ströme in einem veränderlichen magnetischen Felde). E.P. 23. 161.

**1620.** *E. Rogovskij.* Sur un phénomène de refroidissement observé dans les fils d'argent plongés dans l'eau et parcours par des courants électriques. C.R. 141. 622.

**1621.** *E. A. Rogovskij.* Ob otdače teploty serebrjanymi provolokami nagrevaemymi električeskim tokom v vode (Über den Wärmeverlust durch ins Wasser getauchte und durch einen elektrischen Strom erwärmte Silberdrähte). J.R.P.C.G. 34. 427.

**1622.** *H. Morris-Airey.* On the temperature coefficient of electrical resistivity of carbon at law temperatures. S.P.M. 49. 1.

**1623.** *F. Weidert.* Über den Einfluß der Belichtung auf die thermoelektrische Kraft des Se. A.P.L. (4) 18. 811.

**1624.** *F. Meissner.* Über eine Fehlerquelle bei thermoelektrischen Messungen. A.A.W. 1906. 243.

Siehe auch 1496; 1671; 2344; 2558; 2950; 2978; 3031; 3666—68.

## Elektrische Messungen.

Siehe auch 433; 1435; 2584; 2939—41; 3149; 3471.

## Magnetismus.

**1625.** *P. Langevin.* Sur la théorie du magnétisme. B.S.F.P. 1905. 13.

**1626.** *V. V. Sipčinskij.* Ob izmenenii magnitnago momenta postojannych magnitov o tečeniem vremeni (Die Variation des magnetischen Moments der permanenten Magnete). J.R.P.C.G. 35. 541.

**1627.** *E. Kempken.* Experimentaluntersuchungen zur Konstitution permanenter Magnete. A.P.L. (4) 20. 1017.

1628. *B. V. Hill.* Note on the irreversibility of the Heusler alloys. P.R. 21. 335.

1629. *Heusler.* Essai d'une théorie des alliages. I.E.P. 14. 533.

1630. *E. Picard.* Sur quelques problèmes de physique mathématique se rattachant à l'équation de M. Fredholm. C.R. 142. 861.

1631. *Underhill.* A comparison of common methods of magnet coil winding. A.E.N.Y. 17. 243.

1632. *Underhill.* Easy methods of approximate magnet windings. A.E.N.Y. 17. 618.

1633. *A. Schuster.* The periodogram and its optical analogy. P.R.S.L. 77. 136.

1634. *D. Marrotto.* Das magnetische Altern des Eisens und die Molekulartheorie des Magnetismus. P.Z. 7. 262.

1635. *W. Trenkle.* Über das magnetische Verhalten von Eisenpulver verschiedener Dichte. A.P.L. (4) 19. 692. S.M.P.E. 37. 161.

1636. *C. C. Trowbridge.* The magnetic properties of iron and steel at liquid air temperature. S.M.Q. 24. 72.

1637. *H. Graziadei.* Über die durch die Entfernung der Oxydschicht bewirkten Änderungen magnetischer Eigenschaften von Fe-, Ni- und Co-blechen. S.A.W. 114. 843.

1638. *J. Russell.* Magnetic shielding in hollow iron cylinders and superposed inductions in iron. T.R.S.E. 41. 631.

1639. *P. Weiss.* Les propriétés magnétiques de la pyrrhotine. J.P. (4) 4. 469; 829; B.S.F.P. 1905. 335.

1640. *P. Weiss.* Les propriétés magnétiques de la pyrrhotine et celles des corps ferromagnétiques en général. B. S.F.P. 1905. 68.

1641. *P. Weiss.* Über den Ferromagnetismus der Kristalle. V.D.P.G. 7. 325; D.V.N. 77. 37.

1642. *O. Scarpa.* Determinazione della suscettività magnetica dell' acqua. N.C.P. (5) 10. 155

1643. *H. Meldau.* Die Anfänge der Theorie des Schiffsmagnetismus. A.H. 33. 410.

1644. *H. Meldau* und *W. Bartling.* Entwicklung des magnetischen Charakters eines Schiffes. A.H. 34. 495.

Siehe auch 819—821; 1601; 3470—3501.

### Magnetisierung.

1645. *N. A. Bulgakov.* Namagničivanie trechosnago ellipsoida v zadannom magnitnom pole (Über Magnetisierung eines dreieckigen Ellipsoids im gegebenen magnetischen Felde). J.R.P.C.G. 34. 16.

1646. *J. P. de Kolong.* Teorija pritjaženija tel obladajuščich odnorodnym namagničennym sostojaniem (Theorie der Anziehung von Körpern, die sich im Zustand homogener Magnetisierung befinden). M.H.P. 24. 94.

1647. *E. Madelung.* Über die Magnetisierung durch schnellverlaufende Ströme und die Wirkungsweise des Rutherford-Marconischen Magnetdetektors. A.P.L. (4) 17. 861. — *M. Wien* 18. 1077.

1648. *R. H. Weber.* Die Magnetisierbarkeit der Mangansalze. A.P.L. (4) 19. 1056.

Siehe auch 734—735; 1136; 1670; 1695 bis 1696; 3478-80.

### Magnetische Hysteresis.

1649. *P. Duhem.* L'hystérésis magnétique. R.G.O. 17. 8; 64.

1650. *P. A. Zilov.* Magnitnoe zapazdyvanie (Das Zurückbleiben des Magnetismus). R.P.W. 3. 84.

Siehe auch 3475; 3481—82.

### Magnetostriktion.

Siehe 1329.

### Elektromagnetismus.

1651. *J. A. Vollgraff.* Considérations sur le parallelisme des grandeurs électriques et magnétiques. A.N. (2) 11. 169.

1652. *A. H. Bucherer.* Ein Versuch, den Elektromagnetismus auf Grund der Relativbewegung darzustellen. P.Z. 7. 553.

1653. *A. H. Bucherer* Das deformierte Elektron und die Theorie des Elektromagnetismus. P.Z. 6. 833.

1654. *V. V. Nikolaev.* Elektromagnitnaja reakcija (Elektromagnetische Reaktion). J.R.P.C.G. 34. 25.

1655. *F. Hasenöhrl.* Zur Integration der Maxwell'schen Gleichungen. P.Z. 7. 37.

1656. *Underhill.* The performance of different types of electromagnets. A.E.N.Y. 17. 299.

1657. *Underhill.* Alternating current electromagnets. A.E.N.Y. 17. 467.

1658. *F. Auerbach.* Kraft- und Energiefelder. H.E.B. 18. 1.

1659. *Hermann.* Recherches comparatives sur la puissance dissipée dans

le fer dans les champs tournants et dans les champs alternatifs. L.E.P. 30. 295.

1660. *A. H. Bucherer*. Das von einem mitbewegten Beobachter wahrgenommene Feld einer rotierenden geladenen Kugel. P.Z. 7. 256.

1661. *R. Gans*. Ein rotierendes, elektromotorisches Feld. P.Z. 7. 342; 657. — *A. H. Bucherer* 502.

1662. *S. J. Barnett, J. Larmor*. Note on Dr. H. A. Wilson's memoir: on the electric effect of rotating a dielectric in a magnetic field. P.R.S.L. 76. 367.

1663. *G. Jaumann*. Elektromagnetische Vorgänge in bewegten Medien. A.P.L. (4) 19. 881; A.A.W. 1905. 475; 1906. 124; S.A.W. 114. 1635.

1664. *E. Kohl*. Über eine Erweiterung der Stefan'schen Entwicklung des elektromagnetischen Feldes für bewegte Medien. A.P.L. (4) 20. 1.

1665. *J. Trowbridge*. Magnetic field and coronal streamers. A.J.S. (4) 21. 189.

1666. *S. Sano*. On the equilibrium of fluids in an electromagnetic field. P.T.M. 2. 365.

1667. *D. Owen*. The comparison of electric fields by means of an oscillating electric needle. P.P.S.L. 20. 92.

1668. *R. Rankin*. Use of a magnetic field with the Ryan-kathode ray oscillograph. P.R. 21. 399.

1669. *E. Kohl*. Über den Unipolareffekt einer leitenden magnetischen Kugel. A.P.L. (4) 20. 641.

1670. *C. G. Knott*. Magnetisation and resistance of Ni at high temperatures. T.R.S.E. 41. 39.

1671. *C. G. Knott*. Charge of electric resistance of nickel due to magnetisation at different temperatures. T. R.S.E. 41. 535.

1672. *J. E. Purvis*. The influence of very strong electromagnetic fields on the spark spectra of vanadium and platinum and iridium. T.C.P.S. 20. 193.

1673. *J. Forkas*. Über den Einfluß der Erdbewegung auf elektromagnetische Erscheinungen. P.Z. 7. 645.

1674. *Hele-Shaw, Hay* und *Powell*. Hydrodynamische und elektromagnetische Untersuchungen über die Verteilung bei Kraftlinien-Zahnankern. Z. E.M. 8. 73.

Siehe auch 479—480; 637; 817—818; 848; 1141; 1392; 1510; 1539; 1547; 1560—61; 1565; 1599; 1647; 2045; 2049 bis 2050; 2982; 3032; 3476; 3478; 3483 bis 3489.

## Induktion.

1675. *D. Negrotti*. Calcolo dei coefficienti di capacità e di induzione elettrostatica delle lunghe linee di trasmissione di energia mediante correnti polifasi. R.T.T. 2. 441.

1676. *P de Heen*. Contribution à l'analyse du phénomène de l'induction électrostatique. B.A.B. 1906. 139.

1677. *J. G. Coffin*. The influence of frequency upon the self-inductance of coils. P.A.Bo. 41. 789.

1678. *M. La Rosa*. Sulla misura di piccoli coefficienti d'autoinduzione. N.C.P. (5) 10. 309.

1679. *I. P. de Kolong*. Teorija magnitnoj indukcii i priloženie eja k splošnym: šaru, ellipsoidu i beskonečnomu krugovomu cilindru (Theorie der magnetischen Induktion und ihre Anwendung auf eine feste Kugel, Ellipsoid und unendlichen Kreiszylinder). M.H.P. 24. 115.

1680. *D. Negrotti*. Sull' induttanza presentata dei conduttori cavi. I.C.T. 28. 25.

1681. *B. Strasser*. Über die Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten von Solenoiden. A.P.L. (4) 17. 763.

1682. *L. Hermann*. Zusatz zu der Abhandlung: Über die Effekte gewisser Kombinationen von Kapazitäten und Selbstinduktionen. (A.P.L. (4) 17. 501) A.P.L. (4) 17. 779.

1683. *A. H. Taylor*. Limitations of the ballistic method for magnetic induction. P.R. 23. 95.

1684. *T. Boggio*. Nouvelle résolution du problème de l'induction magnétique pour une sphère isotrope. C.R. 141. 701.

1685. *T. Boggio*. Nuova risoluzione del problema dell' induzione magnetica per una sfera isotropa. N.C.P. (5) 11. 186.

1686. *R. Edler*. Versuche über Induktion und Schirmwirkung mit Wechselströmen nach Prof. Elihu Thomson. V. B.P.C.U. 6. 96.

1687. *J. C. Hubbard*. On the conditions for sparking at the break of an inductive circuit. P.R. 22. 129.

1688. *A. Broca*. Pouvoir inducteur spécifique et conductibilité. Viscosité électrique. C.R. 142. 1328.

1689. *E. B. Rosa* and *F. W. Grover*. Measurement of inductance by Andersons method using alternating currents and a vibration galvanometer. B.B.S.W. 1. 291.

1690. *E. B. Rosa, M. G. Lloyd* and *C. E. Reid*. Influence of wave form on

the rate of integrating induction meters. B.B.S.W. 1. 421.

1691. *E. B. Rosa* and *F. W. Grover*. The use of serpentine in standards of inductance. B.B.W.S. 1. 337.

1692. *J. G. Coffin*. Construction and calculation of absolute standards of induction. B.B.S.W. 2. 87.

1693. *Baljasnyj, V. A.* Opyt vyjasnenija teorii bobiny Rumkorfa (Zur Theorie des Ruhmkorff'schen Apparates). J.R.P.C.G. 34. 25.

Siehe auch 1484—85; 1511; 1526; 1553; 1638; 2339—40; 2548—50; 2633; 2636; 3066—78; 3490—93.

### Hall'sches Phänomen.

1694. *T. C. Mc Kay*. Titles on articles on the Hall effect. P.A.Bo. 41. 385.

### Thermomagnetismus.

1695. *A. Heydweiller*. Über die Thomson'sche Magnetisierungswärme. A.P.L. (4) 20. 207

1696. *P. Weiss* et *J. Kunz*. Les variations thermiques de l'aimantation de la pyrrhotine. A.S.G. (4) 20. 621; J.P. (4) 4. 847; B.S.F.P. 1905. 394.

Siehe auch 1619; 1670—71.

### Magnetische Messungen.

1697. *J. Meslin*. Sur la mesure des constantes magnétiques. A.C.P. (8) 7. 445.

1698. *R. H. Weber*. Permeabilitätsmessung an Stahlkugeln. A.P.L. (4) 18. 395.

Siehe auch 3471; 3494—95.

### Astronomie.

Siehe 143—144.

### Geschichte der Astronomie.

1699. *T. G. Ford*. The dawn of navigation and its books, theories and instruments. 'P.N.I. 32 Nr. 1.

1700. *P. Tannery*. Les éphémerides chez les Byzantins. B.D. (2) 30. 59.

Siehe auch 1984.

### Bahnbestimmungen.

1701. *A. Hall*. The determination of orbits. P.A. 13. 353.

1702. *A. Obrecht*. Calculo de los órbitas de los astros nuevos, planetas y cometas. A.S.J.C. 3. 137.

1703. *H. Bourget*. Remarque sur la détermination des orbites circulaires. B.A. 23. 81.

1704. *W. Ebert*. Simple méthode pour le calcul d'une orbite elliptique par 3 observations. B.A. 23. 209.

1705. *H. Poincaré*. Sur la détermination des orbites par la méthode de Laplace. B.A. 23. 161.

1706. *A. O. Leuschner*. On the general applicability of the short method of determining orbits from 3 observations. P.A. 13. 296.

1707. *J. Weeder*. Nauwkeurige benaderingformules voor de verhoudingen der driehoeken by de berekening eener elliptische baan uit drie waarnemingen C.A.A. 14. 160.

1708. *V. Cerulli*. Sulla correzione delle orbite dei pianetini. M.S.S.I. 34. 175.

1709. *E le Grand Roy*. Simplification du calcul du rayon vecteur et de l'équation du centre. A.S.G. (4) 19. 493.

Siehe auch 105.

### Kepler'sche Gleichung.

Siehe 106.

### Störungen.

1710. *E. W. Brown*. On a general method for treating transmitted motions and its application to indirect perturbations. T.S.M.Am. 6. 332.

1711. *H. Poincaré*. Sur la méthode horistique de Gyldén. A.M. 29. 235.

1712. *A. Hall*. Relation of the true anomalies in a parabole and a very eccentric ellipse having the same perihelion distance. A.J.B. 25. 22.

1713. *A. Wilkens*. Zur Erweiterung eines Problems der Säkularstörungen. S.A.B. 1905. 1062.

1714. *E. Nevill*. On Hansens coefficients for the inequalities in the moons longitude. M.N.A.S. 65. 658.

1715. *P. H. Cowell*. On secular accelerations of the moons longitude and node. M.N.A.S. 65. 861.

1716. *P. H. Cowell*. On the secular acceleration of the Earths orbital motion. O. 28. 454.

1717. *E. Doolittle*. The secular perturbations of the Earth. A.J.B. 24. 189.

1717. *E. Doolittle*. The secular perturbations of Mars from the action of Mercury. A.J.B. 25. 21.

1718. *E. Doolittle*. The secular perturbations of Mars arising from the action of Saturn. A.J.B. 24. 187.

[illegible] *Turner*. Secular perturbations [illegible] by Jupiter. A.N.K. 170.

[illegible] *Strömgren*. Ein Satz über [illegible]. A.N.K. 170. 17.

[illegible] 1733—34; 1804.

**Vielkörperproblem.**

[illegible] Sul problema de' [illegible] di un potenziale [illegible]. R.A.L.R. (4) 15.

[illegible] Sur le problème [illegible] 30. 49.

[illegible] solutions périodiques [illegible] des 3 corps. R.G.O.

[illegible] Untersuchungen [illegible] periodische Lösungen [illegible] 3 Körper. A.A.K. 8.

[illegible] Untersuchungen [illegible] Klasse periodischer [illegible] Dreikörperproblem. S.

[illegible] Geometrische [illegible] spezieller Fälle des [illegible] Körper. A.N.K. 171.

[illegible] On a problem [illegible] bodies and ad- [illegible] integral. T.S.M.

[illegible] sur les solutions [illegible] des positions d' [illegible] le problème des [illegible]

[illegible] Sur l'équilibre [illegible] 50.

[illegible] Sur un cas [illegible] des n corps.

[illegible] Sur les lignes [illegible] convexes. T.

[illegible]

[illegible] bewegt [illegible] the secular [illegible] exterior [illegible]

**Erddrehung.**

**1735.** *R. F. Počdena*. Die Achsendrehung der Erde und ihre Wirkungen, mit spezieller Berücksichtigung des Foucault'schen Pendelversuches. K. W. 4. 500.

**Aberration.**

**1736.** *C. L. Doolittle*. The constant of aberration. A.J.B. 24. 155.

**1737.** *E. W. Morley* and *D. C. Miller*. On the theory of experiments to detect aberrations of the 2 degree. P.M. (6) 9. 669.

**1738.** *A. Gullstrand*. Über Astigmatismus, Koma und Aberration. A.P.L. (4) 18. 941.

**1739.** *R. Buchanan*. Planetary aberration. P.A. 13. 376.

**Bewegung von Körpern bei Erdrotation.**

**1740.** *H. Graziadei*. Ein Beitrag zur elementaren Ableitung der ablenkenden Kraft der Erdrotation. M.Z. 23. 178.

**1741.** *C. E. Wasteels*. Beschrijving eener nieuwe mechanische proef in verband met de draaiende beweging der Aarde. H.V.C. 1903. 315.

**1742.** *Großmann*. Die horizontale Komponente der ablenkenden Kraft der Erdrotation. M.Z. 23. 200; 373.

**1743.** *L. Tesar*. Die Theorie der relativen Bewegung und ihre Anwendung auf Bewegungen auf der Erdoberfläche. II P.Z. 7. 199.

**1744.** *De Sparre*. Sur la déviation des corps dans la chute libre. A.S.B. 30. A. 63.

**1745.** *De Sparre*. Note au sujet du mouvement des corps pesants à la surface de la terre dans la chute libre. A.S.B. 30. B. 203.

**1746.** *De Sparre*. Note au sujet de la deviation des graves dans la chute libre. S.M. 33. 146.

**1747.** *M. Fouché*. Sur la déviation des graves et les champs de force. S.M. 33. 150.

**1748.** *V. [illegible]*. Kterak se odchyluje [illegible] padající těleso od směru vertikálního. Wie weicht ein frei fallender Körper von der Vertikalen ab? C. 35. 64.

**1749.** *[illegible]*. Zakon Bera o [illegible] (Bärs Gesetz über Unterspülung der [illegible] infolge der Erdrotation). S.N. [illegible] 188.

See also [illegible]: 1673: [illegible]; 1804.

### Foucault'sches Pendel.

1750. *C. Dutoit.* Un pendule de Foucault. A.S.G. (4) 19. 390.
1751. *T. Raemy.* Le pendule de Foucault. B.S.S.N.F. 11. 33.
1752. *M. Koppe.* Zum Foucault'schen Pendel. P.Z. 7. 604; 665.
1753. *A. Denizot.* Zur Theorie des Foucault'schen Pendels. P.Z. 7. 507.
1754. *L. Tešar.* Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucault'schen Pendelversuchs. A.P.L. (4) 19. 613.
1755. *W. Rosenberg.* Majatnik Fuko (Das Foucault'sche Pendel). B.B.S.P. 3. 1624.
1756. *U. Behn.* Zur Technik des Foucault'schen Pendelversuchs. P.Z. 6. 744.
1757. *T. Moreux.* Les travaux de Foucault. Co. 47. 522.

Siehe auch 428; 1785.

### Polhöhenschwankungen.

1758. *T. Albrecht.* Resultate des internationalen Breitendienstes in der Zeit 1902—1906. A.N.K. 172. 252.

Siehe auch 2032—33.

### Sonnenparallaxe.

1759. *K. Hall.* Note on the masses of Mercury, Venus and the Earth and on the solar parallaxe. A.J.B. 24. 64.
1760. *W. Foerstner.* Bestimmung der Sonnenparallaxe mit Hilfe optischer Messungen der Geschwindigkeit der Erdbewegung. M.V.A.P. 15. 97.
1761. *O. Merretti.* Il pianetoide Eros e la parallasse solare R.F.M. 7. B. 405.

### Sonnenrotation.

Siehe 2168.

### Mondbewegung.

1762. *E. W. Brown.* On the completion of the solution of the main problem in the new lunar theory. M.N.A.S. 65. 104.
1763. *E. W. Brown.* The final values of the coefficients in the new lunar theory. M.N.A.S. 65. 276.
1764. *E. W. Brown.* Theory of the motion of the moon. M.A.S. 57. B. 51.
1765. *M. Brendel.* Theorie des Mondes. A.M.S.G. (2) 3. Nr. 4.
1766. *J. Posthumus.* De maansbaan ten opzichte der zon. D.Z.R. 27. 363.
1767. *A. W. Krassnow.* Über die Herleitung der Hill'schen Lösung für die Mondbewegung unmittelbar aus der Jacobischen Differentialgleichung. A.N.K. 170. 309.
1768. *C. F. Whitmell.* Lunar angles. O. 28. 60.
1769. *P. V. Neugebauer.* Abgekürzte Tafeln des Mondes nebst Tafeln zur Berechnung der täglichen Auf- und Untergänge der Gestirne. V.A.R.I. 27.
1770. *P. H. Cowell.* The coefficient of the principal term in the moons latitude. M.N.A.S. 65. 564.
1771. *E. Nevill.* On the terms of long period in the complete expression for the moons longitude. M.N.A.S. 65. 266.
1772. *P. H. Cowell.* Analysis of the 145 terms in the moon longitude 1750—1901. M.N.A.S. 65. 108.
1773. *P. H. Cowell.* On the discordant values of the principal elliptic coefficient in the moons longitude. M.N.A.S. 65. 745.
1774. *P. H. Cowell.* The longitude of the moons perigee. M.N.A.S. 65. 268.
1775. *F. Hayn.* Die Rotationselemente des Mondes und der Ort von Mösting A. A.N.K. 171. 33.
1776. *R. H. Curtiss.* On the computation of the moons spectrographic velocity near full moon. B.Li.O. 75. 112; A.J.C. 21. 376.

Siehe auch 1714—15; 1877—79; 1941; 2163; 2169.

### Libration.

1777. *A. Obrecht.* Libracion de la luna. A.S.I.C. 3. 31.

Siehe auch 1791.

### Mondparallaxe.

1778. *M. Percov.* Parallaks luny. (Über die Bestimmung der Mondparallaxe aus Beobachtungen des Mondes in gleichen Höhen mit Sternen in der Nähe des 1. Vertikals). B.S.R.A. 11. 16.

### Sonnenfinsternisse.

1779. *H. H. Turner.* Total solar eclipses. S.P.M. 50. Nr. 7.
1780. *P. H. Cowell.* An elementary explanation of recent researches on ancient solar eclipses. O. 28. 420.
1781. *P. H. Cowell.* On the value of ancient solar eclipses. M.N.A.S. 65. 867; 66. 35. — *S. Newcomb* 66. 34.

**1782.** *Stechert.* Hilfsgrößen für die Berechnung der im Jahre 1906 stattfindenden Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen. A. H. 33. 553.

**1783.** *B. Viaro.* Applicazione delle formole di parallasse al calcolo dell' elisse solare del 30. VIII 05. P.I.S.F. 19. 103.

Siehe auch 1850.

### Mondfinsternisse.

**1784.** *W. Foerster.* Die Sichtbarkeit des Erdschattens außerhalb des Mondes. M.V.A.P. 16. 11.

**1785.** *P. H. Cowell.* On the Ptolemaic eclipses of the moon recorded in the Almagest. M.N.A.S. 66. 5.

### Planetendurchgänge.

**1786.** *P. H. Cowell.* On the transits of Mercury. M.N.A.S. 66. 36.

### Sternbedeckungen.

Siehe 129; 1782.

### Planetenbewegung.

**1787.** *G. W. Hill.* Integrals of plane[illegible] motion suitable for an indefinite length of time. A.J.B. 25. 1.

**[illegible]** *A. Hall.* Elliptic motion. P.A. [illegible]

**[illegible]** *H. Osten.* Über eine Erklärung [illegible] Bewegung des Merkur[illegible] A.N.K. 171. 119.

Siehe auch 105; 468; 1702; 1718—19; 1739.

### Satellitenbewegung.

**[illegible]** *W. de Sitter.* Over de baan[illegible] Jupiter-Satelliten. C.A.A. [illegible]

**[illegible]** *W. de Sitter.* Over de libratie [illegible] groote satellieten van [illegible] nieuwe methode ter [illegible] massa van Satelliet I. [illegible]

**[illegible]** O sputnikach [illegible] Methode der [illegible] der schein[illegible] der Jupiterstra[illegible] 233.

### [illegible]bewegung.

**[illegible]** Eine Bemerkung [illegible] Kreisbahn eines [illegible] A.N.K. 170. 295.

**1794.** *A. v. Brunn.* Über die Verteilung der Perihellängen und Exzentrizitäten der kleinen Planeten. A.N.K. 172. 273.

**1795.** *H. Struve.* Zur Darstellung der Beobachtungen von Phoebe. S.A.B. 1905. 1058.

**1796.** *C. V. L. Charlier.* Über den Planeten 1906 TG. A.N.K. 171. 263.

Siehe auch 1708; 1761.

### Kometenbewegung.

**1797.** *H. v. Zeipel.* Sur l'instabilité du mouvement des comètes. B.A. 22. 449.

**1798.** *C. V. L. Charlier.* Über die Acceleration der mittleren Bewegung der Kometen. A.M.A.F. 3 Nr. 4.

**1799.** *H. C. Plummer.* On the possible effects of radiation on the motion of comets with special reference to Enckes comet. M.N.A.S. 65. 229.

**1800.** *J. B. Wood.* Velocity of comets. P.A. 13. 140.

**1801.** *B. Cohn.* Bahnbestimmung des Kometen 1742 I. A.N.K. 170. 245.

**1082.** *R. Jaegermann* Die Bewegung der Schweifmaterie des Kometen 1902 I auf einem zur Sonne konvexen Bogen. A.N.K. 171. 1.

**1803.** *A. O. Leuschner.* Note on the orbit of comet e 1904. P.A.S.F. 17. 60.

**1804.** *H. J. Zwiers.* Onderzoekingen over de baan van de periodische komeet Holmes en over de storingen in haar elliptische Beweging. C.A.A. 14. 674.

**1805.** *H. J. Zwiers.* Rückkehr des Holmesschen Kometen in 1906. A.N.K. 171. 65.

Siehe auch 1702; 1720.

### Meteoritenbewegung.

**1806.** *J. F. Lanneau.* Physics on shooting stars. P.A. 13. 434.

**1807.** *E. Weiß.* Höhenberechnung der Sternschnuppen. D.A.W. 77. 255.

**1808.** *S. A. Saunder.* The most probable position of a point determined from the intersections of 3 straight lines. M.N.A.S. 65. 854.

**1809.** *H. W. Chapman.* On the validity of meteor radiants deduced from 3 tracks. M. N. A. S. 65. 238. — *W. F. Denning* 592.

**1810.** *W. H. Wood.* The riddle of the radiant. E.M.W. 81. 501.

**1811.** *B. L. Newkirk.* Stationary meteor radiants. P.A.S.F. 17. 141.

**1812.** *G. Gruss.* Beobachtungen der Aprilsternschnuppen im Jahre 1904. A.N.K. 170. 173.

1813. *G. Grundmann.* Über die Bahn des Meteors vom 3. VII 05. J.S.G. 83. 20.

**Sternparallaxe.**

1814. *T. E. Heath.* A new view of the stars. Kn.L. (2) 2. 54.

1815. *J. C. Kapteyn.* Jets over de parallaxe van nevelvlekken. C.A.A. 14. 726.

**Doppelsternbewegungen.**

1816. *A. W. Roberts.* Apioidal binary star-systems. R.B.A. 75. 249.

1817. *X. E. Nörlund.* Détermination de l'orbite de ξ Ursae majoris. A.N.K. 170. 117.

1818. *W. Doberck.* On the elements of the orbit of 70 p Ophiuchi. A.N.K. 172. 161.

1819. *L. Terkán.* Beitrag zur Berechnung der Bahnelemente von β. Lyrae. A.N.K. 170. 171.

1820. *Ö. Bergstrand.* Untersuchungen über das Doppelsternsystem 61 Cygni. N.A.U. (4) 1. Nr. 3.

**Eigenbewegung.**

1821. *A. R. Hinks.* On the determination of proper motions without reference to meridian places. M.N.A.S. 65 713.

1822. *M. Wolf.* Stereoskopische Bestimmung der relativen Eigenbewegung von Fixsternen. A. N. K. 171. 321. — *F. Ristenpart* 172. 61.

1823. *G. C. Comstock.* A proposed method for the determination of radial velocities of stars. A.J.C. 23. 148.

1824. *E. J. Gheury.* Sur la rotation d'ensemble de l'univers. B.S.B.A. 10. 62.

**Sonnenapex.**

1825. *C. Schultz.* Die kürzlich entdeckten Nebel und die Fortbewegung der Sonne. D.W.B. 6. 140.

1826. *E. Belot.* Sur les comètes et la courbure de la trajectoire solaire. C.R. 142. 72.

**Astrophysik.**

1827. *T. J. J. See.* Researches on the physical constitution of the heavenly bodies. A.N.K. 169. 321.

1828. *T. J. J. See.* Researches on the rigidity of the heavenly bodies. A.N.K. 171. 369.

1829. *E. Belot.* Sur la loi de Bode et les inclinaisons sur l'écliptique. C.R. 141. 937.

Siehe auch 993; 1864; 2665; 3558.

**Gestalt der Himmelskörper.**

1830. *A. Liapounoff.* Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes. A.P.M. (8) 14.

**Kosmische Spektralanalyse.**

1831. *H. E. Lau.* Sur le spectre des étoiles nouvelles. B.A. 23. 297.

**Sonne.**

1832. *B.* Die alte, neue und neueste Sonnentheorie. S.L. 38. 125.

1833. *K. Manitius.* Hipparchs Theorie der Sonne nach Ptolemaeus. D.W.B. 6. 323; 340.

1834. *J. J. A. Müller.* De zonstheorie van Schmidt. N.T.N.I. 65. 43.

1835. *W. Wundt.* Über die Schmidtsche Theorie der Entstehung des scharfen Sonnenrandes. P.Z. 7.387.

1836. *S. L. Bailey.* The figure of the sun. S. (2) 23. 191.

1837. *M. Ceraski.* Photometric determination of the stellar magnitude of the sun. S. (2) 23. 885.

1838. *S. P. Langley.* On the comparative luminosity and total radiation of the solar corona. A.J.C. 21. 194.

1879. *K. Schwarzschild* und *W. Villiger.* Über die Helligkeitsverteilung des ultravioletten Lichtes auf der Sonnenscheibe. P.Z. 6. 737.

1840. *A. Schmidt.* Die Gesetze der Lichtbrechung angewendet auf die Physik der Sonne. D.W.B. 5. 215; 240.

1841. *A. Schwaßmann.* Über eine Methode einen Wert für den Brechungsexponenten der die Sonne umgebenden Materie zu erhalten. S.M.H. 4. 258.

1842. *A. Schuster.* The temperature of the solar athmosphere. A.J.C. 21. 258.

1843. *W. Wundt.* Über die Bestimmung der Sonnentemperatur. P.Z. 7. 384.

1844. *C. Braun.* Über die Temperatur der Sonne. N.O. 51. 129.

1845. *A. Bemporad.* Sulla legge di decrescimento del potere radiante dei punti del disco solare dal centro verso la periferia. B.G.C. 91. 10.

1846. *W. H. Julius.* Eene nieuwe methode ter bepaling van het verloop der stralingssterkte of de zonneschijf van het midden naar den rand. C.A.A. 14. 611.

1847. *C. Fabry.* Sur l'éclat intrinsèque de la couronne solaire pendant l'éclipse du 30. VIII 05. C.R. 141. 940.

1848. *S. Arrhenius.* Sur la nature physique de la couronne solaire. J.P. (4) 4. 460.

1849. *K. Schwarzschild.* Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. N.G.G. 1906. 41.

1850. *N. Donitch.* Essai d'étude de la chromosphère en dehors des éclipses du soleil avec un spectrographe à fente circulaire. A.P.B. (5) 19. 171.

1851. *T. Bredikhine.* Sur les grandes valeurs de la force répulsive du soleil. A.P.B. (5) 20. 39.

1852. *G. Hahn.* Some further results obtained with the spectroheliometer. P.R.S.E. 6. 726.

Siehe auch 1156; 1827; 2105; 2164—66; 2170—71; 3554.

### Sonnenflecken.

1853. *A. Garris.* Die Entstehung der Sonnenflecken und Protuberanzen. M.A.G.S. 33. 599.

1854. *E. Anceaux.* Sur la corrélation des taches et des marées du soleil. B.S.A.F. 19. 70.

1855. *A. Schuster.* Sonnenfleckenperioden. M.Z. 23. 312.

Siehe auch 2167.

### Mond.

1856. *W. Jerrinov.* O vozraste luny (Über das Alter des Mondes). B.S.R.A. 10. 242.

1857. *J. Franz.* Die Verteilung der Meere auf der Mondoberfläche. S.A.B. 1906. 373.

1858. *P. Puiseux.* Les risques de collision entre corps célestes et le témoignage de la lune sur ce sujet. B.S.B.A. 40. 112; 140.

### Planeten.

Siehe 1739; 1898.

### Satelliten.

Siehe 439; 1791.

### Kometen.

[illegible] Neuere Resultate [illegible] 31. 154.

[illegible] The tides of comets.

[illegible] La comète Perrine [illegible] sur les gaz rari[illegible]

1862. *R. Jaegermann.* Über die beim Kometen Borelly 1903 IV beobachtete hyperbolische Bewegung der Schweifmaterie (russ.). A.P.M. (8) 16. Nr. 12.

Siehe auch 1826.

### Fixsterne.

1863. *W. Stralonov.* Stroenie vselennoj (Zur Frage über die Einrichtung des Weltalls). B.S.R.A. 11. 107.

1864. *L. de Bal.* Les recherches de M. Schwarzschild concernant la détermination des grandeurs photographiques des étoiles. B.A. 22. 385; 417.

1865. *E. Hertzsprung.* Zur Strahlung der Sterne. Z.W.P. 3. 429.

1866. *P. G. Nutting.* High temperature radiation. A.J.C. 21. 400.

1867. *J. C. Kapteyn.* Star streaming. R.B.A. 75. 257.

1868. *A. R. Hinks.* Suggestions for a theory of the milky way and the clouds of Magellan. S. (2) 23. 884.

### Veränderliche Sterne.

1869. *A. A. Nijland.* Beobachtungen von langperiodischen Variablen. A.N.K. 172. 177.

1870. *A. W. Roberts.* Certain considerations regarding Algol variation. P.R.S.E. 24. 71.

1871. *J. H. Jeans.* On the density of Algol variables. A.J.C. 22. 93.

### Nebelflecke.

1872. *L. Courvoisier.* Über die Gasnebel und die Konstruktion der Milchstraße. A.N.K. 170. 325. — *H. Seeliger* 171. 209.

Siehe auch 459; 1815; 1825; 1868; 1899.

### Astronomische Beobachtungskunde.

1873. *E. Grossmann.* Über Schätzungen nach Augenmaß. A.N.K. 170. 149.

1874. *O. Meissner.* Über systematische Fehler bei Zeit- und Raumgrößenschätzungen. A.N.K. 172. 137.

### Persönliche Gleichung.

1875. *J. Stebbins.* Personal scale. P.A.S.F. 17. 73.

1876. *S. Schroeder.* A personal error in estimating the direction of a sound. P.N.I. 31. Nr. 3.

### Distanzen.

1877. *K. Hessen.* Die rechnerische Bearbeitung der Messungen von Monddistanzen. A.A.K. 10.

1878. *W. Reuter.* Die Bestimmung des Unterschiedes der wahren und der scheinbaren Monddistanz durch Zeichnung. A.H. 34. 431; 545.

1879. *H. B. Goodwins.* The passing of the lunars. N.M.L. 74. 790.

1880. *A. Wedemeyer.* Die Anwendung von Sterndistanzen in der nautischen Astronomie. A.H. 33. 368; 416; 569. — *H. v. Schaper* 570.

### Kosmologie.

1881. *A. A. Ivanov.* Vselennaja kak edinoe celoe (Das Weltall betrachtet als ein Gesamtorganismus). B.B.S.P. 3. 1543.

1882. *K. Geißler.* Betrachtungen über die Unendlichkeit des Weltalls. D.W.B. 5. 335

1883. *A. A. Ivanov.* Raznoobrazie mirov vo vselennoj (Die Verschiedenheit der Welten im Weltall). B.B.S.P. 3. 1040; 1075. 1096.

1884. *R. Rapaics.* A föld sorsa (Das Schicksal der Erde). U.B. 6. 429.

1885. *P. Mansion.* Le caractère réaliste de la doctrine des 5 éléments d'Aristote. A.S.B. 30 A. 114.

Siehe auch 3540.

### Sonnensystem.

1886. *F. R. Moulton.* On the evolution of the solar system. A.J.C. 22. 165; 355. — *W. H. Pickering* 354; 357.

Siehe auch 992; 1891; 1897.

### Weltraum.

1887. *H. Poincaré.* Une image de l'Univers. B.S.A.F. 19. 30.

1888. *A. Schmidt.* Die Athmosphäre des Weltraums. B.P.A. 2. 18.

1889. *J. Plaßmann.* Interplanetare Absorption des Lichtes. M.V.A.P. 15. 5.

Siehe auch 1824; 1863.

### Kosmogonie.

1890. *A. M. Clerke.* Modern Cosmogonies. Kn.L. (2). 2. 24; 95.

1891. *C. Easton.* Kosmogenieën. De beschouwingen over het onstaan van het zonnestelsel in verband met den toestand van het inwendige der aarde. T.N.A.G. (2) 20. 137.

1892. *S. B.* Geneza Światów (Über Weltentstehung). W.W. 24. 705.

1893. *E. B. Knerr.* A theory of the cosmos. T.K.A. 17. 20.

1894. *A. A. Ivanov.* Proischoždenie vselennoj (Der Ursprung des Weltalls). B.B.S.P. 3. 1233; 1261.

1895. *R. Lieckfeldt.* Die Entstehung und Entwickung der Weltkörper. D.W.B. 5. 159; 188; 204.

1896. *G. H. Darwin.* Cosmical evolution. O. 28. 337; 361; 401; S. (2) 22. 257; E.M.W. 82. 79.

1897. *F. R. Moulton.* On the evolution of the solar system. A.J.C. 22. 165.

1898. *A. P. Coleman.* Ny teori om planeternes dannelse. K.K. 26. 180.

1899. *W. Holtz.* Wie ein planetarischer Urnebel in Rotation kommen kann. N.N.G. 1905. 237.

### Kant-Laplacesche Theorie.

1900. *Holzmüller.* Die Bildung des Sonnensystems nach Kant und Laplace und die neueren Forschungsergebnisse über diesen Gegenstand. J.N.K. 1905—06. 50.

1901. *E. Hoppe.* Die Kant-Laplacesche Theorie und die Gasgesetze. S.M.H. 4. 237.

1902. *W. Schooling.* The story of the golden mist. N.C.A. 57. 464.

Siehe auch 1899.

### Mathematische Geographie.

Siehe 267.

### Sphärische Astronomie.

1903. *H. Maurer.* Über Auflösung von Poldreiecksaufgaben durch Diagramme, die auf zenithalen Kartenprojektionen beruhen. A.H. 33. 355.

1904. *G. Pellehn.* Gnomonisches Absetzen des Poldreiecks. A.H. 34. 293.

1905. *J. H. Hummel.* Nieuwe afleiding van de formule voor den uurhoek. D.Z.R. 27. 201.

1906. *M. Littlehales.* Graphical method of determining altitudes and azimuths. M.W.R. 28. Nr. 6.

1907. *E. Massany.* A nap ei a csillagok járása (Lauf der Sonne und der Sterne). I. 9. 89.

1908. *W. F. Rigge.* The time of moonrise. P.A. 13. 550.

1909. *Großmann.* Die Berechnung der möglichen Sonnenscheindauer und ihre Normalwerte für Deutschland. M.Z. 22. 433.

1910. *N. N.* The spheroplane. N.M. L. 74. 824.

Siehe auch 129; 1769.

## Nautik.

1911. *H. B. Goodwin.* A new method in nautical astronomy. P.N.I. 31. Nr. 4.

1912. *G. Pes.* Sopra alcuni metodi e tavole per i calcoli d'astronomia nautica. R.M.R. 1906. Nr. 6.

1913. *W. A. de Wijn.* De zeevaartkundigen tafeln van Bossen en Mars. D. Z.R. 27. 252.

1914. *D. Mars* en *P. Bossen.* De circummeridian tafelen von P. Bossen en D. Mars. M.B.H. 20. 103.

1915. *E. Knipping.* Vereenvoudiging der nautisch-astronomische tafels en berekeningen. D.Z.R. 27. 368.

1916. *Holthus.* Zeevaartkundige tafelen. D.Z.R. 27. 379.

1917. *W. Reuter.* Die Azimutdiagramme und ihre Verwendung zur Lösung nautischer Aufgaben. A.H. 34. 72.

1918. *J. Posthumus.* Azimuth zonder hoogte. D.Z.R. 26. 599; 27. 1.

1919. *E. Knipping.* Zur Sumnerlinie. H.H. 42. 126.

1920. *Schubart.* Eine praktische Standlinie. H.H. 42. 101.

1921. *J. Flause.* Star navigation. N. M.L. 74. 853.

1922. *E. Havinga.* Kimduiking en zeestroomen. D.Z.R. 27. 145.

1923. *H. Meyer.* Kimmbeobachtungen. A.H. 34. 438.

1924. *F. Lauffer.* Ein Kimmdiagramm. M.A.G.S. 33. 700.

1925. *G. Hilleret.* Nouvelle méthode pour trouver le point rapproché. A.H.G. 26. 81.

Siehe auch 129; 130; 1699; 1880; 1984; 2666.

## Zeitbestimmung.

1926. *W. E. Cooke.* Time determination. E.M.W. 81. 545.

1927. *F. H. Seares.* The Polaris vertical circle method of determining time and azimuth. B.L.O. 5.

1928. *G. O. James.* On the Polaris vertical circle method of obtaining time with the surveyors transit. P.A. 13. 499. — *F. H. Seares* 553.

1929. *C. Stechert.* Zeit- und Breitenbestimmungen durch die Methode gleicher Zenithdistanzen. A.D.S.H. 28. Nr. 1.

Siehe auch 2688.

## Gnomonik.

1930. *L. Weinek.* Einfache Betrachtung über Sonnenuhren. D.W.B. 6. 53.

1931. *L. Weinek.* Zur Theorie der Sonnenuhren. S.A.W. 114. 831.

1932. *A. L. Andreini.* Intorno alla teoria e costruzione degli orologi solari secondo il sistema orario babilonese, italico e guidaico. R.F.M. 7 A. 434.

## Ortsbestimmung.

1933. *X.* Improved methods for finding altitude and azimuth, geographical position and the variation of the compass II. M.W.R. 34. 7.

1934. *W. A. de Wijn.* Über Ortsbestimmungen des Schiffes mittels des Zweinebenmeridianhöhenproblems. A.H. 33. 547.

1935. *L. Fenech.* Sull' approssimazione del punto ottenuto mediante rette d'altezza. R.M.R. 38b. 595.

1936. *A. A. Nijland.* Opredelenie položenija korablja (Bestimmung der Lage eines Schiffes im Meere ohne Hilfe von Instrumenten und Berechnungen mit einer Genauigkeit von 1°). B.S.R.A. 10. 253.

1937. *H. B. G.* An improved exmeridian table. N.M.L. 74. 889.

1938. *K. Prakken.* De Douwes' formule. D.Z.R. 27. 334.

## Breitebestimmung.

1939. *X.* A method of determining the latitude at sea without time. P. N.I. 30. 755.

1940. *G. Fazzari.* Determinazione della latitudine di un punto della superficie terrestre. Pit. 12. 20.

1941. *B. Cookson.* The effect of the lunar deflection of the vertical on latitude observations. P.C.P.S. 13. 198.

Siehe auch 1929.

## Längenbestimmung.

1942. *G. Bolwin.* Längenbestimmung zur See aus Mondhöhe. H.H. 1906. No. 1.

1943. *Pevcov.* Opredelenie dolgot (Über die Bestimmung der geographischen Länge aus Beobachtungen des Mondes auf gleichen Höhen mit Sternen in der Nähe des 1. Vertikals). B.S.R.A. 11. 118.

## Höhenprobleme.

1944. *H. Teege.* Zur Höhenberechnung. A.H. 34. 127; 297.

1945. *A. Claude* et *L. Driencourt.* La méthode des hauteurs égales en astronomie. R.G.O. 19. 972.

1946. *H. B. Goodwin.* On finding position lines by star altitudes. N.M. L. 74. 41.

Siehe auch 1778; 1934; 2668.

**Dämmerungsproblem.**

1947. *P. Weinmeister.* Über Bestimmung der kürzesten Dämmerung. S.I. D. 1906 A. 8.

**Großkreisschiffahrt.**

1948. *A. Rust.* Notes on the use of the great circle sailing for the solutions of problems in nautical astronomy. P. N.I. 31. Nr. 4.

1949. *Ferruccio Tami.* La navigazione ortodromica e la geometria descrittiva. R.M.R. 38. a. 95.

**Leuchtturmwesen.**

Siehe 2781.

**Chronologie.**

1950. *J. Plaßmann.* Zur Verwandlung der mittleren Zeit in Sternzeit und umgekehrt. M.V.A.P. 15. 78.

1951. *A. Pahde.* Zeitmaß und Kalender. J.N.K. 1905—06. 65.

1952. *E. Meyer.* Ägyptische Chronologie. A.B.A. 1904.

1953. *W. B. Dawson.* Solar and lunar cycles implied in the prophetic numbers in the book of Daniel. P.T.R.S.C. (2) 11. 33.

1954. *E. Förstemann.* Die Schlangenzahlen der Dresdener Mayahandschrift. D.W.B. 5. 199.

1955. *N. Herz.* Das Geburtsjahr Christi. D.V.N. 77. 5.

1956. *L. Wilser.* Altgermanische Zeitrechnung. V.N.K. 18. 3.

**Kalender.**

1957. *A. Faure.* Le calendrier universel. B.S.A.F. 19. 335.

1958. *C. A. Laisant.* Un calendrier perpétuel automatique. E.M. 7. 233.

1959. *H. L.* An new twentieth century calender. E.M.W. 82. 207.

Siehe auch 1951.

**Ephemeriden.**

1960. *P. Tannery.* Les éphémérides chez les Byzantins. B.D. (2) 30. 59.

**Osterdatum.**

1961. *W. Erben.* Zur Osterrechnung. A.Z. 1905. Nr. 84.

1962. *R.* Vraag over den paaschdatum. V.W.A. 20. 150.

1963. *C. Leigh.* Formula for finding the date of easter. N. 73. 535.

1964. *K. Örtel.* Das Osterdatum von 1903. A.Z. 1905. Nr. 69.

1965. *A. M. W. Downing.* The date of Easter in 1905. J.B.A.A. 15. 132; P.A.S.F. 17. 80.

**Niedere Geodäsie.**

Siehe 131; 182; 1985; 3300—06; 3524; 3634.

**Messen.**

1966. *F. W. Bucerius.* Winkelmessung. S.B.G.Z. 36. 190.

Siehe auch 40; 42.

**Distanzmessung.**

1967. *R. Daublevsky v. Sterneck.* Versuch einer Theorie der scheinbaren Entfernungen. S.A.W. 114. 1685.

1968. *G. Delitala.* Per la misura indiretta delle distanze. Pol. 50. 259.

**Triangulierung.**

1969. *J. Collet.* Compensation des figures géodésiques, théorie et applications. A.U.G. 17. 413.

1970. *K. Šarnhorst.* Predvaritelnyj otčet o perevyčislenii našich trianguljacij dlja soedinenija ich v odnu celnuju sistemu (Vorläufiger Bericht über die Revisionsberechnung unserer Triangulationen, um sie systematisch zu verbinden). M.S.M.T. 59. 150.

Siehe auch 28; 3556.

**Einschneiden.**

1971. *S. Finsterwalder.* Der „gefährliche Ort" beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel. S.A.M. 35. 3.

Siehe auch 3503.

**Polygonometrie.**

Siehe 43.

**Grundstückstellung.**

Siehe 3300—01.

**Geodätische Koordinaten.**

1972. *L. B. Stewart.* The computation of geodesic positions. A.I.B. 24. 147.

Siehe auch 3635.

**Tachymetrie.**

Siehe 3517; 3525; 3536.

**Nivellement.**

1973. *A. J. Stodolkiewicz.* O wyznaczaniu wysokości miejsca ponad poziom morza (Über die Bestimmung der Meereshöhen). P.T.W. 41. 268.

Siehe auch 2691; 3185; 3302; 3637.

**Barometrische Höhenmessung.**

1974. *Großmann.* Die barometrische Höhenformel und ihre Anwendung. M. Z. 23. 152.

1975. *L. Maillard.* Note sur la formule barométrique de Laplace. A.S.G. (4) 16. 339.

1976. *J. Hann.* Bemerkungen über die Schwerekorrektion bei den barometrischen Höhenmessungen. M.Z. 22. 456.

1977. *A. Krziz.* Das Reduzieren des Barometerstandes auf das Meeresniveau. D.W.B. 6. 361.

1978. *J. Ball.* On a logarithmic slide-rule for reducing readings of the barometer to sea-level. Q.J.M.S. 31. 285.

1979. *P. Steindel.* Ein Apparat zum Nachweis der Luftdruckabnahme für kleine Höhenunterschiede. Z.P. 19. 24.

Siehe auch 2078—79.

**Topographie.**

1980. *Hatt.* Détermination simultanée de 2 points au moyen de constructions graphiques à grande échelle. C.R. 142. 421.

Siehe auch 44; 241; 3186; 3555—56.

**Landesvermessung.**

1981. *O. Frank.* Landesaufnahme und Kartographie. M.M.G.I. 24. 49.

1982. *A. Wedemeyer.* Rechenverfahren zur Böhlerschen Basismessung. A.H. 34. 131.

1983. *C. W. Sutton.* Inform el plano de la provincia constit del Callao. B.C.I.M.P. 33. 9.

**Kartenprojektionen.**

1984. *A. Wolkenhauer.* Beitr Geschichte der Kartographie und des 15.—17. Jahrhunderts. M. 1. Heft 2.

1985. *J. Frischauf.* Die Abb lehre und deren Anwendung au graphie und Geodäsie. Z.E. 36. 3

1986. *A. J. van der Grinten* stellung der ganzen Erdoberflä einer kreisförmigen Projektio P.G.M. 50. 155.

1987. *A. J. van der Grinten* circular projection of the whole surface. A.J.S. (4) 19. 357.

1988. *E. A. Reeves.* Van der G projection. G.J. 24. 670.

1989. *Berthon.* Une représ du globe terrestre sur une pr étoilée à 4 branches. B.G.H.D. 1

1990. *C. Abbe.* A modified p jection adapted to studies in meteorology. B.A.G.S. 38. 126.

1991. *N. de Zinger.* La proje Lagrange appliquée à la carte Russie de l'Europe. C.R. 143.

1992. *H. Maurer.* Bemerkung Aufsatz „A.H. 33. 125.". A.H.

Siehe auch 143; 1903—04; 1

**Flächenberechnung.**

Siehe 3406—07.

**Erdmassenberechnung.**

Siehe 3418—19.

(Fortsetzung folgt.)

Auf Wunsch des Herrn A. Ljapunov in S. Petersburg stelle ich fe seine im Abhandlungsregister Bd. 53, S. 216, Nr. 1934 und Nr. 1935 sowie B S. 201, Nr. 531 angezeigten Arbeiten nicht in russischer, sondern in *franzö* Sprache verfaßt sind.

E. Wölffin

---

**Berichtigung.**

S. 138 müssen Z. 2—4 v. o. wie folgt lauten: z. B. 9 m Länge $P_k \sim \frac{E}{2 + 0 \cdot 0}$ wobei für Flußeisen die Druckspannung $\sim$ 3000 at etwas die „Proportionalitätsgr überschreitet. Euler vernachlässigt das Glied 0·04, der Fehler ist hier $\sim 2\,\%_0$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S. 159 | Z. 14 | v. o. | lies | Kuben | statt | Kurven, |
| S. 161 | Z. 14 | v. o. | „ | Buchs | „ | Buch, |
| S. 161 | Z. 12 | v. u. | „ | *D* | „ | *d*, |
| S. 162 | Z. 20 | v. u. | „ | J. Ernst | „ | A. Ernst, |
| S. 164 | Z. 21 | v. o. | „ | des | „ | der. |



# Die Aufgabe der sechs Punkte in der Photogrammetrie.

Von Wilhelm Scheufele in München.

## Einleitung.

Seitdem die Vervollkommnung des photographischen Apparates es ermöglicht hat, selbst bei größerem Gesichtsfeld noch perspektivisch richtige Bilder eines Geländes auf bequeme Weise herzustellen, hat man auch schon wiederholt mit gutem Erfolg photographische Aufnahmen zu Vermessungszwecken benützt. Von den beiden Hauptaufgaben, welche als Anwendung der Photographie auf die Feldmeßkunst erscheinen, nämlich Rekonstruktion des Geländes aus mehreren Photographien und Bestimmung des Standpunktes, von dem aus eine Photographie aufgenommen wurde, hat bisher nur die erste praktische Bedeutung erlangt. Die zweite Aufgabe dagegen hat meist nur zu theoretischen Untersuchungen Anlaß gegeben und dabei zu neuen Problemen geführt, welche als Verallgemeinerungen der bekannten Methode des ebenen Rückwärtseinschneidens aufgefaßt werden können. Mit der allgemeinen Lösung dieser zweiten Aufgabe beschäftigt sich die vorliegende Arbeit.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, kurz einige Begriffe zu erklären, welche im folgenden häufig gebraucht werden. Man bezeichnet das Lot, welches vom optischen Mittelpunkt des Objektivs auf die Ebene der photographischen Platte (Bildebene) gefällt werden kann, als optische Achse; die Länge dieses Lotes heißt Bildweite, der Fußpunkt desselben Hauptpunkt der Photographie. Die Schnittgerade der Bildebene mit der durch den optischen Mittelpunkt gelegten Horizontalebene ist der Horizont des Bildes. Der Schnittpunkt der durch den Linsenmittelpunkt gezogenen Vertikalen mit der Bildebene ist der Fluchtpunkt der Vertikalen (Nadir, Zenith). Hauptpunkt und Bildweite nennt man die inneren Orientierungselemente der Photographie, während die Richtung der optischen Achse im Objektraum, Horizont und Nadir als äußere Orientierungselemente bezeichnet werden.

Wenn eine zweckmäßige Einrichtung des photographischen Apparates es gestattet, Bildweite, Hauptpunkt und Horizont einer Photo-

graphie sofort anzugeben, so kann man sowohl durch Konstruktion als auch durch Rechnung in einfacher Weise aus der Photographie die Horizontal- und Vertikalwinkel der Sehstrahlen vom Standpunkt nach den Objektpunkten finden; mit Hilfe dieser Winkel läßt sich durch ebenes Rückwärtseinschneiden nach bekannten Objektpunkten der Grundriß des Standpunkts und die Höhe desselben leicht berechnen. Besonders einfach gestaltet sich die Lösung, wenn die Bildebene vertikal stand.[1])

Kennt man von einer Photographie nur die innere Orientierung (Hauptpunkt und Bildweite), so kann man daraus zwar die Horizontal- und Vertikalwinkel nicht mehr entnehmen; wohl aber kennt man dann noch die Winkel, welche die Strahlen des Sehstrahlenbündels unter sich bilden. Hieraus findet man den Standpunkt durch Rückwärtseinschneiden im Raum.[2])

Ist die innere Orientierung nicht bekannt, so können auch die Winkel der Sehstrahlen aus der Photographie nicht mehr berechnet werden. Dagegen sind die Doppelverhältnisse des Sehstrahlenbündels dieselben wie die Doppelverhältnisse des entsprechenden Punktfeldes in der Photographie. Bemerkenswert ist nun, daß auch diese Doppelverhältnisse zur Bestimmung des Standpunktes ausreichen. In dem Falle daß die Bildebene vertikal stand und die Richtung des Horizontes gegeben ist, kann man den Grundriß des Standpunktes durch ein ebenes Problem finden, das unter dem Namen „Problem der fünf Punkte“ bekannt ist. An Stelle der zwei Winkel, welche beim Snelliusschen Problem notwendig sind, treten hier zwei unabhängige Doppelverhältnisse, welche die Kenntnis der Grundrisse und der Bilder von 5 Punkten des Objektes erfordern.

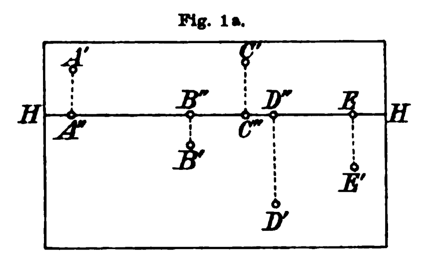
Denkt man sich durch alle Strahlen des Bündels vom Standpunkt $O$ nach den Objektpunkten $A, B, C, D, E$ Vertikalebenen gelegt und dieses Ebenenbüschel sowohl mit der Bildebene als auch mit der Grundrißebene zum Schnitt gebracht, so überzeugt man sich leicht, daß das Strahlenbüschel $O_0(A_0 B_0 C_0 D_0 E_0)$ in der Grundrißebene projektiv ist zu der Punktreihe $A''B''C''D''E''$, die man durch Projektion der Bildpunkte $A'B'C'D'E'$ auf die Richtung des Horizontes $HH$

1) Formeln zur Berechnung der Horizontal- und Vertikalwinkel aus orientierten Bildern befinden sich in C. Koppe, Photogrammetrie Weimar 1889. S. 8; und in S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Band VI. 2. S. 32—33.

2) S. Finsterwalder und W. Scheufele, Das Rückwärtseinschneiden im Raum. Sitzungsberichte der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften. München 1903. S. 591—614.

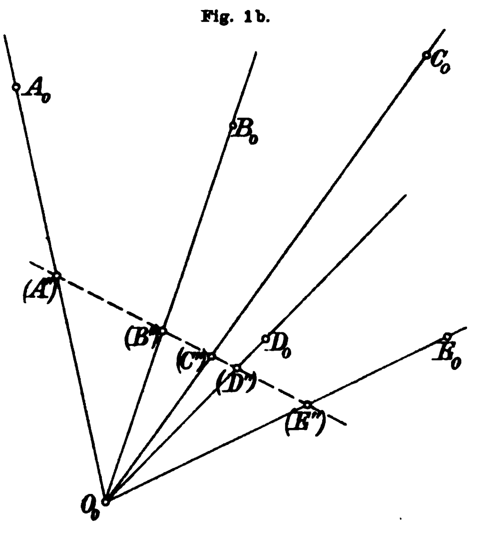
erhält. Die Bestimmung des Standpunkt-Grundrisses $O_0$ kommt also darauf hinaus, durch die Punkte $A_0B_0C_0D_0E_0$ fünf Strahlen eines Büschels so zu legen, daß sie miteinander die gleichen Doppelverhältnisse bilden wie die entsprechenden Punkte $A''B''C''D''E''$ in der Bildebene.

Fig. 1a.




Diese Aufgabe ist schon wiederholt gelöst worden. $O_0$ ist der vierte Schnittpunkt zweier Kegelschnitte, deren drei andere Schnittpunkte bereits bekannt sind. Der erste Kegelschnitt ist bestimmt durch die Punkte $A_0B_0C_0D_0$ und das Doppelverhältnis $O_0(A_0B_0C_0D_0) = A_0(A_0B_0C_0D_0) = (A''B''C''D'')$; der zweite Kegelschnitt ist bestimmt durch die Punkte $A_0B_0C_0E_0$ und das Doppelverhältnis $O_0(A_0B_0C_0E_0) = A_0(A_0B_0C_0E_0) = (A''B''C''E'')$. F. Steiner[1]) hat die Aufgabe graphisch dadurch gelöst, daß er die zwei Kegelschnitte punktweise konstruierte. Kinkel[2]) und Mandl[3]) benützten zur Konstruktion des Punktes $O_0$ die zerfallenen Kegelschnitte des Kegelschnittbüschels mit den Grundpunkten $A_0B_0C_0O_0$; der erstere konstruiert zuerst das gemeinsame Polardreieck des Büschels, der letztere die Punkt-Involution, welche von dem Kegelschnittbüschel auf der Geraden $D_0E_0$ ausgeschnitten wird. Besonders einfach wird die Lösung, wenn die drei Punkte $A_0B_0C_0$ auf einer Geraden liegen, weil dann die beiden Kegelschnitte in zwei Geradenpaare ausarten.

Fig. 1b.




F. Steiner[1]) und Mandl[3]) haben auch analytische Lösungen des Problems der fünf Punkte angegeben, die aber ihres Umfangs wegen sich zur wirklichen Berechnung wenig eignen.

Ist der Grundriß des Standpunktes gefunden, so bekommt man in

1) F. Steiner, Die Photographie im Dienste des Ingenieurs. Wien 1891/93. S. 24 ff.

2) Wochenschrift des österr. Ing. u. Arch. Vereins 1891. Nr. 32.

3) J. Mandl, Über Verwertung von photographischen Aufnahmen aus dem Luftballon. Mitt. über Gegenst. d. Artill. u. Genie-Wesens 1898.

einfacher Weise auch die Höhe desselben, sowie die innere Orientierung der Photographie.

Das Problem der fünf Punkte reicht zur Bestimmung des Standpunkt-Grundrisses auch dann noch aus, wenn zwar die Bildebene nicht vertikal stand, dafür aber der Fluchtpunkt $N$ der Vertikalen auf der Photographie bekannt ist; in diesem Fall ist nämlich das Strahlenbüschel $O_0(A_0 B_0 C_0 D_0 E_0)$ projektiv zu dem Strahlenbüschel $N(A'B'C'D'E')$ in der Bildebene, dessen Doppelverhältnisse wieder aus der Photographie entnommen werden können.

Wenn von der Photographie keinerlei Orientierungselemente gegeben sind, so kann, wie E. Wälsch[1]) gezeigt hat, der Standpunkt gefunden werden durch zweimalige Lösung des Problems der fünf Punkte; notwendig ist dazu die Kenntnis der gegenseitigen Lage von sechs Punkten des Objektes und ihrer Bilder. Nachdem der Standpunkt gefunden ist, bietet die Bestimmung der inneren Orientierung keine Schwierigkeiten mehr. Die analytische Durchführung dieser Aufgabe gliedert sich in folgende Abschnitte:

1. Problem der fünf Punkte;
2. Problem der sechs Punkte;
3. Determination und Spezialfälle;
4. Ausgleichung des Standpunktes;
5. Bestimmung der inneren Orientierung;
6. Ausgleichung der inneren Orientierung;
7. Numerisches Beispiel.

Das im 7. Abschnitt behandelte Zahlenbeispiel stützt sich auf eine Photographie[2]) des Vernagtferners, welche auf Veranlassung E. Richters im Jahre 1884 aufgenommen wurde, sowie auf die Karte[3]) des Vernagtferners, welche auf Grund seiner Vermessung in den Jahren 1888/89 von Herrn Dr. S. Finsterwalder gezeichnet wurde.

## 1. Problem der fünf Punkte.

Es sind 5 Punkte $A, B, C, D, E$ gegeben; gesucht wird ein Punkt $P$ von der Eigenschaft, daß die Strahlen $PA, PB, PC, PD$ und $PE$ gegebene Doppelverhältnisse $P(CDEB) = K_1$ und $P(CDEA) = K_2$ miteinander bilden.

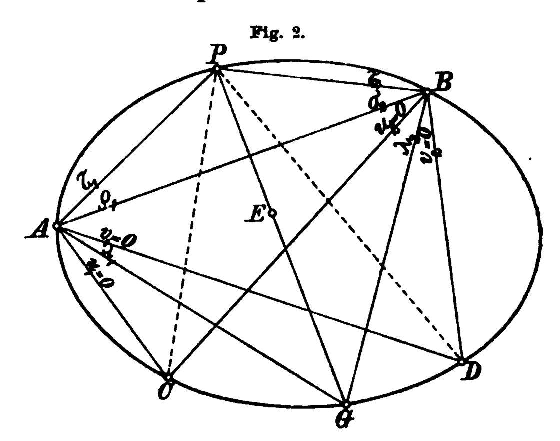
1) F. Steiner, Die Photographie im Dienste des Ingenieurs. Wien 1891/93. S. 24 ff.

2) „1725. Kesselwandspitze v. Plattei.“ Verlag von Würthle und Sohn, Salzburg.

3) S. Finsterwalder, Der Vernagtferner. Wissenschaftl. Erg.-Hefte des D. u. Ö. Alpenvereins. I. Band, 1. Heft. Graz 1897.

Bewegt man den Punkt $P$ mit Beibehaltung der Doppelverhältnisse so, daß zunächst nur 4 Strahlen des Büschels $P$ durch ihre entsprechenden Punkte $A, B, C, D$ hindurchgehen, so beschreibt $P$ offenbar einen Kegelschnitt, der durch die Punkte $A, B, C, D$ hindurchgeht. Zugleich ergibt sich hieraus, daß auch der fünfte Strahl immer durch einen festen Punkt $G$ des gleichen Kegelschnitts gehen muß. Punkt $P$ ist daher der zweite Schnittpunkt der Geraden $GE$ mit dem genannten Kegelschnitt.

Der Kegelschnitt kann aufgefaßt werden als Erzeugnis zweier projektiver Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten $A$ und $B$. Um die bilineare Beziehung, welche zwischen den Parametern entsprechender Strahlen beider Büschel bestehen muß, möglichst einfach zu gestalten, wählt man als Grundstrahlen des Büschels $A$ die Geraden $AC$ und $AD$ mit den Gleichungen $U_1=0$ und $V_1=0$, und als Grundstrahlen des Büschels $B$ die Geraden $BC$ und $BD$ mit den Gleichungen $U_2=0$ und $V_2=0$. Die Gerade $AB$ hat dann als Gerade des Büschels $A$ die Gleichung $U_1-\varrho_1 V_1=0$ und als Gerade des Büschels $B$ die Gleichung $U_2-\sigma_2 V_2=0$; dabei ist $\varrho_1=\frac{U_1}{V_1}$, worin die laufenden Koordinaten durch die Koordinaten des Punktes $B$ ersetzt sind, und $\sigma_2=\frac{U_2}{V_2}$, worin an Stelle der laufenden Koordinaten die Koordinaten des Punktes $A$ getreten sind. Bedeuten $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Parameter der Geraden $AG$ und $BG$, so ist nach bekannten Sätzen




$$\frac{\lambda_1}{\varrho_1}=A(CDGB)=P(CDEB)=K_1$$

und

$$\frac{\lambda_2}{\sigma_2}=B(CDGA)=P(CDEA)=K_2,$$

woraus $\lambda_1=\varrho_1 K_1$ und $\lambda_2=\sigma_2 K_2$ folgt. Die bilineare Beziehung zwischen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ hat die Gestalt $\lambda_2=\varkappa\lambda_1$; und daraus folgt $\varkappa=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Die Gleichung der Geraden $GP$ hat die Form $(U_1-\lambda_1 V_1)-\nu(U_2-\lambda_2 V_2)=0$; $\nu$ wird wieder aus dem Umstand bestimmt, daß die Gerade durch den Punkt $E$ gehen soll; also wird $\nu=\left(\frac{U_1-\lambda_1 V_1}{U_2-\lambda_2 V_2}\right)_E$.

Sind $\tau_1$ und $\tau_2 = \varkappa\tau_1$ die Parameter, die zum Punkt $P$ gehören, so müssen die Koordinaten von $P$ den 3 Gleichungen genügen

(I) $$(U_1 - \lambda_1 V_1) - \nu(U_2 - \lambda_2 V_2) = 0$$

(II) $$U_1 - \tau_1 V_1 = 0$$

(III) $$U_2 - \varkappa\tau_1 V_2 = 0.$$

Hieraus folgt durch geeignete Kombination

$$-\lambda_1 V_1 + \tau_1 V_1 + \varkappa\nu\lambda_1 V_2 - \varkappa\nu\tau_1 V_2 = 0$$

oder

$$(\tau_1 - \lambda_1)(V_1 - \varkappa\nu V_2) = 0$$

d. h.:

(IV) $$V_1 - \varkappa\nu V_2 = 0 \quad \text{(Gerade } DP\text{)};$$

und daraus mit Benützung der Gleichung (I):

(V) $$U_1 - \nu U_2 = 0 \quad \text{(Gerade } CP\text{)}.$$

Der Schnittpunkt der Geraden (IV) und (V) ist der gesuchte Punkt $P$.

Im einzelnen erhält man folgendes Formelsystem: Gegeben sind die Koordinaten

$$A(a_1 a_2) \quad B(b_1 b_2) \quad C(c_1 c_2) \quad D(d_1 d_2) \quad E(e_1 e_2),$$

sowie die Doppelverhältnisse $K_1 = P(CDEB)$ und $K_2 = P(CDEA)$.

Man berechnet der Reihe nach

$$(ab) = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \quad (ac) = \frac{c_2 - a_2}{c_1 - a_1} \quad (ad) = \frac{d_2 - a_2}{d_1 - a_1} \quad (bc) = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} \quad (bd) = \frac{d_2 - b_2}{d_1 - b_1}$$

$$\varrho_1 = \frac{(ab) - (ac)}{(ab) - (ad)} \quad \sigma_2 = \frac{(ab) - (bc)}{(ab) - (bd)} \quad \lambda_1 = \varrho_1 K_1 \quad \lambda_2 = \sigma_2 K_2$$

$$\varkappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \qquad \nu = \frac{(e_2 - a_2)(1 - \lambda_1) - (e_1 - a_1)[(ac) - \lambda_1 (ad)]}{(e_2 - b_2)(1 - \lambda_2) - (e_1 - b_1)[(bc) - \lambda_2 (bd)]}$$

$$(dp) = \frac{(ad) - \nu\varkappa(bd)}{1 - \nu\varkappa} \qquad (cp) = \frac{(ac) - \nu(bc)}{1 - \nu}$$

$$p_1 = \frac{c_1(cp) - d_1(dp) + d_2 - c_2}{(cp) - (dp)} \quad p_2 = d_2 + (p_1 - d_1)(dp) = c_2 + (p_1 - c_1)(cp).$$

$p_1$ und $p_2$ sind die Koordinaten des gesuchten Punktes $P$.

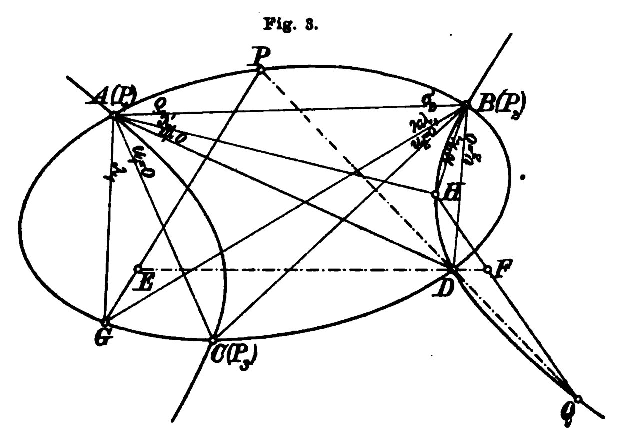
## 2. Problem der sechs Punkte.

Gegeben sind sechs Punkte $P_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ im Raum, sowie ihre Bildpunkte, die kurz mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet sein mögen.

Denkt man sich den gesuchten Standpunkt $O$ mit dem Punkt $P_4$ verbunden und legt man durch diese Gerade und die übrigen 5 Punkte

Ebenen, so wird dieses Ebenenbüschel von irgend zwei Ebenen stets nach projektiven Strahlenbüscheln geschnitten. Wählt man als die eine Ebene die Bildebene, so ist das zugehörige Strahlenbüschel vollständig bekannt; es ist nämlich das Strahlenbüschel 4 (1, 2, 3, 5, 6). Als zweite schneidende Ebene nimmt man zweckmäßig die Ebene $P_1 P_2 P_3$; diese Ebene wird nach einem Strahlenbüschel geschnitten, dessen Mittelpunkt $P$ unbekannt ist. Dagegen erhält man sofort für jeden Strahl des Büschels einen Punkt, wenn man von $P_4$ aus alle übrigen Punkte auf die Ebene $P_1 P_2 P_3$ zentral projiziert; die Punkte $P_1 P_2 P_3$ gehen dabei in sich selbst über; die Zentralprojektionen der Punkte $P_5$ und $P_6$ sind $D$ und $E$. Da nun die Doppelverhältnisse des Büschels $P(P_1 P_2 P_3 D E)$ aus dem Büschel 4 (1, 2, 3, 5, 6) in der Bildebene entnommen werden können, so hängt die Bestimmung des Punktes $P$ nur von der Lösung des Problems der fünf Punkte in der Ebene $P_1 P_2 P_3$ ab. Die Gerade $P P_4$ ist dann ein erster geometrischer Ort für den Standpunkt $O$.

Fig. 3.




In gleicher Weise denkt man sich den Punkt $O$ mit $P_5$ verbunden und durch diese Gerade und die übrigen Punkte Ebenen gelegt. Der Schnitt dieses Ebenenbüschels mit der Bildebene ist das bekannte Strahlenbüschel 5 (1, 2, 3, 4, 6). Der Schnitt mit der Ebene $P_1 P_2 P_3$ ist ein dazu projektives Strahlenbüschel $Q(P_1, P_2, P_3, D, F)$; Punkt $F$ ist der Schnittpunkt der Geraden $P_5 P_6$ mit der Ebene $P_1 P_2 P_3$. Punkt $Q$ wird daher ebenfalls durch Lösen des Problems der fünf Punkte gefunden. Gerade $Q P_5$ ist ein zweiter geometrischer Ort für den. Standpunkt $O$.

Die Lage der Ebene $P_1 P_2 P_3$ gegenüber dem Koordinatensystem wird am einfachsten bestimmt durch ihre Schnittgerade $P_{12} P_{13} P_{23}$ mit der Grundrißebene und den Neigungswinkel $\varepsilon$ gegen die Grundrißebene. Löst man in der Ebene $P_1 P_2 P_3$ zweimal das Problem der fünf Punkte und projiziert dann die ganze in der Ebene $P_1 P_2 P_3$ gelegene Figur orthogonal auf die Grundrißebene, so bleiben die Doppelverhältnisse, die allein die Punkte $P$ und $Q$ bestimmen, unverändert; man kann daher die Grundrisse der Punkte $P$ und $Q$ auch direkt in der Weise

finden, daß man die zweimalige Lösung des Problems der fünf Punkte gleich im Grundriß vornimmt. Hat man die Grundrisse von $P$ und $Q$, so liefert der Schnittpunkt der Grundrisse von $PP_4$ und $QP_5$ auch den Grundriß des Standpunktes. Aus den Grundrissen und der bekannten Lage der Ebene $P_1P_2P_3$ ergeben sich leicht die dritten Koordinaten von $P$ und $Q$ und schließlich auch die dritte Koordinate des Standpunktes $O$.

Die ausführliche Rechnung führt zu folgendem Formelsystem: Gegeben sind die Objektpunkte

$$P_1(x_1y_1z_1),\quad P_2(x_2y_2z_2),\quad P_3(x_3y_3z_3),\quad P_4(x_4y_4z_4),\quad P_5(x_5y_5z_5),\quad P_6(x_6y_6z_6)$$

und die Bildpunkte

$$1(\xi_1\eta_1),\quad 2(\xi_2\eta_2),\quad 3(\xi_3\eta_3),\quad 4(\xi_4\eta_4),\quad 5(\xi_5\eta_5),\quad 6(\xi_6\eta_6).$$

Man berechnet der Reihe nach:

$$x_{12} = x_1 + (x_2 - x_1)\frac{z_1}{z_1 - z_2},\qquad x_{13} = x_1 + (x_3 - x_1)\frac{z_1}{z_1 - z_3},$$

$$x_{23} = x_2 + (x_3 - x_2)\frac{z_2}{z_2 - z_3}.$$

$$y_{12} = y_1 + (y_2 - y_1)\frac{z_1}{z_1 - z_2},\qquad y_{13} = y_1 + (y_3 - y_1)\frac{z_1}{z_1 - z_3},$$

$$y_{23} = y_2 + (y_3 - y_2)\frac{z_2}{z_2 - z_3}.$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{y_{13} - y_{12}}{x_{13} - x_{12}} = \frac{y_{23} - y_{12}}{x_{23} - x_{12}} = \frac{y_{23} - y_{13}}{x_{23} - x_{13}}.$$

$$s_i = (y_i - y_{12})\cos\psi - (x_i - x_{12})\sin\psi \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{z_1}{s_1} = \frac{z_2}{s_2} = \frac{z_3}{s_3}.$$

$$\lambda_{45} = \frac{z_4 - s_4\operatorname{tg}\varepsilon}{z_5 - s_5\operatorname{tg}\varepsilon},\qquad \lambda_{46} = \frac{z_4 - s_4\operatorname{tg}\varepsilon}{z_6 - s_6\operatorname{tg}\varepsilon},\qquad \lambda_{56} = \frac{z_5 - s_5\operatorname{tg}\varepsilon}{z_6 - s_6\operatorname{tg}\varepsilon}.$$

$$d_1 = \frac{x_4 - \lambda_{45}x_5}{1 - \lambda_{45}},\qquad e_1 = \frac{x_4 - \lambda_{46}x_6}{1 - \lambda_{46}},\qquad f_1 = \frac{x_5 - \lambda_{56}x_6}{1 - \lambda_{56}}.$$

$$d_2 = \frac{y_4 - \lambda_{45}y_5}{1 - \lambda_{45}},\qquad e_2 = \frac{y_4 - \lambda_{46}y_6}{1 - \lambda_{46}},\qquad f_2 = \frac{y_5 - \lambda_{56}y_6}{1 - \lambda_{56}}.$$

$$(ab) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ (ac) = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1},\ (ad) = \frac{d_2 - y_1}{d_1 - x_1},\ (bc) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2},\ (bd) = \frac{d_2 - y_2}{d_1 - x_2}.$$

$$(41) = \frac{\eta_4 - \eta_1}{\xi_4 - \xi_1},\ (42) = \frac{\eta_4 - \eta_2}{\xi_4 - \xi_2},\ (43) = \frac{\eta_4 - \eta_3}{\xi_4 - \xi_3},\ (45) = \frac{\eta_4 - \eta_5}{\xi_4 - \xi_5},\ (46) = \frac{\eta_4 - \eta_6}{\xi_4 - \xi_6},$$

$$(51) = \frac{\eta_5 - \eta_1}{\xi_5 - \xi_1},\ (52) = \frac{\eta_5 - \eta_2}{\xi_5 - \xi_2},\ (53) = \frac{\eta_5 - \eta_3}{\xi_5 - \xi_3} \qquad (56) = \frac{\eta_5 - \eta_6}{\xi_5 - \xi_6}.$$

$$K_1 = \frac{(46) - (43)}{(46) - (45)} : \frac{(42) - (43)}{(42) - (45)},\qquad K_1' = \frac{(56) - (53)}{(56) - (45)} : \frac{(52) - (53)}{(52) - (45)}.$$

$$K_2 = \frac{(46) - (43)}{(46) - (45)} : \frac{(41) - (43)}{(41) - (45)},\qquad K_2' = \frac{(56) - (53)}{(56) - (45)} : \frac{(51) - (53)}{(51) - (45)}.$$

$$\varrho_1 = \frac{(ab)-(ac)}{(ab)-(ad)}, \qquad \lambda_1 = \varrho_1 K_1, \qquad \lambda_1' = \varrho_1 K_1', \qquad \varkappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

$$\sigma_2 = \frac{(ab)-(bc)}{(ab)-(bd)}, \qquad \lambda_2 = \sigma_2 K_2, \qquad \lambda_2' = \sigma_2 K_2', \qquad \varkappa' = \frac{\lambda_2'}{\lambda_1'}.$$

$$\nu = \frac{(e_2-y_1)(1-\lambda_1)-(e_1-x_1)[(ac)-\lambda_1(ad)]}{(e_2-y_2)(1-\lambda_2)-(e_1-x_2)[(bc)-\lambda_2(bd)]},$$

$$\nu' = \frac{(f_2-y_1)(1-\lambda_1')-(f_1-x_1)[(ac)-\lambda_1'(ad)]}{(f_2-y_2)(1-\lambda_2')-(f_1-x_2)[(bc)-\lambda_2'(bd)]}. \quad \text{Probe: } \nu\varkappa = \nu'\varkappa'.$$

$$(dp) = (dq) = \frac{(ad)-\nu\varkappa(bd)}{1-\nu\varkappa}, \qquad (cp) = \frac{(ac)-\nu(bc)}{1-\nu}, \qquad (cq) = \frac{(ac)-\nu'(bc)}{1-\nu'}.$$

$$p_1 = \frac{x_3(cp)-d_1(dp)+d_2-y_3}{(cp)-(dp)}, \quad p_2 = d_2 + (p_1-d_1)(dp) = y_3 + (p_1-x_3)(cp).$$

$$q_1 = \frac{x_3(cq)-d_1(dq)+d_2-y_3}{(cq)-(dq)}, \quad q_2 = d_2 + (q_1-d_1)(dq) = y_3 + (q_1-x_3)(cq).$$

$$(p4) = \frac{p_2-y_4}{p_1-x_4}, \qquad (q5) = \frac{q_2-y_5}{q_1-x_5}.$$

$$\varrho = \frac{y_5-y_4-(x_5-x_4)(p4)}{q_2-y_4-(q_1-x_4)(p4)}, \qquad \sigma = \frac{y_4-y_5-(x_4-x_5)(q5)}{p_2-y_5-(p_1-x_5)(q5)}.$$

$$x_o = \frac{x_5-\varrho q_1}{1-\varrho} = \frac{x_4-\sigma p_1}{1-\sigma}, \qquad y_o = \frac{y_5-\varrho q_2}{1-\varrho} = \frac{y_4-\sigma p_2}{1-\sigma}.$$

$$s_p = (p_2 - y_{12})\cos\psi - (p_1 - x_{12})\sin\psi, \qquad p_3 = s_p \operatorname{tg}\varepsilon.$$

$$s_q = (q_2 - y_{12})\cos\psi - (q_1 - x_{12})\sin\psi, \qquad q_3 = s_q \operatorname{tg}\varepsilon.$$

$$z_o = \frac{z_5-\varrho q_3}{1-\varrho} = \frac{z_4-\sigma p_3}{1-\sigma}.$$

$x_o\, y_o\, z_o$ sind die Koordinaten des Standpunktes $O$.

### 3. Determination und Spezialfälle.

Die im vorigen Abschnitt angegebene Lösung der Aufgabe der sechs Punkte bedarf nach zwei Richtungen einer Ergänzung: Es ist einerseits noch zu untersuchen, unter welchen Umständen die Bestimmung des Standpunktes überhaupt unmöglich wird, und andererseits, wie die Lösung sich gestaltet, wenn die sechs gegebenen Punkte $P_i$ eine besondere Lage im Raume haben.

Die Bestimmung des Standpunktes ist im wesentlichen geleistet, sobald die Punkte $P$ und $Q$ (vgl. Fig. 3) in der Ebene $P_1 P_2 P_3$ gefunden sind. Die Lage des Punktes $P$ auf seinem Kegelschnitt ist offenbar dann und nur dann unbestimmt, wenn der Punkt $E$ mit dem Punkt $G$ zusammenfällt[1]) oder, was dasselbe ist, wenn $P$ auf dem Kegelschnitt

1) Analytisch zeigt sich das dadurch, daß $\nu = \frac{0}{0}$ wird.

liegt, der durch die fünf Punkte $ABCDE$ hindurchgeht. Im Raum entspricht das dem Umstand, daß der Standpunkt auf dem Kegel zweiter Ordnung liegt, welcher den Kegelschnitt $ABCDE$ vom Punkt $P_4$ aus projiziert. Ähnliches gilt für den Punkt $Q$; die Lage des Punktes $Q$ auf dem zugehörigen Kegelschnitt wird dann unbestimmt, wenn der Standpunkt auf dem Kegel liegt, der den Kegelschnitt $ABCDF$ vom Punkt $P_5$ aus projiziert. Nun ist aber aus der räumlichen Anschauung ohne weiteres ersichtlich, daß die Punkte $PQD$ unter allen Umständen in einer Geraden liegen müssen, was analytisch durch die Probe $\nu\varkappa = \nu'\varkappa'$ gekennzeichnet ist. Daraus folgt, daß der Standpunkt selbst dann noch gefunden werden kann, wenn nur einer der Punkte $P$ und $Q$ auf seinem zugehörigen Kegelschnitt bestimmt ist. Unmöglich ist die Aufsuchung des Standpunktes nur dann, wenn er gleichzeitig auf den beiden Kegeln zweiter Ordnung $P_4(ABCDE)$ und $P_5(ABCDF)$ liegt. Diese zwei Kegel haben aber die Gerade $P_4P_5$ sowie diejenige Raumkurve dritter Ordnung gemeinsam, welche durch die Punkte $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ bestimmt ist. Der Fall, daß der Standpunkt auf der Geraden $P_4P_5$ liegt, ist praktisch bedeutungslos, da er ein Zusammenfallen der Bildpunkte 4 und 5 zur Folge hätte und überdies leicht vermieden werden könnte dadurch, daß man an Stelle von $P_4$ und $P_5$ zwei andere Punkte auszeichnet. Man gelangt zu dem Resultat:

Die Bestimmung des Standpunktes aus sechs Objektpunkten und ihren Bildern ist dann und nur dann unmöglich, wenn der Standpunkt zufällig auf der Raumkurve dritter Ordnung liegt, welche durch die sechs Objektpunkte hindurchgeht. Die Raumkurve dritter Ordnung ist daher „gefährlicher Ort“ für den Standpunkt.

Unter den Spezialfällen, welche durch eine besondere Lage der sechs gegebenen Punkte bedingt sind, ist zunächst der Fall zu besprechen, daß die sechs Punkte in einer Ebene liegen. Die Ebene der Punkte $P_i$ und die Bildebene sind kollinear; die kollineare Beziehung ist aber bereits festgelegt durch die Zuordnung von vier Punkten der Objektebene und der Bildebene. Die Aufgabe, den Standpunkt zu suchen, kommt dann darauf hinaus, die zwei Ebenen in perspektive Lage zu bringen; dies ist bekanntlich stets auf unendlich viele Arten möglich. Das Zentrum der Perspektivität (Standpunkt) liegt auf einem Kreis (Halbkreis), dessen Ebene sowohl auf der Bildebene als auch auf der Objektebene senkrecht steht.

Wichtiger ist der Fall, daß vier der gegebenen Punkte, nämlich $P_1P_2P_3P_4$, in einer Ebene liegen, die beiden anderen $P_5$ und $P_6$ aber

außerhalb derselben. Mit Hilfe der kollinearen Beziehung zwischen der Ebene $P_1 P_2 P_3 P_4$ und der Bildebene, die durch die vier Punkte gegeben ist, kann man leicht diejenigen Punkte $P$ und $Q$ berechnen, in denen die Sehstrahlen vom Standpunkt nach den Punkten $P_5$ und $P_6$ die Ebene $P_1 P_2 P_3 P_4$ treffen. Der Schnittpunkt der Geraden $PP_5$ und $QP_6$ ist dann der gesuchte Standpunkt.[1]) Der gefährliche Ort für den Standpunkt besteht aus der Geraden $P_5 P_6$ und dem Kegelschnitt, der durch die Punkte $P_1 P_2 P_3 P_4$ und den Schnittpunkt der Geraden $P_5 P_6$ mit der Ebene $P_1 P_2 P_3 P_4$ bestimmt ist.

Unter der Annahme, daß die Punkte $P_1 P_2 P_3 P_4$ in einer Horizontalebene $z = h$ liegen, bekommt man das nachstehende Formelsystem. Gegeben sind

die Objektpunkte: $P_1(x_1 y_1 h)$, $P_2(x_2 y_2 h)$, $P_3(x_3 y_3 h)$, $P_4(x_4 y_4 h)$, $P_5(x_5 y_5 z_5)$, $P_6(x_6 y_6 z_6)$;

und die Bildpunkte: $1(\xi_1 \eta_1)$, $2(\xi_2 \eta_2)$, $3(\xi_3 \eta_3)$, $4(\xi_4 \eta_4)$, $5(\xi_5 \eta_5)$, $6(\xi_6 \eta_6)$.

Man berechnet:

$$(12) = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} \quad (13) = \frac{\eta_3 - \eta_1}{\xi_3 - \xi_1} \quad (14) = \frac{\eta_4 - \eta_1}{\xi_4 - \xi_1} \quad (15) = \frac{\eta_5 - \eta_1}{\xi_5 - \xi_1} \quad (16) = \frac{\eta_6 - \eta_1}{\xi_6 - \xi_1}$$

$$(23) = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\xi_3 - \xi_2} \quad (24) = \frac{\eta_4 - \eta_2}{\xi_4 - \xi_2} \quad (25) = \frac{\eta_5 - \eta_2}{\xi_5 - \xi_2} \quad (26) = \frac{\eta_6 - \eta_2}{\xi_6 - \xi_2}.$$

$$K_1 = \frac{(15) - (13)}{(15) - (14)} : \frac{(12) - (13)}{(12) - (14)} \qquad K_1' = \frac{(16) - (13)}{(16) - (14)} : \frac{(12) - (13)}{(12) - (14)}$$

$$K_2 = \frac{(25) - (23)}{(25) - (24)} : \frac{(12) - (23)}{(12) - (24)} \qquad K_2' = \frac{(26) - (23)}{(26) - (24)} : \frac{(12) - (23)}{(12) - (24)}.$$

$$(ab) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (ac) = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad (ad) = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1} \quad (bc) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \quad (bd) = \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2}$$

$$\varrho_1 = \frac{(ab) - (ac)}{(ab) - (ad)} \quad (ap) = \frac{(ac) - \varrho_1 K_1 (ad)}{1 - \varrho_1 K_1} \quad (aq) = \frac{(ac) - \varrho_1 K_1'(ad)}{1 - \varrho_1 K_1'}$$

$$\sigma_2 = \frac{(ab) - (bc)}{(ab) - (bd)} \quad (bp) = \frac{(bc) - \sigma_2 K_2 (bd)}{1 - \sigma_2 K_2} \quad (bq) = \frac{(bc) - \sigma_2 K_2'(bd)}{1 - \sigma_2 K_2'}$$

$$p_1 = \frac{x_2 (bp) - x_1 (ap) - y_2 + y_1}{(bp) - (ap)} \qquad q_1 = \frac{x_2 (bq) - x_1 (aq) - y_2 + y_1}{(bq) - (aq)}$$

$$p_2 = y_1 + (ap)(p_1 - x_1) = y_2 + (bp)(p_1 - x_2)$$

$$q_2 = y_1 + (aq)(q_1 - x_1) = y_2 + (bq)(q_1 - x_2).$$

---

1) Aus dem Vorausgehenden ersieht man leicht, daß der Standpunkt schon berechnet werden kann, wenn man außer den vier in einer Ebene liegenden Punkten $P_1 P_2 P_3 P_4$ nur noch einen Punkt außerhalb dieser Ebene kennt; der Standpunkt ist der Schnittpunkt eines Kreises mit einer Geraden.

$$(p5) = \frac{p_2 - y_5}{p_1 - x_5} \quad (q6) = \frac{q_2 - y_6}{q_1 - x_6} \quad x_0 = \frac{q_1(q6) - p_1(p5) + p_2 - q_2}{(q6) - (p5)}$$

$$y_0 = p_2 + (x_0 - p_1)(p5) = q_2 + (x_0 - q_1)(q6)$$

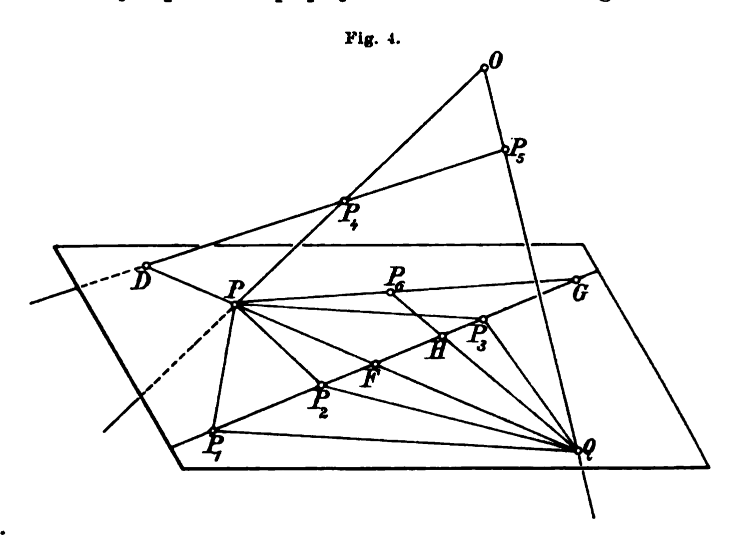
$$z_0 = h + \frac{(z_5 - h)(x_0 - p_1)}{x_5 - p_1} = h + \frac{(z_5 - h)(y_0 - p_2)}{y_5 - p_2} = h + \frac{(z_6 - h)(x_0 - q_1)}{x_6 - q_1}$$

$$= h + \frac{(z_6 - h)(y_0 - q_2)}{y_6 - q_2}.$$

$x_0 y_0 z_0$ sind die Koordinaten des Standpunktes.

Endlich möge die Lösung auch noch angedeutet werden für den Fall, daß 3 Objektpunkte $P_1 P_2 P_3$ in einer Geraden liegen. Man denkt

Fig. 4.




sich wie im allgemeinen Fall die Punkte $P_4$ und $P_5$ mit dem Standpunkt $O$ verbunden und sucht zuerst die Schnittpunkte $P$ und $Q$ der Geraden $P_4 O$ und $P_5 O$ mit der Ebene $P_1 P_2 P_3 P_6$.

Man berechnet

Punkt $F$ aus $(P_1 P_2 P_3 F) = \begin{cases} P(P_1 P_2 P_3 D) = 4(1, 2, 3, 5) \\ Q(P_1 P_2 P_3 D) = 5(1, 2, 3, 4), \end{cases}$

Punkt $G$ aus $(P_1 P_2 P_3 G) = P(P_1 P_2 P_3 P_6) = 4(1, 2, 3, 6)$,

Punkt $H$ aus $(P_1 P_2 P_3 H) = Q(P_1 P_2 P_3 P_6) = 5(1, 2, 3, 6)$.

Dann bestimmen

Gerade $DF$ und $P_6 G$ den Punkt $P$,

Gerade $DF$ und $P_6 H$ den Punkt $Q$,

Gerade $PP_4$ und $QP_5$ den Standpunkt $O$.

Statt die ganze Rechnung in der Ebene $P_1 P_2 P_3 P_6$ auszuführen, löst man die Aufgabe zunächst im Grundriß, worauf die dritten Koordinaten von $P$, $Q$ und $O$ sich ohne Schwierigkeit ergeben.

Die beiden Kegel, welche den gefährlichen Ort bestimmen, zerfallen in die Ebenenpaare $P_1 P_2 P_3 P_4$, $P_4 P_5 P_6$ und $P_1 P_2 P_3 P_5$, $P_4 P_5 P_6$; der gefährliche Ort ist also die gemeinsame Ebene $P_4 P_5 P_6$.

## 4. Ausgleichung des Standpunktes.

Aus dem Vorausgehenden ergibt sich, daß es stets möglich ist, durch 6 allgemein gewählte Raumpunkte ein Strahlenbündel so zu legen, daß die Strahlen des Bündels gegebene Doppelverhältnises miteinander bilden.[1]) Sind mehr als 6 Punkte im Raum gegeben, so ist es im allgemeinen nicht mehr möglich, ein Strahlenbündel mit gegebenen Doppelverhältnissen genau durch die Punkte hindurchzulegen. Es entsteht dann die Aufgabe, den aus 6 Punkten gefundenen Näherungsort des Bündelmittelpunkts mit Beibehaltung der Doppelverhältnisse so zu verändern, daß ein möglichst genaues Einpassen des Strahlenbündels in den Haufen der Fixpunkte erzielt wird. Am zweckmäßigsten wird es in der Regel sein, die Summe der Quadrate der Abstände der Fixpunkte von den zugehörigen Strahlen zu einem Minimum zu machen.

Vollkommen systematisch läßt sich diese Ausgleichung in folgender Weise durchführen: Damit die Doppelverhältnisse im Strahlenbündel dieselben werden wie in der Bildebene, sucht man das Strahlenbündel und die Bildebene kollinear aufeinander zu beziehen. Dazu sind 4 Strahlen und die zugehörigen Bildpunkte notwendig. Man verbindet also den Näherungsstandpunkt mit 4 Objektpunkten und schneidet dieses Bündel mit einer beliebigen Ebene, z. B. mit der Ebene $x = 0$. Die Schnittpunkte haben die Koordinaten $Y_i Z_i$, die entsprechenden Bildpunkte die Koordinaten $\xi_i \eta_i$. Setzt man nun

$$Y_i = \frac{a_{11}\xi_i + a_{12}\eta_i + a_{13}}{a_{31}\xi_i + a_{32}\eta_i + 1} \quad Z_i = \frac{a_{21}\xi_i + a_{22}\eta_i + a_{23}}{a_{31}\xi_i + a_{32}\eta_i + 1} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

so lassen sich aus diesen 8 Gleichungen die 8 Unbekannten $a_{ik}$ berechnen. Sind die Koeffizienten $a_{ik}$ gefunden, so kann man aus den Koordinaten $\xi_i \eta_i$ aller übrigen zur Verfügung stehenden Bildpunkte die zugehörigen $Y_i Z_i$ berechnen. Verbindet man jetzt die in der Ebene $x = 0$ liegenden Punkte $Y_i Z_i$ mit dem Näherungsstandpunkt, so werden nur die zur Berechnung der $a_{ik}$ verwendeten Strahlen durch ihre entsprechenden Fixpunkte hindurchgehen, die andern aber nicht.

1) Voraussetzung ist dabei nur, daß die Doppelverhältnisse aus einer wirklichen oder abgeleiteten Perspektive des räumlichen Punkthaufens entnommen werden.

Man hat nun sowohl die Koordinaten des Standpunktes als auch die Koeffizienten $a_{ik}$ so zu verändern, daß die Summe der Quadrate der Abstände der Fixpunkte von den zugehörigen Strahlen zu einem Minimum wird.

An Stelle dieser etwas weitläufigen Ausgleichung mit 11 Unbekannten wird im nachfolgenden Zahlenbeispiel von einer andern Gebrauch gemacht, die insofern nicht mehr systematisch ist, als 4 Strahlen des Bündels stets durch ihre entsprechenden Fixpunkte hindurchgehend angenommen werden. Dafür hat diese Methode den Vorteil, daß sie nur 3 Unbekannte, nämlich die Verschiebung des Standpunktes, enthält.

Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ die Vektoren vom Näherungsstandpunkt nach 4 passend gewählten Objektpunkten, und 1, 2, 3, 4 die zugehörigen Bildpunkte. Man betrachtet nun die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ als Achsen zweier Ebenenbüschel, die zu den Strahlenbüscheln $1(2, 3, 4, \ldots i \ldots)$ bezw. $2(1, 3, 4, \ldots i \ldots)$ in der Bildebene projektiv sind. Da irgend ein Punkt $i$ der Bildebene durch zwei Doppelverhältnisse $k_i = 1(2, 3, 4, i)$ und $k_i' = 2(1, 3, 4, i)$ eindeutig bestimmt ist, so läßt sich aus $k_i$ und $k_i'$ auch die Richtung $\mathfrak{s}_i$ des dem Bildpunkt $i$ entsprechenden Strahles berechnen; man braucht nur diejenigen zwei Ebenen der Büschel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zum Schnitt zu bringen, welche mit den Ebenen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ bezw. $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ die Doppelverhältnisse $k_i$ bezw. $k_i'$ bilden.

Die Ebenen des Büschels $\mathfrak{A}$ sind dargestellt durch die Bivektoren $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}]$, $[\mathfrak{A}\mathfrak{D}]$; der letzte Bivektor muß eine lineare Verbindung der beiden ersten sein, also

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + \lambda[\mathfrak{A}\mathfrak{C}] = \varrho[\mathfrak{A}\mathfrak{D}].$$

Ebenso im Büschel $\mathfrak{B}$

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{A}] + \lambda'[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \varrho'[\mathfrak{B}\mathfrak{D}].$$

Zur Bestimmung von $\lambda$ und $\lambda'$ braucht man nur mit $\mathfrak{D}$ zu multiplizieren; es wird dann:

$$\lambda = \frac{[\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{B}]}{[\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{A}]}, \quad \lambda' = \frac{[\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{B}]}{[\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]}.$$

Die Ebenen $\mathfrak{A}\mathfrak{s}_i$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{s}_i$ können in entsprechender Weise dargestellt werden durch

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + \mu_i[\mathfrak{A}\mathfrak{C}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{B}\mathfrak{A}] + \mu_i'[\mathfrak{B}\mathfrak{C}].$$

Die Parameter $\mu_i$ und $\mu_i'$ sind bestimmt durch

$$\frac{\lambda}{\mu_i} = k_i, \quad \frac{\lambda'}{\mu_i'} = k_i'; \quad \text{d. h.:} \ \mu_i = \frac{\lambda}{k_i}, \quad \mu_i' = \frac{\lambda'}{k_i'}.$$

Der Vektor $\mathfrak{s}_i$ in der Schnittlinie der Ebenen $\mathfrak{A}\mathfrak{s}_i$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{s}_i$ ist, abgesehen von der Länge und dem Richtungssinn dargestellt durch das Produkt $[\mathfrak{A}\mathfrak{s}_i][\mathfrak{B}\mathfrak{s}_i]$, d. h.:

$$\left[\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \frac{\lambda}{k_i}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\right]\left[\mathfrak{B}\mathfrak{A} + \frac{\lambda'}{k'_i}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\right],$$

oder da bekanntlich $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}][\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]\mathfrak{B}$ ist und es auf den Zahlfaktor $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ nicht ankommt:

$$S_i\mathfrak{s}_i = \pm\left(\frac{\lambda}{k_i}\mathfrak{A} + \frac{\lambda'}{k'_i}\mathfrak{B} + \frac{\lambda\lambda'}{k_i k'_i}\mathfrak{C}\right).$$

Die aus den Doppelverhältnissen der Bildpunkte berechneten Strahlen $\mathfrak{s}_i$ werden im allgemeinen nicht durch die entsprechenden Fixpunkte $P_i$ hindurchgehen. Verschiebt man den Standpunkt so, daß die Grundstrahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ auch nach der Verschiebung noch durch die entsprechenden Objektpunkte $P_1 P_2 P_3 P_4$ gehen, und behält man außerdem die Doppelverhältnisse $k_i$ und $k'_i$ bei, so gehen die Vektoren $\mathfrak{s}_i$ in neue Vektoren $\mathfrak{s}'_i$ über. Die Verschiebung des Standpunktes ist nun so zu wählen, daß die Summe der Quadrate der Abstände der $P_i$ von den Strahlen $\mathfrak{s}'_i$ ein Minimum wird.

Bezeichnet man die Veränderung des Standpunktes mit $\mathfrak{X}$, so gehen die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ über in $\mathfrak{A}-\mathfrak{X}$, $\mathfrak{B}-\mathfrak{X}$, $\mathfrak{C}-\mathfrak{X}$, $\mathfrak{D}-\mathfrak{X}$; die Parameten $\lambda$ und $\lambda'$ werden zu $\lambda(1+\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{T})$ und $\lambda'(1+\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{T}')$, wobei

$$\mathfrak{T} = \frac{|\mathfrak{D}(\mathfrak{A}-\mathfrak{C}) + |\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{[\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{C}]} - \frac{|\mathfrak{D}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) + |\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{[\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{B}]};$$

$$\mathfrak{T}' = \frac{|\mathfrak{D}(\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) + |\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{[\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]} - \frac{|\mathfrak{D}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) + |\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{[\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{B}]}.$$

Endlich wird

$$\mathfrak{s}'_i = \mathfrak{s}_i - \frac{1}{S_i}\left(\frac{\lambda}{k_i} + \frac{\lambda'}{k'_i} + \frac{\lambda\lambda'}{k_i k'_i}\right)\mathfrak{X} \pm \frac{1}{S_i}\left\{\mathfrak{T}\,|\,\mathfrak{X}\frac{\lambda}{k_i}\mathfrak{A} + \mathfrak{T}'\,|\,\mathfrak{X}\frac{\lambda'}{k'_i}\mathfrak{B} + (\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')\,|\,\mathfrak{X}\frac{\lambda\lambda'}{k_i k'_i}\mathfrak{C}\right\}.$$

Sind $\mathfrak{R}_i$ die Vektoren vom Näherungsstandpunkt nach den überzähligen Fixpunkten, und $\mathfrak{F}_i$ die senkrechten Abstände der Fixpunkte von den $\mathfrak{s}'_i$, so wird

$$\mathfrak{R}_i - \mathfrak{X} + \mathfrak{F}_i = \sqrt{(\mathfrak{R}_i - \mathfrak{X})^2}\,\mathfrak{s}'_i,$$

oder mit Vernachlässigung von Gliedern II. Ordnung:

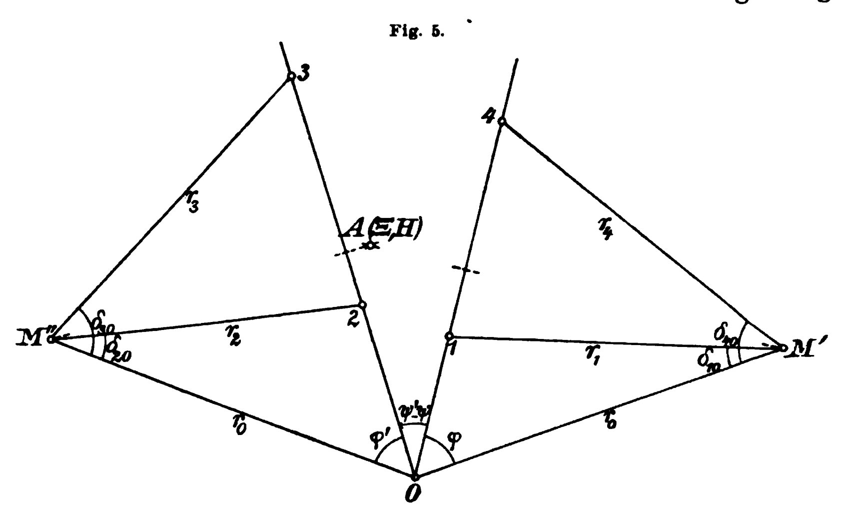
$$\mathfrak{F}_i = R_i\mathfrak{s}'_i - \mathfrak{R}_i + \mathfrak{X} - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{s}_i)\,\mathfrak{s}_i, \quad \text{wobei } R_i = |\,\mathfrak{R}_i\,|.$$

Diese Fehlergleichung in Vektorform zerfällt in drei Fehlergleichungen zwischen den Koordinaten. Stehen im ganzen $n$ Objektpunkte und ihre Bilder zur Verfügung, so erhält man also $3(n-4)$ Fehlergleichungen. Aus diesen sind in üblicher Weise die Normalgleichungen zu bilden und aufzulösen.

### 5. Bestimmung der inneren Orientierung.

Nachdem man die Lage des Standpunktes $O'$ gegenüber dem Objekt gefunden hat, ist die Bestimmung der inneren Orientierung lediglich ein Rückwärtseinschneiden im Raum. Es handelt sich nämlich um die Aufgabe: In der Bildebene ist eine Reihe von Punkten gegeben durch die Koordinaten in einem rechtwinkligen System $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'$; gesucht ist im Bildraum $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ ein Punkt $M$ mit den Koordinaten $\Xi H D$ von der Eigenschaft, daß das Strahlenbündel von $M$ nach den Bildpunkten kongruent wird zum Strahlenbündel vom Standpunkt $O'$ nach den Fixpunkten $P_i$ im Objektraum $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$. $\Xi$ und $H$ sind die Koordinaten des Hauptpunktes $A$, $D$ ist die Bildweite. Zur Berechnung von $\Xi H D$ ist die Kenntnis von 3 Punkten im Bildraum und den zugehörigen

Fig. 5.



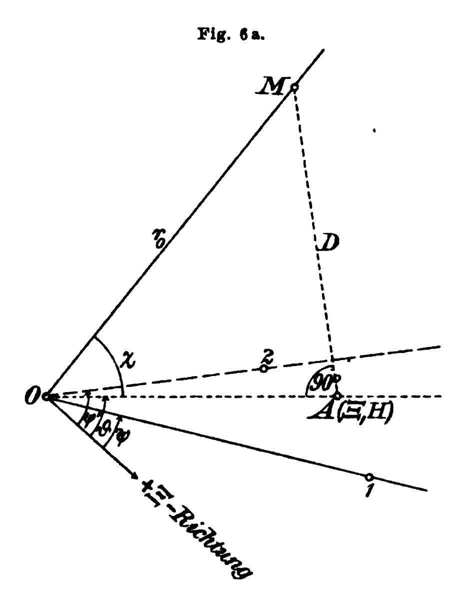

Strahlen im Objektraum notwendig; die analytische Lösung führt auf eine Gleichung 4. Grades und ist daher ziemlich langwierig.[1]) Da nun zur Bestimmung des Standpunktes schon 6 Punkte notwendig waren und die Berechnung von $\Xi H D$ vorläufig nur die Bedeutung einer Näherungslösung hat, so erscheint es wohl gerechtfertigt, noch einen vierten Punkt in die Rechnung mit einzubeziehen. Die Aufgabe wird dadurch zwar überbestimmt, die Lösung dafür aber eindeutig und erheblich einfacher; sie läßt sich dann zurückführen auf ein zweimaliges Rückwärtseinschneiden in der Ebene.[2])

1) S. Finsterwalder und W. Scheufele, Das Rückwärtseinschneiden im Raum. Sitzungsberichte d. K. Bayer. Akademie der Wissenschaften. München 1903. S. 591—614.

2) Zur graphischen Lösung bereits angewendet in S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen usw. S. 31.

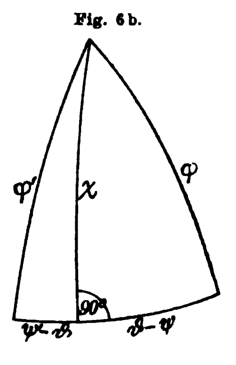
Es seien $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4$ die Richtungen von vier Strahlen im Objektraum $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$; am bequemsten nimmt man gleich die Einheitsvektoren der bei der Ausgleichung des Standpunktes benützten Grundstrahlen $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \mathfrak{X}$, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - \mathfrak{X}$, $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C} - \mathfrak{X}$, $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} - \mathfrak{X}$. Man sucht dann zunächst die Richtung $\mathfrak{a}_0$ der Geraden, in welcher sich die Ebenen $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_4$ und $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$ schneiden. Die den Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_i$ entsprechenden Punkte in der Bildebene $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'$ mögen wieder kurz mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet werden, ihre Koordinaten mit $\xi_i \eta_i$. Dem Strahl $\mathfrak{a}_0$ entspricht der Schnittpunkt $0(\xi_0 \eta_0)$ der Geraden (14) und (23).

Fig. 6a.




Jetzt denkt man sich den optischen Mittelpunkt $M$ gefunden und legt die Ebenen $M(014)$ und $M(023)$ in die Bildebene um. Die Umlegungen $M'$ und $M''$ können durch Rückwärtseinschneiden nach den bekannten Punkten 014 bezw. 023 leicht bestimmt werden, da ja die Winkel $\delta_{ik}$ bei $M'$ und $M''$ aus dem Bündel der $\mathfrak{a}_i$ entnommen werden können. Man braucht jedoch nicht die Koordinaten der Punkte $M'$ und $M''$ selbst, sondern nur die Winkel $\varphi$ und $\varphi'$, welche die Gerade $M0$ mit den Geraden 01 bezw. 02 einschließt, sowie die Entfernungen $r_0 r_1 r_2$ des Punktes $M$ von den Bildpunkten 012. Man betrachtet nunmehr das Dreikant, das gebildet wird von den Strahlen $0M$, 01 und 02. Von diesem Dreikant kennt man die drei Seiten $\varphi$, $\varphi'$ und $\psi' - \psi$, wenn man mit $\psi$ und $\psi'$ die Richtungen der Strahlen 01 und 02 bezeichnet. Infolgedessen lassen sich nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie sowohl die Richtung $\vartheta$ des Strahles $0A$ als auch die Neigung $\chi$ der Geraden $0M$ gegen die Bildebene berechnen. Daraus findet man dann leicht $D$, $\Xi$, $H$.

Fig. 6b.




Man erhält folgendes Formelsystem:

Gegeben sind die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4$, sowie die Bildpunkte

$$1(\xi_1 \eta_1), \quad 2(\xi_2 \eta_2), \quad 3(\xi_3 \eta_3), \quad 4(\xi_4 \eta_4).$$

Man berechnet der Reihe nach:

$$\Lambda = -\frac{[\mathfrak{D}'\mathfrak{A}'\mathfrak{B}']}{[\mathfrak{D}'\mathfrak{A}'\mathfrak{C}']} = \lambda(1 + \mathfrak{X} | \mathfrak{T}); \quad \mathfrak{a}_0 = \pm \frac{\mathfrak{B}' + \Lambda\mathfrak{C}'}{|\mathfrak{B}' + \Lambda\mathfrak{C}'|}.$$

$$(14) = \frac{\eta_1 - \eta_4}{\xi_1 - \xi_4} \qquad \tau = \frac{\eta_1 - \eta_2 - (14)(\xi_1 - \xi_2)}{\eta_1 - \eta_3 - (14)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{\eta_4 - \eta_2 - (14)(\xi_4 - \xi_2)}{\eta_4 - \eta_3 - (14)(\xi_4 - \xi_3)}$$

$$\xi_0 = \frac{\xi_2 - \tau\xi_3}{1 - \tau} \qquad \eta_0 = \frac{\eta_2 - \tau\eta_3}{1 - \tau}.$$

$$\cos\delta_{10} = \mathfrak{a}_1 | \mathfrak{a}_0 \quad \cos\delta_{20} = \mathfrak{a}_2 | \mathfrak{a}_0 \quad \cos\delta_{14} = \mathfrak{a}_1 | \mathfrak{a}_4; \text{ Probe: } \delta_{14} = \pm(\delta_{10} \pm \delta_{40})$$

$$\cos\delta_{40} = \mathfrak{a}_4 | \mathfrak{a}_0 \quad \cos\delta_{30} = \mathfrak{a}_3 | \mathfrak{a}_0 \quad \cos\delta_{23} = \mathfrak{a}_2 | \mathfrak{a}_3; \qquad \delta_{23} = \pm(\delta_{20} \pm \delta_{30}).$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\xi_0 - \xi_4}{\xi_1 - \xi_4} \Big| \frac{\sin\delta_{14}}{\sin\delta_{40}} = \frac{\eta_0 - \eta_4}{\eta_1 - \eta_4} \Big| \frac{\sin\delta_{14}}{\sin\delta_{40}};$$

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{\xi_0 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \Big| \frac{\sin\delta_{23}}{\sin\delta_{30}} = \frac{\eta_0 - \eta_3}{\eta_2 - \eta_3} \Big| \frac{\sin\delta_{23}}{\sin\delta_{30}}.$$

$$\operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\delta_{10}}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\delta_{10}}{2}\operatorname{cotg}(\omega - 45^0); \quad \operatorname{tg}\left(\varphi' + \frac{\delta_{20}}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\delta_{20}}{2}\operatorname{cotg}(\omega' - 45^0):$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\eta_1 - \eta_0}{\xi_1 - \xi_0} \quad \operatorname{tg}\psi' = \frac{\eta_2 - \eta_0}{\xi_2 - \xi_0}\left(0 \leqq \begin{Bmatrix}\psi \\ \psi'\end{Bmatrix} < 360^0\right).$$

$$r_0 = \frac{(\xi_1 - \xi_0)\sin(\varphi + \delta_{10})}{\cos\psi\sin\delta_{10}} = \frac{(\xi_2 - \xi_0)\sin(\varphi' + \delta_{20})}{\cos\psi'\sin\delta_{20}}; \quad r_1 = r_0\operatorname{cotg}\omega;$$

$$r_0 = \frac{(\eta_1 - \eta_0)\sin(\varphi + \delta_{10})}{\sin\psi\sin\delta_{10}} = \frac{(\eta_2 - \eta_0)\sin(\varphi' + \delta_{20})}{\sin\psi'\sin\delta_{20}}; \quad r_2 = r_0\operatorname{cotg}\omega'.$$

$$\operatorname{cotg}\left(\vartheta - \frac{\psi + \psi'}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\psi' - \psi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi + \varphi'}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi - \varphi'}{2};$$

$$\cos\chi = \frac{\cos\varphi}{\cos(\vartheta - \psi)} = \frac{\cos\varphi'}{\cos(\psi' - \vartheta)};$$

$$D = r_0\sin\chi; \quad \Xi = \xi_0 + r_0\cos\chi\cos\vartheta; \quad H = \eta_0 + r_0\cos\chi\sin\vartheta.$$

$\Xi$, $H$ sind die Koordinaten des Hauptpunktes $A$; $D$ ist die Bildweite.

Um die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{j}'$ durch die $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ auszudrücken, findet man sofort aus der räumlichen Anschauung:

$$(\xi_1 - \xi_0)\,\mathfrak{i}' + (\eta_1 - \eta_0)\,\mathfrak{j}' = r_1\mathfrak{a}_1 - r_0\mathfrak{a}_0$$

$$(\xi_2 - \xi_0)\,\mathfrak{i}' + (\eta_2 - \eta_0)\,\mathfrak{j}' = r_2\mathfrak{a}_2 - r_0\mathfrak{a}_0.$$

Folglich:

$$\mathfrak{i}'(\operatorname{cotg}\psi - \operatorname{cotg}\psi') = \frac{r_1\mathfrak{a}_1 - r_0\mathfrak{a}_0}{\eta_1 - \eta_0} - \frac{r_2\mathfrak{a}_2 - r_0\mathfrak{a}_0}{\eta_2 - \eta_0}$$

$$\mathfrak{j}'(\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\psi') = \frac{r_1\mathfrak{a}_1 - r_0\mathfrak{a}_0}{\xi_1 - \xi_0} - \frac{r_2\mathfrak{a}_2 - r_0\mathfrak{a}_0}{\xi_2 - \xi_0}.$$

Die hieraus berechneten Vektoren $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{j}'$ werden im allgemeinen weder genau rechtwinklig zueinander stehen, noch auch genau die Länge 1 haben; sie sind daher in geeigneter Weise zu verbessern. Schließlich erhält man auch $\mathfrak{k}'$ aus $\mathfrak{k}' = |\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'$; die Richtung der optischen Achse ist $-\mathfrak{k}'$.

## 6. Ausgleichung der inneren Orientierung.

Verbindet man den Standpunkt $O'$ mit allen Objektpunkten $P_i$, so erhält man ein Strahlenbündel, dessen Einheitsvektoren mit $\mathfrak{g}_i$ bezeichnet sein sollen. In gleicher Weise erhält man im Bildraum ein Strahlenbündel $\mathfrak{h}_i$, wenn man vom optischen Mittelpunkt $M$ aus die Strahlen nach den Bildpunkten $i$ zieht. Diese beiden Strahlenbündel $\mathfrak{g}_i$ und $\mathfrak{h}_i$ werden aber nicht vollständig kongruent sein. Man sucht nun eine bessere Übereinstimmung beider Bündel dadurch zu erzielen, daß man das Bündel $\mathfrak{h}_i$ sowohl durch eine kleine Verschiebung des Mittelpunktes $M$ als auch durch eine kleine Drehung des ganzen Bündels verändert. Am besten nimmt man diese Veränderung so vor, daß die Summe der Quadrate der Abstände, welche die Endpunkte entsprechender Vektoren $\mathfrak{h}_i$ und $\mathfrak{g}_i$ voneinander besitzen, möglichst klein wird. Dazu muß man sich allerdings erst die Mittelpunkte der beiden Bündel zur Deckung gebracht und die Vektoren $\mathfrak{g}_i$ in das Koordinatensystem des Bildraumes $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ umgerechnet denken.

Bezeichnet man den Vektor vom Anfangspunkt des Systems $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ nach dem perspektivischen Zentrum $M$ mit $\mathfrak{M}$ und die Vektoren nach den Bildpunkten mit $\mathfrak{B}_i$, so ist

$$\mathfrak{h}_i = \frac{\mathfrak{B}_i - \mathfrak{M}}{|\mathfrak{B}_i - \mathfrak{M}|} = \frac{\mathfrak{B}_i - \mathfrak{M}}{r_i} = \frac{\xi_i - \Xi}{r_i}\,\mathfrak{i}' + \frac{\eta_i - H}{r_i}\,\mathfrak{j}' + \frac{-D}{r_i}\,\mathfrak{k}';$$

$r_i$ ist die Entfernung des Punktes $M$ vom Bildpunkte $i$. Erteilt man jetzt dem Punkt $M$ eine kleine Verschiebung $\mathfrak{Y}$, so gehen die Vektoren $\mathfrak{h}_i$ über in

$$\frac{\mathfrak{B}_i - \mathfrak{M} - \mathfrak{Y}}{|\mathfrak{B}_i - \mathfrak{M} - \mathfrak{Y}|} = \mathfrak{h}_i - \frac{\mathfrak{Y}}{r_i} + \left(\frac{\mathfrak{Y}}{r_i}\,\middle|\,\mathfrak{h}_i\right)\mathfrak{h}_i .$$

Wird dieses Bündel in seiner Gesamtheit der Drehung $\mathfrak{U}$ unterworfen, so resultiert das neue Bündel

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_i' &= \left\{\mathfrak{h}_i - \frac{\mathfrak{Y}}{r_i} + \left(\frac{\mathfrak{Y}}{r_i}\,\middle|\,\mathfrak{h}_i\right)\mathfrak{h}_i\right\} + |\,\mathfrak{U}\left\{\mathfrak{h}_i - \frac{\mathfrak{Y}}{r_i} + \left(\frac{\mathfrak{Y}}{r_i}\,\middle|\,\mathfrak{h}_i\right)\mathfrak{h}_i\right\}\\ &= \mathfrak{h}_i - \frac{\mathfrak{Y}}{r_i} + \left(\frac{\mathfrak{Y}}{r_i}\,\middle|\,\mathfrak{h}_i\right)\mathfrak{h}_i + |\,\mathfrak{U}\mathfrak{h}_i .\end{aligned}$$

Der Unterschied der Vektoren $\mathfrak{g}_i$ und $\mathfrak{h}_i'$ ist daher

$$\mathfrak{F}_i = \mathfrak{g}_i - \mathfrak{h}_i + \frac{\mathfrak{Y}}{r_i} - \left(\frac{\mathfrak{Y}}{r_i}\,\middle|\,\mathfrak{h}_i\right)\mathfrak{h}_i - |\,\mathfrak{U}\mathfrak{h}_i .$$

Setzt man

$$\mathfrak{Y} = Y_1\mathfrak{i}' + Y_2\mathfrak{j}' + Y_3\mathfrak{k}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{U} = U_1\mathfrak{i}' + U_2\mathfrak{j}' + U_3\mathfrak{k}',$$

so erhält man aus der obenstehenden Fehlergleichung in Vektorform drei Fehlergleichungen zwischen den Koordinaten, nämlich

$$\mathfrak{F}|\mathfrak{i}' = \frac{Y_1}{r}\left[1-\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\right)^2\right] - \frac{Y_2}{r}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r} - \frac{Y_3}{r}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{-D}{r} - U_2\frac{-D}{r} + U_3\frac{\eta-H}{r} + \mathfrak{g}|\mathfrak{i}' - \frac{\xi-\Xi}{r}$$

$$\mathfrak{F}|\mathfrak{j}' = -\frac{Y_1}{r}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r} + \frac{Y_2}{r}\left[1-\left(\frac{\eta-H}{r}\right)^2\right] - \frac{Y_3}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r}\cdot\frac{-D}{r} + U_1\cdot\frac{-D}{r} - U_3\frac{\xi-\Xi}{r} + \mathfrak{g}|\mathfrak{j}' - \frac{\eta-H}{r}$$

$$\mathfrak{F}|\mathfrak{k}' = -\frac{Y_1}{r}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{-D}{r} - \frac{Y_2}{r}\frac{\eta-H}{r}\cdot\frac{-D}{r} + \frac{Y_3}{r}\left[1-\left(\frac{-D}{r}\right)^2\right] - U_1\frac{\eta-H}{r} + U_2\frac{\xi-\Xi}{r} + \mathfrak{g}|\mathfrak{k}' - \frac{-D}{r}$$

Auch das Koeffizientenschema der Normalgleichungen läßt sich noch leicht allgemein anschreiben. Es wird:

$$[aa] = \sum\frac{1}{r^2}\left[1-\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\right)^2\right] \qquad [bb] = \sum\frac{1}{r^2}\left[1-\left(\frac{\eta-H}{r}\right)^2\right] \qquad [cc] = \sum\frac{1}{r^2}\left[1-\left(\frac{-D}{r}\right)^2\right]$$

$$[dd] = \sum\left[1-\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\right)^2\right] \qquad [ee] = \sum\left[1-\left(\frac{\eta-H}{r}\right)^2\right] \qquad [ff] = \sum\left[1-\left(\frac{-D}{r}\right)^2\right]$$

$$[gg] = \sum\left[\left(\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' - \frac{\xi-\Xi}{r}\right)^2 + \left(\mathfrak{g}|\mathfrak{j}' - \frac{\eta-H}{r}\right)^2 + \left(\mathfrak{g}|\mathfrak{k}' - \frac{-D}{r}\right)^2\right]$$

$$= 2\sum\left[1-\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' + \frac{\eta-H}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{j}' + \frac{-D}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{k}'\right)\right].$$

$$[ab] = -\sum\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r} \qquad [ac] = -\sum\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{-D}{r} \qquad [bc] = -\sum\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\eta-H}{r}\cdot\frac{-D}{r}$$

$$[de] = -\sum\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r} \qquad [df] = -\sum\frac{\xi-\Xi}{r}\cdot\frac{-D}{r} \qquad [ef] = -\sum\frac{\eta-H}{r}\cdot\frac{-D}{r}.$$

$$[ad] = 0 \qquad [bd] = +\sum\frac{1}{r}\cdot\frac{-D}{r} \qquad [cd] = -\sum\frac{1}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r}$$

$$[ae] = -\sum\frac{1}{r}\cdot\frac{-D}{r} \qquad [be] = 0 \qquad [ce] = +\sum\frac{1}{r}\frac{\xi-\Xi}{r}$$

$$[af] = +\sum\frac{1}{r}\cdot\frac{\eta-H}{r} \qquad [bf] = -\sum\frac{1}{r}\cdot\frac{\xi-\Xi}{r} \qquad [cf] = 0.$$

$$[ag] = \sum\frac{1}{r}\left[\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' - \frac{\xi-\Xi}{r}\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' + \frac{\eta-H}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{j}' + \frac{-D}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{k}'\right)\right]$$

$$[bg] = \sum\frac{1}{r}\left[\mathfrak{g}|\mathfrak{j}' - \frac{\eta-H}{r}\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' + \frac{\eta-H}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{j}' + \frac{-D}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{k}'\right)\right]$$

$$[cg] = \sum\frac{1}{r}\left[\mathfrak{g}|\mathfrak{k}' - \frac{-D}{r}\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' + \frac{\eta-H}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{j}' + \frac{-D}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{k}'\right)\right]$$

$$[dg] = \sum\left(\frac{-D}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{j}' - \frac{\eta-H}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{k}'\right)$$

$$[eg] = \sum\left(\frac{\xi-\Xi}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{k}' - \frac{-D}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{i}'\right)$$

$$[fg] = \sum\left(\frac{\eta-H}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{i}' - \frac{\xi-\Xi}{r}\mathfrak{g}|\mathfrak{j}'\right).$$

## 7. Numerisches Beispiel.

Die Koordinaten aller zur Rechnung benützten Punkte sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt. Die Koordinaten der Bildpunkte sind bezogen auf ein willkürlich angenommenes rechtwinkliges System $\xi$, $\eta$; die Koordinaten $x$, $y$, $z$ der zugehörigen Fixpunkte wurden der Originalkarte des Herrn Dr. S. Finsterwalder entnommen; hierbei sind die $z$-Koordinaten bereits in bezug auf Erdkrümmung und mittlere Refraktion verbessert. Die Koordinaten der Objektpunkte sind in m, die Koordinaten der Bildpunkte in mm gemessen.

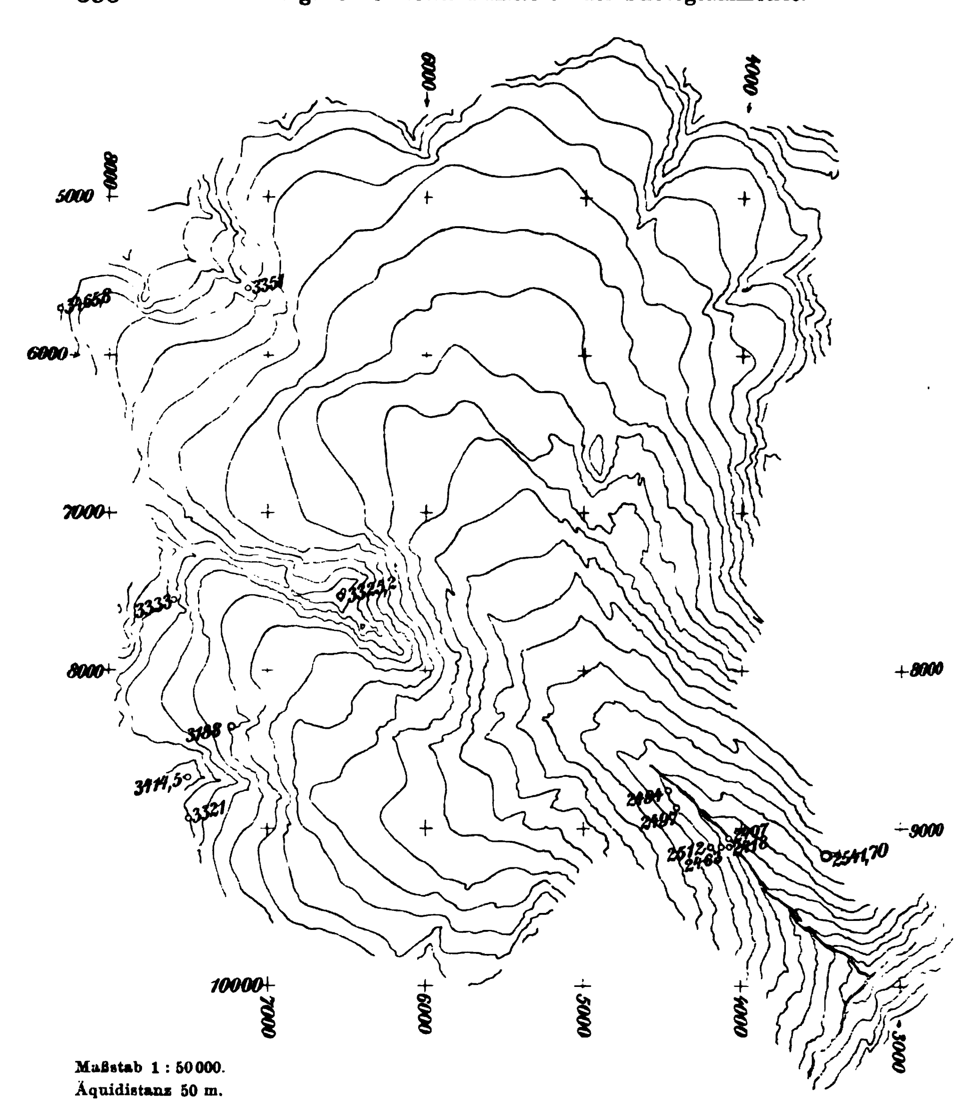
| Nummer | Objektpunkte | | | Bildpunkte | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $y$ | $z$ | $\xi$ | $\eta$ | |
| 1 Δ | 6533,2 | 7527,2 | 3324,5 | 23,05 | 65,75 | Hintergraslspitze; |
| 2 | 4083,0 | 9062,0 | 2407,0 | − 80,90 | − 84,00 | Felsen am Bachufer; |
| 3 | 7505,0 | 8937,0 | 3320,0 | − 117,55 | 54,75 | Felsgipfel südl. d. Kesselwandsp. |
| 4 Δ | 8308,9 | 5704,1 | 3468,5 | 64,70 | 46,40 | Schwarzwandspitze; |
| 5 | 7123,5 | 5573,0 | 3349,3 | 117,95 | 51,30 | Felsgipfel südöstl. d. Hochvernagtsp. |
| 6 | 4125,5 | 9118,0 | 2468,0 | − 112,10 | − 52,80 | Fels auf d. rechten Seite des Vernagtgrabens; |
| 7 | 4193,0 | 9122,5 | 2512,0 | − 117,25 | − 24,30 | " ; |
| 8 | 4460,0 | 8765,0 | 2493,9 | − 6,40 | − 21,50 | " ; |
| 9 | 7590,0 | 7557,5 | 3331,7 | − 14,85 | 49,90 | Felskuppe östl. vom Fluchtkogl; |
| 10 Δ | 7508,2 | 8675,6 | 3413,5 | − 95,20 | 61,15 | Kesselwandspitze; |
| 11 | 4406,0 | 8869,0 | 2496,9 | − 32,25 | − 22,60 | Fels auf d. rechten Seite des Vernagtgrabens; |
| 12 | 4074,0 | 9120,0 | 2418,0 | − 111,50 | − 83,40 | " ; |
| 13 | 7216,0 | 8354,0 | 3187,1 | − 64,05 | + 46,00 | Felsgipfel nordöstl. d. Kesselwandspitze. |

Der Näherungsstandpunkt wurde bestimmt mit Hilfe der Punkte 4, 5, 11, 10, 7, 3. Es ergab sich

$$x_0 = 3473{,}2 \qquad y_0 = 9169{,}7 \qquad z_0 = 2541{,}5.$$

Für die Ausgleichung des Standpunktes wurden die Punkte 1, 2, 3, 4 als Grundpunkte angenommen; die Grundstrahlen des Bündels im Objektraum sind daher (Einheit = 1 km):

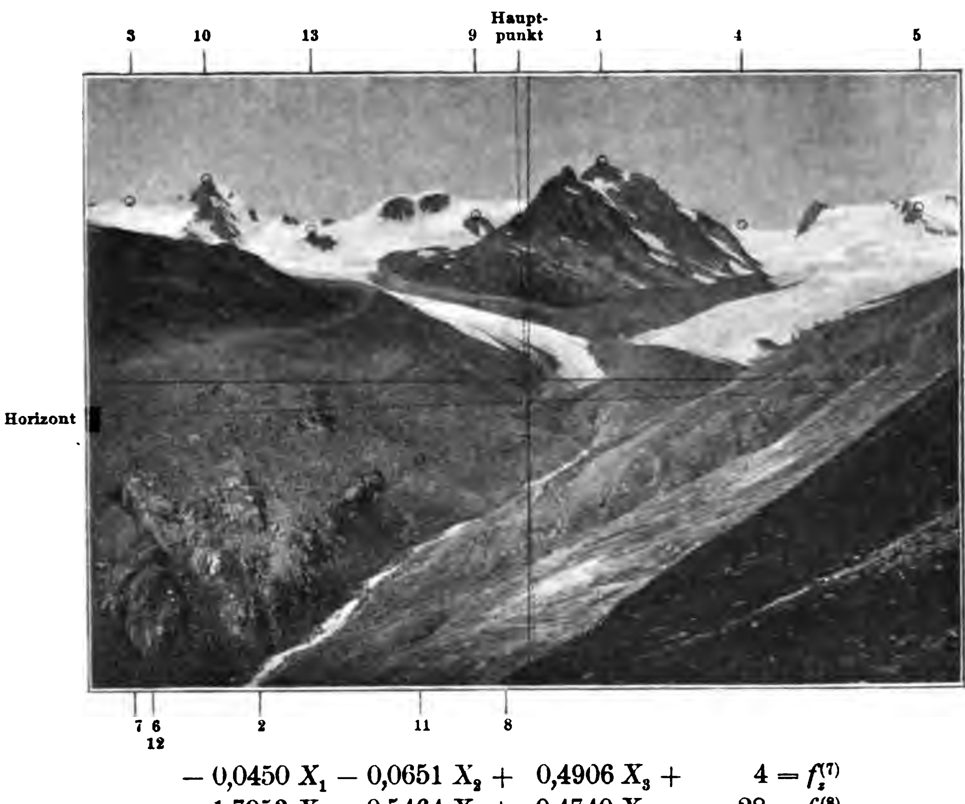
$$\mathfrak{A} = 3{,}0600\,\mathfrak{i} - 1{,}6425\,\mathfrak{j} + 0{,}7830\,\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{B} = 0{,}6098\,\mathfrak{i} - 0{,}1077\,\mathfrak{j} - 0{,}1345\,\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{C} = 4{,}0318\,\mathfrak{i} - 0{,}2327\,\mathfrak{j} + 0{,}7785\,\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{D} = 4{,}8357\,\mathfrak{i} - 3{,}4656\,\mathfrak{j} + 0{,}9220\,\mathfrak{k}.$$




Maßstab 1 : 50000.
Äquidistanz 50 m.

Die übrigen Punkte liefern die Fehlergleichungen

$$
\begin{aligned}
&-4{,}6169\,X_1 + 0{,}9163\,X_2 + 14{,}9585\,X_3 - 0{,}0051 = f_x^{(5)}\\
&+5{,}8177\,X_1 + 2{,}1785\,X_2 - 11{,}9897\,X_3 - \quad 57 = f_y^{(5)}\\
&-1{,}0865\,X_1 + 0{,}0569\,X_2 + \ \ 3{,}3545\,X_3 - \quad 21 = f_z^{(5)}\\
&-1{,}4903\,X_1 - 1{,}0316\,X_2 - \ \ 0{,}4925\,X_3 - \quad 4 = f_x^{(6)}\\
&+0{,}0951\,X_1 + 0{,}2488\,X_2 + \ \ 0{,}2555\,X_3 - \quad 39 = f_y^{(6)}\\
&+0{,}1114\,X_1 + 0{,}0282\,X_2 + \ \ 0{,}3439\,X_3 - \quad 13 = f_z^{(6)}\\
&-1{,}6816\,X_1 - 1{,}3290\,X_2 - \ \ 0{,}1333\,X_3 - \quad 1 = f_x^{(7)}\\
&+0{,}0889\,X_1 + 0{,}3642\,X_2 + \ \ 0{,}2194\,X_3 - \quad 17 = f_y^{(7)}
\end{aligned}
$$




$$
\begin{array}{rrrrl}
- 0,0450\,X_1 & - 0,0651\,X_2 & + 0,4906\,X_3 & + 4 & = f_z^{(7)} \\
- 1,7953\,X_1 & - 0,5464\,X_2 & + 0,4740\,X_3 & - 28 & = f_x^{(8)} \\
+ 0,8708\,X_1 & + 0,1281\,X_2 & - 0,8644\,X_3 & - 66 & = f_y^{(8)} \\
+ 0,0050\,X_1 & + 0,1029\,X_2 & + 0,4347\,X_3 & - 23 & = f_z^{(8)} \\
- 8,2148\,X_1 & - 5,9962\,X_2 & + 10,3327\,X_3 & + 49 & = f_x^{(9)} \\
+ 2,7727\,X_1 & + 1,1018\,X_2 & - 4,9866\,X_3 & + 115 & = f_y^{(9)} \\
- 1,5871\,X_1 & - 1,1581\,X_2 & + 2,0383\,X_3 & - 14 & = f_z^{(9)} \\
- 9,2642\,X_1 & - 9,3643\,X_2 & + 8,5894\,X_3 & + 6 & = f_x^{(10)} \\
+ 1,0210\,X_1 & + 1,0036\,X_2 & - 1,4569\,X_3 & + 33 & = f_y^{(10)} \\
- 1,9277\,X_1 & - 1,9209\,X_2 & + 1,8329\,X_3 & - 7 & = f_z^{(10)} \\
- 1,8323\,X_1 & - 0,8034\,X_2 & + 0,2765\,X_3 & - 13 & = f_x^{(11)} \\
+ 0,6627\,X_1 & + 0,1800\,X_2 & - 0,5306\,X_3 & - 40 & = f_y^{(11)} \\
- 0,0091\,X_1 & + 0,0514\,X_2 & + 0,4277\,X_3 & - 15 & = f_z^{(11)} \\
- 1,3357\,X_1 & - 0,8197\,X_2 & - 0,8201\,X_3 & - 5 & = f_x^{(12)} \\
+ 0,0762\,X_1 & + 0,1379\,X_2 & + 0,3154\,X_3 & - 44 & = f_y^{(12)} \\
+ 0,2544\,X_1 & + 0,1042\,X_2 & + 0,1904\,X_3 & - 13 & = f_z^{(12)} \\
- 8,1844\,X_1 & - 7,1871\,X_2 & + 7,3256\,X_3 & - 8 & = f_x^{(13)} \\
+ 1,9131\,X_1 & + 0,6051\,X_2 & - 2,2636\,X_3 & - 53 & = f_y^{(13)} \\
- 1,4847\,X_1 & - 1,2956\,X_2 & + 1,3853\,X_3 & - 19 & = f_z^{(13)}
\end{array}
$$

Das Koeffizientenschema der Normalgleichungen wird:

| | | | |
|---|---|---|---|
| + 312,1771 | + 223,5660 | − 395,6168 | − 0,0160 |
| | + 194,9220 | − 222,3436 | − 0,0290 |
| | | + 657,7580 | − 0,0202 |
| | | | + 0,000 383 26 |

Hieraus ergeben sich für die Komponenten des Verschiebungsvektors $\mathfrak{X} = X_1 \mathfrak{i} + X_2 \mathfrak{j} + X_3 \mathfrak{k}$ die Werte:

$X_1 = + 0{,}00019 \pm 0{,}00153;$
$X_2 = + 0{,}00016 \pm 0{,}00118;$
$X_3 = + 0{,}00020 \pm 0{,}00056;$

Reduzierte Fehlerquadratsumme = 0,00037170.

Die Koordinaten des verbesserten Standpunktes sind also:

$$x'_0 = 3473{,}39\,\text{m} \pm 1{,}53\,\text{m}; \quad x'_0 = 9169{,}86\,\text{m} \pm 1{,}18\,\text{m};$$
$$z'_0 = 2541{,}70\,\text{m} \pm 0{,}56\,\text{m}.$$

Die übrig bleibenden Fehler vor und nach der Ausgleichung sind aus folgender Tabelle ersichtlich (Einheit 1 m).

| Nummer | vor der Ausgleichung | | | nach der Ausgleichung | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $f_x$ | $f_y$ | $f_z$ | $f_x$ | $f_y$ | $f_z$ |
| 5 | − 5,1 | − 5,7 | − 2,1 | − 2,9 | − 6,6 | − 1,6 |
| 6 | − 0,4 | − 3,9 | − 1,3 | − 0,9 | − 3,8 | − 1,2 |
| 7 | − 0,1 | − 1,7 | + 0,4 | − 0,6 | − 1,6 | + 0,5 |
| 8 | − 2,8 | − 6,6 | − 2,3 | − 3,1 | − 6,6 | − 2,2 |
| 9 | + 4,9 | + 11,5 | − 1,4 | + 4,5 | + 11,2 | − 1,5 |
| 10 △ | + 0,6 | + 3,3 | − 0,7 | − 0,9 | + 3,4 | − 1,0 |
| 11 | − 1,3 | − 4,0 | − 1,5 | − 1,7 | − 4,0 | − 1,4 |
| 12 | − 0,5 | − 4,4 | − 1,3 | − 1,0 | − 4,3 | − 1,2 |
| 13 | − 0,8 | − 5,3 | − 1,9 | − 2,0 | − 5,3 | − 2,1 |

Zur angenäherten Bestimmung der inneren Orientierung wurden wieder die Punkte 1, 2, 3, 4 verwendet. Die Logarithmen der Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}_i$ sind

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{a}_1$ | 9,93424 | 9,66410 *n* | 9,34220 |
| $\mathfrak{a}_2$ | 9,98327 | 9,23108 *n* | 9,32759 *n* |
| $\mathfrak{a}_3$ | 9,99136 | 8,75297 *n* | 9,27703 |
| $\mathfrak{a}_4$ | 9,90483 | 9,76018 *n* | 9,18502. |

Man erhält schließlich für die innere Orientierung

$$\Xi = +1{,}79\ \text{mm};\quad H = +36{,}56\ \text{mm};\quad D = 314{,}37\ \text{mm};$$

sowie die Transformationsformeln:

| | $\mathfrak{i}$ | $\mathfrak{j}$ | $\mathfrak{k}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{i}'$ | − 0,40812 | − 0,91266 | − 0,02260 |
| $\mathfrak{j}'$ | − 0,13692 | + 0,03671 | + 0,98990 |
| $\mathfrak{k}'$ | − 0,90261 | + 0,40709 | − 0,13994 |

Die Ausgleichung der inneren Orientierung ergibt für die Normalgleichungen das folgende Koeffizientenschema; dabei wurde für die Koordinaten des Bildraumes 1 m als Einheit gewählt.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 111,8061 | − 2,8251 | − 13,0746 | 0 | + 37,3996 | − 3,2316 | − 0,003956 |
| | + 115,3628 | − 8,4674 | − 37,3996 | 0 | + 4,8593 | − 0,166603 |
| | | + 10,7649 | + 3,2316 | − 4,8593 | 0 | − 0,021575 |
| | | | + 12,1800 | − 0,3401 | − 1,5277 | + 0,052078 |
| | | | | + 12,5772 | − 1,0159 | − 0,000859 |
| | | | | | + 1,2428 | + 0,002094 |
| | | | | | | + 0,00055218 |

Die Lösung ist

$$Y_1 = -0{,}00426 \pm 0{,}00274;\qquad U_1 = +0{,}02852 \pm 0{,}00933;$$
$$Y_2 = +0{,}01126 \pm 0{,}00299;\qquad U_2 = +0{,}01401 \pm 0{,}00834;$$
$$Y_3 = +0{,}00346 \pm 0{,}00065;\qquad U_3 = -0{,}01033 \pm 0{,}00153.$$

Reduzierte Fehlerquadratsumme = 0,00006868.

Die endgültigen Koordinaten des Hauptpunktes sind

$$\Xi' = -2{,}47\ \text{mm} \pm 2{,}74\ \text{mm};\qquad H' = +47{,}82\ \text{mm} \pm 2{,}99\ \text{mm};$$

und die verbesserte Bildweite ist

$$D' = 317{,}83\ \text{mm} \pm 0{,}65\ \text{mm}.$$

Infolge der Drehung $\mathfrak{U}$ gehen die Vektoren $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ über in

$$\mathfrak{I}' = \mathfrak{i}' + |\mathfrak{U}\mathfrak{i}'\qquad \mathfrak{J}' = \mathfrak{j}' + |\mathfrak{U}\mathfrak{j}'\qquad \mathfrak{K}' = \mathfrak{k}' + |\mathfrak{U}\mathfrak{k}'.$$

Nach geeigneter Reduktion bekommt man daher die Transformationsformeln:

| | $\mathfrak{i}$ | $\mathfrak{j}$ | $\mathfrak{k}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{I}'$ | − 0,39389 | − 0,91863 | − 0,03064 |
| $\mathfrak{J}'$ | − 0,16681 | + 0,03866 | + 0,98522 |
| $\mathfrak{K}'$ | − 0,90389 | + 0,39319 | − 0,16848 |

Die Richtungskosinus der optischen Achse sind:

$\alpha_0 = +0{,}90389 \pm 0{,}00303$

$\beta_0 = -0{,}39319 \pm 0{,}00777$

$\gamma_0 = +0{,}16848 \pm 0{,}00933.$

Der Schnittpunkt der durch den verbesserten optischen Mittelpunkt in der Richtung $\mathfrak{k}$ gezogenen Geraden mit der Bildebene $\mathfrak{J}'\mathfrak{J}'$ ist der Nadir bezw Zenith des Bildes; die Koordinaten desselben sind:

$\xi_z = -60{,}27$ mm;

$\eta_z = +1906{,}34$ mm.

Die Neigung des Horizontes gegen die $\xi$-Achse ist

$0{,}03110 \pm 0{,}00172$

$= \mathrm{tg}(1^0 46' 53'' \pm 5' 55'');$

die Koordinaten des Schnittpunktes des Horizontes mit der Hauptvertikalen endlich sind

$\xi_h = -0{,}78$ mm:

$\eta_h = -6{,}48$ mm.

Rechnet man das Bündel $\mathfrak{h}_i'$ in das System $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ um und vergleicht es dann mit dem Bündel $\mathfrak{g}_i$, so erhält man folgende Tabelle:

| Nummer | Komponenten der Vektoren $\mathfrak{g}_i$ | | | Komponenten der Vektoren $\mathfrak{h}_i'$ | | | Fehler der Komponenten | | | Winkelfehler | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\mathfrak{i}$ | $\mathfrak{j}$ | $\mathfrak{k}$ | $\mathfrak{i}$ | $\mathfrak{j}$ | $\mathfrak{k}$ | $\mathfrak{i}$ | $\mathfrak{j}$ | $\mathfrak{k}$ | horizontal | vertikal |
| 1 | 0,85948 | −0,46142 | +0,21989 | 0,85871 | −0,46254 | +0,22053 | +0,00077 | +0,00112 | −0,00064 | − 4′44″ | − 2′16″ |
| 2 | 0,96218 | −0,17024 | −0,21261 | 0,96390 | −0,16439 | −0,20946 | − 172 | − 585 | − 315 | −21′19″ | −11′ 4″ |
| 3 | 0,98028 | −0,05662 | +0,18924 | 0,98035 | −0,05615 | +0,18900 | − 7 | − 47 | + 24 | + 1′39″ | + 51″ |
| 4 | 0,80323 | −0,57569 | +0,15312 | 0,80362 | −0,57480 | +0,15418 | − 39 | − 89 | − 106 | + 3′23″ | − 3′41″ |
| 5 | 0,70359 | −0,69333 | +0,15568 | 0,70394 | −0,69270 | +0,15677 | − 35 | − 63 | − 109 | + 2′31″ | − 3′49″ |
| 6 | 0,98972 | −0,07871 | −0,11944 | 0,98950 | −0,08020 | −0,12032 | + 22 | + 149 | + 88 | − 5′13″ | + 3′ 2″ |
| 7 | 0,99698 | −0,06561 | −0,04115 | 0,99708 | −0,06456 | −0,04049 | − 10 | − 105 | − 66 | + 3′38″ | − 2′16″ |
| 8 | 0,92423 | −0,37926 | −0,04478 | 0,92339 | −0,38127 | −0,04496 | + 84 | + 201 | + 18 | − 7′27″ | + 37″ |
| 9 | 0,91662 | −0,35902 | +0,17590 | 0,91744 | −0,35688 | +0,17598 | − 82 | − 214 | − 8 | + 8′ 0″ | − 15″ |
| 10 | 0,97044 | −0,11902 | +0,20994 | 0,97052 | −0,11850 | +0,20980 | − 8 | − 52 | + 14 | + 1′51″ | + 29″ |
| 11 | 0,95072 | −0,30670 | −0,04567 | 0,95064 | −0,30692 | −0,04564 | + 8 | + 22 | − 3 | − 49″ | − 6″ |
| 12 | 0,97623 | −0,08104 | −0,20106 | 0,97616 | −0,08283 | −0,20068 | + 7 | + 179 | − 38 | − 6′17″ | − 1′19″ |
| 13 | 0,96345 | −0,21003 | +0,16615 | 0,96322 | −0,21148 | +0,16569 | + 23 | + 145 | + 46 | − 5′ 6″ | + 1′36″ |

# Beitrag zur Theorie der sogenannten konischen Pendelung der Geschosse.

Von G. v. GLEICH in Frankfurt a. M.

## Einleitung.

Über die sogenannte konische Pendelung rotierender Langgeschosse ist zwar schon manches geschrieben worden, aber trotzdem wenig Zuverlässiges bekannt. Es liegt dies vor allem daran, daß die unmittelbare Beobachtung dieser Bewegung in den meisten Fällen sehr schwer, wo nicht unmöglich ist. Das einzige zahlenmäßig Zugängliche war bis jetzt im Grunde genommen die Wirkung der konischen Pendelung d. h. die Seitenabweichung, und um diese beiden Vorgänge in Verbindung zu bringen, mangelte es an der nötigen Entwicklung der Theorie. Daß diese in so auffälliger Weise zurückblieb, liegt wohl daran, daß dem Mathematiker und Physiker vom Fach der Gegenstand zu fern steht. Der Praktiker auf der anderen Seite ist befriedigt, wenn er die Seitenabweichung durch eine empirische Interpolationsformel dargestellt sieht: an ihrer theoretischen Begründung liegt ihm wenig. Erst vor nicht allzulanger Zeit hat sich Herr Geh. Regierungsrat Professor Dr. C. Cranz im 3. und 4. Heft des 43. Jahrganges dieser Zeitschrift des vorliegenden Gegenstandes eingehender angenommen. Diese Abhandlung war auch die Veranlassung für die nachfolgende Untersuchung, die ursprünglich von den durch Professor Dr. Cranz geschaffenen Grundlagen ausging, sich aber dann doch von seinem Verfahren entfernte und schließlich zu ganz anderen Formeln gelangte.

Den bisherigen Stand der gesamten Frage hat inzwischen Herr Professor Cranz seinem Referat über Ballistik in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (Bd. IV. 2 Nr. 18. 3h) übersichtlich skizziert, ohne jedoch auf eine Theorie näher einzugehen. Als Erklärung der Seitenabweichungen des Geschosses zieht er in erster Linie die sogenannte „Kreiselwirkung“, in zweiter Linie die „Polsterwirkung“ und die „Wirkung der mit dem Geschoß rotierenden Luft“ herbei. Er kommt aber selbst zu dem Schlusse, daß die erste Wirkung bei weitem vorherrschen müsse. Ich möchte glauben, daß die beiden anderen Erklärungsweisen überhaupt nicht aufrecht erhalten werden können. Das Nachfolgende befaßt sich daher zunächst nur mit der „Kreiselwirkung“, zieht aber „die Wirkung der mit dem Geschoß rotierenden Luft“ nachher in anderer Weise in Betracht.

Auf die vielfach recht oberflächlichen Theorien, die anderwärts in der Literatur aufgestellt worden sind, glaube ich nicht besonders eingehen zu sollen. Die rein spekulativen Erklärungsweisen gehen meist von ganz willkürlichen, unbewiesenen Voraussetzungen aus: ein so verwickeltes Problem läßt sich aber unmöglich ohne Rechnung durch bloße Schlüsse lösen.

Zuverlässiger sind die bis jetzt gemachten Beobachtungen und zwar vor allem 1. die des Herrn Geh. Regierungsrats Professors Dr. Neesen[1]), wonach sich die Geschoßspitze zunächst hebt, dann nach rechts und abwärts wendet, 2. die des damaligen Hauptmanns jetzigen Oberstleutnants Heydenreich: „die Pendelungen beginnen klein und rasch und werden schließlich größer und langsamer: sie sind um so kleiner je stärker der Drall, dagegen ist die Seitenabweichung um so größer je stärker der Drall". Professor Cranz, dessen Untersuchungen die genannten Beobachtungen entnommen sind, findet hierin zunächst Widersprüche, die er aber in der weiteren Behandlung im wesentlichen beseitigt. Mit Recht hebt er vor allem hervor, daß zweierlei Arten von Geschoßpendelungen zu unterscheiden seien, nämlich die Präzessions- und die Nutationsbewegungen. Ganz ähnlich äußert sich z. B. auch E. Vallier S. 12 und 13 seiner 1895 erschienenen „Balistique extérieure", indem er einer Präzession von längerer Periode eine Nutation von kürzerer Periode gegenüberstellt. Allein einen Zusammenhang mit der Seitenabweichung stellt Vallier analytisch nicht her, vielmehr sagt er S. 68: La solution analytique du problème de la dérivation est d'une telle complication qu'elle ne semble pas pouvoir être jamais mise sous une forme vraiment pratique. Er beschränkt sich darauf, eine Interpolationsformel von Mayewsky anzuführen, ähnlich wie Professor Cranz eine solche von Hélie auf S. 234 der Enzyklopädie gibt.

Auch Professor Cranz hat es in den zu Anfang erwähnten Untersuchungen nicht unternommen, zur Darstellung der Seitenabweichungen überzugehen. Ich bin fast geneigt zu bezweifeln, ob dies mit den dortigen Formeln überhaupt zu leisten ist. Denn es ist von vornherein wenig wahrscheinlich, daß z. B. beim Geschütz C/73 die Amplitude der Präzessionspendelungen bei 4500m bereits etwa $41^0$ betragen soll, wie Professor Cranz angibt und selbst als ziemlich unsicher bezeichnet. Träfe dies zu, so würde wohl auch auf weit kürzere Entfernungen jede Schußpräzision aufhören müssen. Nun kann auch

1) Erst lange nach Beendigung dieser Studie kam mir ein kurzer Aufsatz des Herrn Oberstleutnant Heydenreich, S. 576 der kriegstechnischen Zeitschrift 1905, zur Hand, wonach in Bälde die Veröffentlichung weiterer photographischer Messungen von Prof. Dr. Neesen zu erwarten ist.

die nachfolgende Untersuchung die Seitenabweichung selbst noch nicht scharf durch einen „wirklich praktischen Ausdruck" darstellen, vielmehr glaube ich in derselben gerade den Grund, warum dies nicht möglich ist, näher erläutert zu haben. Immerhin aber ist der Versuch gemacht, konische Pendelung und Seitenabweichung durch begründete Formeln in gegenseitige Beziehung zu bringen und dieser Versuch liefert für das Geschütz C/73 nahezu genaue Übereinstimmung mit den Beobachtungen, d. h. mit Daten, die lediglich aus der Schußtafel abgeleitet sind. Ich muß es anderen überlassen, die Formel auch an weiteren Geschützen zu erproben, da mir hierzu nicht die nötige Zeit zur Verfügung steht.

Die mehrfach erwähnte Abhandlung von Professor Cranz verzichtet grundsätzlich darauf, die analytischen Ausdrücke für die Bewegung der Geschoßachse zu entwickeln. Die Heranziehung der grundlegenden Arbeiten von Klein und Sommerfeld steht mehr nur in einem losen Zusammenhang mit der eigentlichen Methode, welche die Erscheinung in Intervalle zerlegt und die Rechnung lediglich numerisch durchführt. Es ist dies gewissermaßen ein Analogon zur Methode der „speziellen Störungen" in der Astronomie; allein in beiden Fällen ist das Verfahren nicht nur ungemein ermüdend, sondern vor allem muß es so immer ausgeschlossen bleiben, die Seitenabweichung aus der konischen Pendelung abzuleiten.

Die Gründe, die dort zum rein numerischen oder graphischen Verfahren führten, sind einmal die Verwickeltheit der Luftwiderstandsfunktion, deren Form man ja eigentlich immer noch nicht kennt, und zweitens der anscheinend noch schwerere Übelstand, daß sich der Einfluß der Geschoßspitzenform auf den Luftwiderstand weder theoretisch noch praktisch bis jetzt streng genug ermitteln ließ. Es wird sich indes zeigen, daß man selbst mit den bisherigen oberflächlichen Kenntnissen vom Luftwiderstand gegen geneigte Flächen der endgültigen Lösung des sehr verwickelten Problems auch rein analytisch näher kommen kann. Die erste Schwierigkeit kommt weit weniger in Betracht, da man die unbequeme Funktion durch einen sehr einfachen Kunstgriff eliminieren kann.

## 1. Abschnitt.

### Bestimmung der Komponenten des Luftwiderstandes.

Es ist zwar heute allgemein angenommen, daß der Luftwiderstand beim schiefen Auftreffen auf ebene Flächen sich keineswegs durch einen einfachen Ausdruck in Funktion des Auftreffwinkels darstellen läßt. Wie z. B. aus der Enzyklopädie der mathematischen Wissen-

schaften (Band IV 2. Nr. 17. S. Finsterwalder, Aërodynamik) zu ersehen ist, sind eine große Anzahl empirischer oder theoretischer abgeleiteter Formeln aufgestellt worden, die unter sich durchaus nicht übereinstimmen. Außerdem (vgl. a. a. O. S. 169) gilt es gegenwärtig allgemein für unzulässig, den Widerstand eines beliebig gestalteten Körpers aus dem Widerstand des Flächenelements durch Summation über die Oberfläche zu ermitteln. Deshalb müßte man eigentlich, wie Prof. Cranz mit Recht hervorhebt, zur Bestimmung des Einflusses der Spitzenform auf Grund ausgedehnter Versuche lediglich empirische Daten zur Anwendung bringen. Allein solche gibt es für große Geschwindigkeiten nicht oder doch nicht in genügendem Umfang. Prof. Cranz ging daher auf die Formel zurück, die Kummer (vgl. Berliner Abhandlungen 1875 u. 1876) aufgestellt hat. Er interpolierte zwischen den für eine kegelförmige und halbkugelförmige Spitze von Kummer gegebenen Werten; ich halte dies doch nicht für ganz unbedenklich und war vielmehr der Ansicht, der Wahrheit etwas näher kommen zu können, indem ich von vornherein die Rechnung für Geschosse mit Ogivalspitzen beliebiger Höhe durchführte. Unter Ogivalspitze ist der durch Umdrehung eines halben Kreissegments enstandene Rotationskörper zu verstehen. Es blieb dabei allerdings nichts anderes übrig, als die verpönte Summation über die Oberfläche auszuführen und eins der einfachen Widerstandsgesetze — nämlich das von Newton — zugrund zu legen. Die Rechnung ist zwar etwas einförmig, aber es erscheint aus einem bestimmten Grunde doch erforderlich, etwas näher auf sie einzugehen.

Wenn die Geschoßoberfläche der Gleichung

$$(1) \qquad f(x,\ y,\ z) = 0$$

genügt, dann sind nach bekannten Formeln die Richtungskosinus der Flächennormale

$$(2) \qquad \cos(n,\ x) = \frac{1}{s}\frac{\partial f}{\partial x} \quad \cos(n,\ y) = \frac{1}{s}\frac{\partial f}{\partial y} \quad \cos(n,\ z) = \frac{1}{s}\frac{\partial f}{\partial z},$$

wo

$$s = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Nennt man die Richtungscosinus der Flugbahntangente des Geschosses

$$\cos(v,\ x), \quad \cos(v,\ y), \quad \cos(v,\ z)$$

und $\omega$ den Winkel zwischen der nach außen gezogenen Normale der Geschoßoberfläche und der Bahntangente, so ist

$$(3) \quad \cos\omega = \cos(n,\ x)\cdot\cos(v,\ x) + \cos(n,\ y)\cdot\cos(v,\ y) + \cos(n,\ z)\cdot\cos(v,\ z).$$

Ist ferner $W$ der Widerstand, den die Flächeneinheit bei senkrechtem Auftreffen des Luftstroms erleidet, so erhält ein Flächenelement $dJ$ in Richtung der nach außen gezogenen Normale den Druck

$$w = -W \cdot \varphi(\omega) \cdot dJ. \tag{4}$$

Unter Zugrundlegung des Newtonschen Gesetzes ist hierbei

$$\varphi(\omega) = \cos^2 \omega. \tag{5}$$

Zerlegt man den Druck nach den Koordinatenachsen, so folgt

$$\begin{aligned} w_x &= -W\varphi(\omega)dJ \cdot \cos(n, x) \\ w_y &= -W\varphi(\omega)dJ \cdot \cos(n, y) \\ w_z &= -W\varphi(\omega)dJ \cdot \cos(n, z). \end{aligned} \tag{6}$$

Durch Integration über die vom Luftstrom getroffenen Teile der Geschoßoberfläche erhält man die Komponenten $X$, $Y$, $Z$ des Gesamtwiderstandes.

Legt man nun den Koordinatenanfang in die Mitte des Geschoßbodens, die positive $x$-Achse in die Geschoßachse, die positive $Y$-Achse derart, daß die Flugbahntangente in die $XY$-Ebene zwischen die beiden genannten Achsen fällt, endlich die $z$-Achse senkrecht dazu nach aufwärts, so wird

$$\cos(v, x) = \cos\alpha \qquad \cos(v, y) = \sin\alpha \qquad \cos(v, z) = 0, \tag{7}$$

wenn man den Winkel zwischen der Bahntangente und der Geschoßachse mit $\alpha$ bezeichnet.

Damit wird (3) zu

$$\cos\omega = (n, x) \cdot \cos\alpha + \cos(n, y) \cdot \sin\alpha. \tag{8}$$

Die Komponente $X$ des Gesamtwiderstandes fällt in die Geschoßachse, die Komponente $Z$ wird gleich Null, die Komponente $Y$ endlich greift in einem Punkte der Geschoßachse an, der offenbar zugleich der Angriffspunkt der Resultanten des Gesamtwiderstandes ist. Er wird im allgemeinen nicht mit dem Schwerpunkt zusammenfallen. Bei den üblichen Langgeschossen liegt der Angriffspunkt meist zwischen Spitze und Schwerpunkt, es müßte denn im Geschoßinnern eine ganz abnorme Massenverteilung vorhanden sein.

Nennt man also die Koordinate des Angriffspunktes $\xi_a$, die des Schwerpunktes $\xi_0$, so ist $\xi_a > \xi_0$.

Für jedes einzelne Element der Geschoßoberfläche hat der zugehörige Angriffspunkt natürlich im allgemeinen eine besondere Lage. Vorausgesetzt, man kennt für jedes Flächenelement die Lage des zugehörigen

Angriffspunktes, mit anderen Worten: die $x$-Koordinate des Angriffspunktes für ein beliebiges Flächenelement sei $\xi$, so findet man die Koordinate $\xi_a$ des Angriffspunktes der Resultanten durch die Gleichsetzung der entsprechenden Drehmomente aus

$$(9) \qquad Y \cdot \xi_a = -W \sum \varphi(\omega) dJ \cdot \cos(n, y) \cdot \xi,$$

was ohne weiteres aus der zweiten Gleichung (6) folgt.

Da Geschosse Drehungskörper sind, ist die Einführung von Zylinderkoordinaten vorteilhaft. Man setzt:

$$(10) \qquad y = \varrho \cdot \cos \psi \qquad z = \varrho \cdot \sin \psi;$$

damit wird die Gleichung der Meridiankurve des Rotationskörpers in Cartesischen Koordinaten

$$(11) \qquad \varrho = F(x).$$

Offenbar ist das Flächenelement

$$(12) \qquad dJ = \varrho \cdot d\psi \cdot ds = \varrho \cdot d\psi \cdot \sqrt{d\varrho^2 + dx^2},$$

und es wird die Gleichung (1) zu

$$(13) \qquad f = [F(x)]^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Durch partielle Differentiation und mit Hilfe von (2) und (10) folgt

$$(14) \quad \cos(n, x) = \frac{d\varrho}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\cos\psi \frac{dx}{ds}, \quad \cos(n, z) = -\sin\psi \frac{dx}{ds}.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke werden die Gleichungen (6) und (8) zu

$$(15) \qquad \begin{cases} X = -W \iint \varphi(\omega) \varrho \, d\varrho \, d\psi \\ Y = +W \iint \varphi(\omega) \varrho \cos\psi \, d\psi \, dx, \end{cases}$$

und weiterhin kommt

$$(16) \qquad \cos\omega = \cos\alpha \frac{d\varrho}{ds} - \sin\alpha \cos\psi \frac{dx}{ds},$$

wie auch Professor Cranz in seinem Kompendium der Ballistik angibt. Es ist offenbar

$$\frac{dx}{ds} = -\sin(n, x).$$

Denkt man sich in einem Punkt der Meridiankurve die Normale nach innen gezogen, so ist ihr Schnittpunkt mit der Geschoßachse offenbar der Angriffspunkt des Widerstandes, der auf das im betrachteten Punkte der Meridiankurve gelegene Flächenelement wirkt. Die $x$-Koor-

dinate dieses Angriffspunktes ist, wie aus einer elementar-geometrischen Betrachtung sofort folgt,

$$(17) \qquad \xi = x - \varrho \operatorname{cotg}(n,\ x).$$

Hiermit wird die Formel (9) zu

$$(18) \qquad Y \cdot \xi_a = \Psi = W \iint \varphi(\omega)(x - \varrho \operatorname{cotg}(n,\ x))\varrho \cos\psi\, d\psi\, dx.$$

Mit Hilfe von (15) bestimmt sich hieraus sehr einfach $\xi_a$, die Koordinate des Angriffspunktes des Gesamtwiderstandes. Indessen bedarf man dieser nicht unmittelbar; vielmehr benötigt man, wie weiter unten gezeigt wird, statt dessen die Größe

$$(19) \qquad U = \frac{(\xi_a - \xi_0)\, Y}{\sin\alpha} = \frac{\Psi - \xi_0 Y}{\sin\alpha},$$

wo $\xi_0$ die Koordinate des Geschoßschwerpunktes ist. Der Ausdruck $U$ ist offenbar das durch $\sin\alpha$ dividierte Drehmoment um die $Z$-Achse, das seine Entstehung dem Umstand verdankt, daß der Winkel $\alpha$ zwischen Geschoßachse und Bahntangente nicht immer gleich Null bleibt, d. h. $U$ ist die Ursache der konischen Pendelung.

Bei der Auswertung der Integrale $Y$ und $\Psi$ ist es nötig, genau auf die Vorzeichen zu achten. Da laut Voraussetzung $\xi_a > \xi_0$, und da $\varphi(\omega)$ notwendig positiv ist, muß $w_y$ (in Formel (6)) entgegengesetztes Zeichen haben, je nachdem $\cos\psi$ positiv oder negativ ist. Kommt man überein, $w_y$ positiv anzusetzen, wenn es bestrebt ist, den Winkel $\alpha$ zu vergrößern, so muß man die bezüglich $\psi$ genommenen Integrale zwischen der unteren Grenze $\psi = -\frac{\pi}{2}$ und der oberen $\psi = +\frac{\pi}{2}$ positiv ansetzen, dagegen negativ zwischen der unteren Grenze $\psi = +\frac{\pi}{2}$ und der oberen $\psi = -\frac{\pi}{2}$. Ein Integrieren zwischen den Grenzen 0 und $2\pi$, zu dem man leicht verleitet sein könnte, würde zu Irrtümern führen.

Die Integrationen (15) und (18) müssen nun über den tatsächlich vom Luftstrome getroffenen Teil der Geschoßoberfläche erstreckt werden. Man findet die Begrenzungskurve dieses Teiles offenbar dadurch, daß man parallel zur Flugbahntangente Tangentenebenen an die Geschoßoberfläche legt oder was dasselbe besagt: die Punkte der Begrenzungskurve sind dadurch bestimmt, daß in ihnen die Flächennormale mit der Bahntangente einen rechten Winkel bildet, d. h. sie genügen der Bedingung

$$\cos(n,\ x)\cos\alpha + \cos(n,\ y)\sin\alpha = 0,$$

oder weil

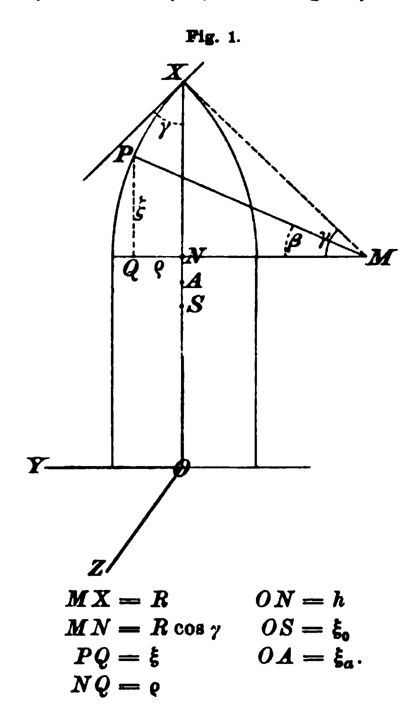
$$\cos(n,\ y) = \sin(n,\ x) \cdot \cos\psi$$

ist: auf der Begrenzungskurve hat $\psi$ den Wert $\psi_0$, bestimmt durch

(20) $$\cos\psi_0 = -\operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}(n, x).$$

In den Punkten, für die diese Gleichung keine reellen Werte für $\psi$ liefert, trifft die Luft auf den gesamten Umfang des Geschosses auf. Dort ist daher unter Beachtung der obigen Bemerkung über die Vorzeichen in bezug auf $\psi$ rings herum zu integrieren. Dies ist der Fall für $\beta > \alpha$, wenn der Winkel zwischen der Normale und der $\varrho$-Achse (s. Formel (11) und Fig. 1.) mit $\beta$ bezeichnet wird; es ist nämlich

Fig. 1.




$$\sphericalangle(n, x) = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Andernfalls (bei $\beta < \alpha$) folgen die Integrationsgrenzen bezüglich $\psi$ aus der Bedingungsgleichung (20).

Bei den Geschossen mit Ogivalspitze eignet sich, wie aus der Fig. 1 hervorgeht, der Winkel $\beta$ außerdem zu einer bequemen Koordinatentransformation an Stelle der in (11) vorkommenden Cartesischen Koordinaten $\varrho$ und $x$.

Die Integrale $Y$ und $\Psi$ entwickeln sich für den zylindrischen Teil des Geschosses, dessen Höhe $h$ sei, ohne alle Unbequemlichkeit. Es ist dort

$$\cos(n,x) = 0, \quad \sin(n,x) = 1;$$

aus (20) folgt

$$\cos\psi_0 = 0,$$

d. h. es ist bezüglich $\psi$ stets nur von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ zu integrieren; an Stelle der Variabeln $\varrho$ tritt die Konstante $r$, wenn man das Kaliber mit $2r$ bezeichnet.

So findet man hier sofort

(21) $$Y_{\text{Cyl.}} = \tfrac{4}{3}\, W h r \sin^2\alpha$$

(22) $$\Psi_{\text{Cyl.}} = \tfrac{2}{3}\, W h^2 r \sin^2\alpha.$$

$X_{\text{Cyl.}}$ wird wegen $\cos(n,x) = 0$ gleich Null.

Unbequemer ermitteln sich die auf die Spitze bezüglichen Integrale. Nennt man den Winkel an der Geschoßspitze $\gamma$ und führt

statt $x$ und $\varrho$ die neue Variable $\beta$ ein, so wird, wie man sich an Fig. 1 leicht überzeugt:

$$(23)\quad \begin{cases} x = R\sin\beta + h \qquad \varrho = R(\cos\beta - \cos\gamma) \qquad dx = R\cos\beta d\beta \\ d\varrho = -R\sin\beta d\beta \\ \cos\omega = \sin\alpha\cos\beta(\cos\psi + u) \\ \text{wenn } u = \operatorname{cotg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta \\ \xi = x - \varrho\operatorname{tg}\beta = R\cos\gamma\operatorname{tg}\beta + h. \end{cases}$$

Damit wird

$$(24)\begin{cases} Y_{S_p} = W\sin^2\alpha R^2\iint(\cos\psi + u)^2\cos\psi d\psi\cdot\cos^3\beta(\cos\beta - \cos\gamma)\,d\beta \\ \Psi_{S_p} = h\cdot Y_{S_p} + W\cos\gamma\sin^2\alpha R^3\iint(\cos\psi + u)^2\cos\psi\,d\psi\cdot\cos^3\beta(\cos\beta - \cos\gamma)\,d\beta. \end{cases}$$

Die Integrationsgrenzen sind durch die Gleichung (20) bedingt; man muß bei der Spitze zwei Zonen unterscheiden, eine obere, für die $\beta \geq \alpha$, und eine untere, für die $\beta \overline{\overline{<}} \alpha$ ist. In der oberen verschwindet das bezüglich $\psi$ ausgeführte Integral:

$$(25)\int(\cos\psi + u)^2\cos\psi d\psi = \sin\psi(1 + u^2 + u\cos\psi - \tfrac{1}{3}\sin^2\psi) + u\cdot\psi = f(\psi),$$

weil

$$\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(\psi)\,d\psi - \int\limits_{+\pi/2}^{-\pi/2} f(\psi)\,d\psi$$

zu bilden ist.

In der unteren Zone sind die Integrationsgrenzen $\psi_1$ und $\psi_2$, wobei stets $\psi_1 < -\frac{\pi}{2}$ und $\psi_2 > +\frac{\pi}{2}$ ist. Setzt man $\sigma = \psi_2 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - \psi_1$, so wird $\cos\psi = -\sin\sigma$, also

$$(25\text{a})\qquad \sin\sigma = \operatorname{cotg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = u.$$

Für die untere Zone ist also bezüglich $\psi$ zu nehmen:

$$\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(\psi)\,d\psi - 2\int\limits_{0}^{\sigma} f(\psi)\,d\psi.$$

Bezüglich $\beta$ ist in der unteren Zone natürlich von 0 bis $\beta$ zu integrieren.

Die Ausführung der Rechnung bietet keine weiteren Schwierigkeiten, ist indessen etwas umständlich und würde hier zu viel Raum beanspruchen. Man findet bis einschließlich zur 5. Ordnung in sin $\alpha$:

$$(26)\quad Y_{S_p} = WR^2\cdot\Big\{\tfrac{1}{4}\alpha(1 + \sin^2\alpha) + \tfrac{1}{3}\pi\cdot\cos\gamma\cdot\sin\alpha - \tfrac{1}{3}\cos\gamma(6 + 2\pi)\sin^3\alpha$$
$$+ \tfrac{1}{3}\cos\gamma\,(\tfrac{10}{3} + \pi)\sin^5\alpha - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{\pi}{8}\cos\gamma)\sin\alpha\cos\alpha$$
$$+ \left(\tfrac{19}{12} + \frac{\pi}{2}\right)\sin^3\alpha\cos\alpha - \left(\tfrac{5}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\sin^5\alpha\cos\alpha - 2(1 - \cos\gamma)\left(\tfrac{2}{3} + \frac{5\pi}{16}\right)\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}$$
$$- 2(\tfrac{5}{2}\cos\gamma - 3)\left(\tfrac{13}{36} + \frac{7\pi}{64}\right)\frac{\sin^5\alpha}{\cos^3\alpha} - \cdots\Big\}$$

und

$$(27)\qquad \Psi_{Sp} = hY_{Sp} + WR^3 \cos\gamma \Big\{ \frac{\pi}{8}\alpha \cdot \sin\alpha\cos\alpha - \tfrac{4}{3}\cos\gamma \cdot (1-\cos\alpha)$$

$$+ \left(\tfrac{8}{9}\cos\gamma - \frac{\pi}{8}\right)\sin^2\alpha + \left(\tfrac{5}{6} + \frac{3\pi}{8}\right)\sin^4\alpha - \left(\frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}\right)\sin^6\alpha$$

$$- \tfrac{2}{9}\cos\gamma\sin^2\alpha\cos\alpha - \cos\gamma\left(\tfrac{10}{9} + \frac{\pi}{8}\right)\sin^4\alpha\cos\alpha - 2(1-\cos\gamma)\left(\tfrac{17}{15} + \frac{\pi}{6}\right)\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$- 2\left(\tfrac{5}{2}\cos\gamma - 3\right)\left(\tfrac{139}{525} + \frac{\pi}{10}\right)\frac{\sin^6\alpha}{\cos^4\alpha} - \cdots \Big\}.$$

Sämtliche Integrale (24), (26) und (27) werden, wie es ganz augenscheinlich sein muß, für $\alpha = 0$ ebenfalls gleich Null. Dasselbe ist bei

$$U = \frac{\Psi - \xi_0 \cdot Y}{\sin\alpha}$$

der Fall, denn es wird im ersten Glied von $Y_{Sp}$ der Ausdruck $\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)_{\alpha=0}$ gleich 1. Da man ohnehin in den auf die untere Zone der Spitze bezüglichen Integralen die Glieder 6ter Ordnung in $\alpha$ vernachlässigt hat, kann man obige Ausdrücke noch vereinfachen, indem man für $\alpha$ und $\cos\alpha$ Reihenentwicklungen nach Potenzen von $\sin\alpha$ einsetzt.

Es wird

$$(28)\qquad Y = Y_{Cyl} + Y_{Sp} = \tfrac{4}{3}Whr\sin^2\alpha + WR^2\Big[(1-\cos\gamma)\left(\tfrac{2}{3} - \frac{\pi}{8}\right)\sin^3\alpha$$

$$+ \left(\tfrac{1507}{1440} - \tfrac{5}{32}\pi - \tfrac{41}{46}\cos\gamma + \tfrac{19}{192}\pi\cos\gamma\right)\sin^5\alpha\Big]$$

$$(29)\qquad U = \tfrac{4}{3}Whr\left(\frac{h}{2} - \xi_0\right)\sin\alpha + WR^2\Big\{R\cos\gamma\Big[\left(\tfrac{11}{10}\cos\gamma - \tfrac{43}{30}\right)\sin^3\alpha$$

$$+ \left(\tfrac{101}{70}\cos\gamma - \tfrac{1237}{1050}\right)\sin^5\alpha\Big] + (h - \xi_0)\Big[(1-\cos\gamma)\left(\tfrac{2}{3} - \frac{\pi}{8}\right)\sin^2\alpha$$

$$+ \left(\tfrac{1507}{1440} - \tfrac{5}{32}\pi - \tfrac{41}{36}\cos\gamma + \tfrac{19}{192}\pi\cos\gamma\right)\sin^4\alpha.$$

Um $W$ zu bestimmen ist es am einfachsten, die Komponente $X$ für $\alpha = 0$ zu ermitteln und den erhaltenen Ausdruck mit den empirischen Formeln für den Luftwiderstand zu vergleichen.

Eine ganz analoge Rechnung, wie die bezüglich der Integrale $Y$ und $\Psi$ liefert nämlich:

$$(30)\qquad X_{\alpha=0} = \tfrac{1}{2}(1-\cos\gamma)(1 + \tfrac{1}{3}\cos\gamma)\, r^2 \pi W.$$

Nun gibt die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Band IV. 2 Nr. 18. (Cranz, Ballistik S. 195) abgesehen vom Koeffizienten der Luftdichte, der hier vernachlässigt wird, für $X$ in kg pro Quadratmeter folgende Ausdrücke:

$$(31)\qquad \begin{cases} & X = r^2\pi \cdot f(v) \\ f(v) = 0{,}0140\,v^2 & \text{für } v = 50 \text{ bis } v = 240\,\text{m/sec} \\ f(v) = 0{,}00005834\,v^3 & \text{„} \; v = 240 \text{ „ } v = 295 \text{ „} \\ f(v) = 0{,}0^{(9)}6709\,v^5 & \text{„} \; v = 295 \text{ „ } v = 375 \text{ „ usw.} \end{cases}$$

wobei dieselbe Spitzenform zugrunde gelegt ist, wie die, für welche hier die Rechnung durchgeführt wird. Es ist dabei $v$ die Geschwindigkeit des Geschosses; man hat daher zu setzen

$$W = \frac{1}{\frac{1}{2}(1-\cos\gamma)(1+\frac{1}{2}\cos\gamma)} f(v).$$

Will man bei $Y$ — Formel (28) — die seitliche Beschleunigung erhalten, so ist mit $\frac{g}{p}$ zu multiplizieren, wobei $g$ die Beschleunigung der Schwerkraft, $p$ das Geschoßgewicht in kg ist. Analog ist zur Bestimmung des Drehmoments $U$ noch mit $g$ zu multiplizieren (vgl. z. B. Kohlrausch, praktische Physik 9. Aufl. S. 541).

Damit wird z. B. für die Granate C/73, bei welcher[1])

$$p = 7{,}5\,\text{kg} \quad r = 0{,}044\,\text{m} \quad \cos\gamma = 0{,}742 \quad h = 2{,}92\,r \quad \xi_0 = 2{,}25\,r$$

ist, die Beschleunigung des Schwerpunkts senkrecht zur Geschoßachse:

$$(32)\quad \begin{aligned} W_S = Y &= \frac{g}{p} r^2 (24{,}2 \sin^2\alpha + 6{,}6 \sin^3\alpha - 5{,}1 \sin^5\alpha)\cdot f(v) \\ &= (0{,}0615 \sin^2\alpha + 0{,}0167 \sin^3\alpha - 0{,}0129 \sin^5\alpha)\cdot f(v) \end{aligned}$$

und das Drehmoment:

$$(33)\quad \begin{cases} U = g r^3 (19{,}1 \sin\alpha - 0{,}50 \sin^2\alpha + 165{,}5 \sin^3\alpha + 0{,}39 \sin^4\alpha + 24{,}2 \sin^5\alpha)\cdot f(v) \\ \frac{U}{A} = (0{,}63 \sin\alpha - 0{,}017 \sin^2\alpha + 5{,}48 \sin^3\alpha + 0{,}013 \sin^4\alpha + 0{,}816 \sin^5\alpha)\cdot f(v). \end{cases}$$

Hierbei ist $A$ das Trägheitsmoment um die „Querachse“ d. h. eine senkrecht zur Geschoßachse durch den Schwerpunkt gehende Achse, das etwa $= 0{,}025\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ beträgt. Da es durch Rechnung nicht genau zu ermitteln ist, sind die obigen Zahlen-Koeffizienten nur als rohe Annäherungen zu betrachten. Sie geben indes wenigstens einen Anhalt bezüglich der Größenordnung. Um somit nochmals die Ergebnisse kurz zusammenfassen: die Widerstandskomponente seitlich zur Geschoßachse $W_S$ ist gegeben durch Formel (28), der Ausdruck

$$U = \frac{(\xi_\alpha - \xi_0) W_S}{\sin\alpha}$$

durch Formel (29).

Beide Ausdrücke lassen sich konvergent nach den Potenzen von $\sin\alpha$ entwickeln — (32) und (33) —, jedenfalls für kleinere Werte von $\alpha$, die hier allein in Betracht kommen. Beide Ausdrück werden für $\alpha = 0$ ebenfalls gleich Null. Damit stehe ich allerdings im Gegensatze zu Herrn Professor Cranz; denn in der Tabelle III, die dieser seinen

1) Mit Absicht ist ein ausrangiertes Geschütz zugrunde gelegt.

Untersuchungen beifügt, hat $U$ für $\alpha = 0$ einen endlichen Wert; allein es scheint mir dies auf einem Versehen in den Kummerschen Formeln zu beruhen, die Professor Cranz offenbar nicht selbst nachgeprüft hat. Wahrscheinlich ist dort nicht darauf geachtet worden, für welche Flächenelemente der Widerstand eine Vergrößerung, und für welche er eine Verkleinerung des Winkels $\alpha$ zur Folge hat. Aus diesem Grunde glaubte ich auf die Herleitung der Formeln näher eingehen zu müssen. Daß die ermittelten Koeffizienten bezüglich ihrer Genauigkeit nur einen sehr bedingten Wert haben, dessen bin auch ich mir wohl bewußt. Aber selbst bei „strengeren" Widerstandsgesetzen, die man künftig finden könnte, müßten doch wohl in analoger Weise die Funktionen $W_S$ und $U$ sich nach steigenden Potenzen von $\alpha$ oder $\sin \alpha$ entwickeln lassen; speziell müßte

$$\frac{U}{A} = \varphi(\alpha) = a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3 + \cdots \tag{34}$$

sein, und zwar käme auch hier kein von $\alpha$ freies Glied vor. Es wird auch die Annahme berechtigt sein, daß für die in Betracht kommenden Werte von $\alpha$ die Reihe für $U$ stets konvergiert; für den allgemeinen Fall eines beliebigen Luftwiderstandsgesetzes läßt sich dies natürlich ohne weiteres nicht beweisen. Es wird sich aber später herausstellen, daß die Koeffizienten $a_i$ in (34) gar nicht die Rolle spielen, die man ihnen theoretisch von vornherein zuschreiben muß, um sicher zu gehen.

## 2. Abschnitt.

### Ableitung der Differentialgleichungen für die Bewegung der Geschoßachse.

Bei der Ableitung der Differentialgleichungen folge ich im wesentlichen Herrn Prof. Cranz. Es kommen die bekannten Eulerschen Rotationsgleichungen zur Verwendung, wie sie mit Vorteil stets zur Bestimmung der Bewegung der Erdachse verwendet worden sind. Dagegen hielt ich es für erforderlich und nützlich, mehrere kleine Größen, die Prof. Cranz vernachlässigt, in den Formeln beizubehalten. Auch glaubte ich bei der Integration anders verfahren zu sollen und habe mich hier Poisson nicht angeschlossen. Der Grund war der, daß mir die Bedingungen der Achsenbewegung im Falle der Erdachse und im Falle der Geschoßachse doch allzu verschieden erschienen.

Um die Eulerschen Formeln anzuwenden, seien wie allgemein üblich zwei Cartesische Koordinatensysteme eingeführt:

1. das „feste": Anfang in der Geschützmündung $O$, positive $x$-Achse horizontal in der Schußrichtung d. h. Richtung der Seelenachse, posi-

tive $y$-Achse horizontal nach links vom Schützen aus gesehen, positive $z$-Achse vertikal nach oben,

2. das mit dem Geschoß fest verbundene: $x_1$-Achse mit der Geschoßachse zusammenfallend, positiv im Sinne der Fortbewegung, $y_1$- und $z_1$-Achse senkrecht dazu und zwar zeigt die positive $z_1$-Achse senkrecht nach oben, wenn die positive $y_1$-Achse horizontal nach links verläuft; der Anfang liegt im Schwerpunkt $S$ des Geschosses.

Den Zusammenhang dieser Achsen mit den sogenannten Eulerschen Winkeln $\vartheta$, $\psi$, $\varphi$ geben die nachstehenden Formeln[1]):

$$(35)\qquad \begin{cases} \cos(x, x_1) = +\cos\vartheta\cos\psi \\ \cos(x, y_1) = -\sin\vartheta\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi \\ \cos(x, z_1) = -\sin\vartheta\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi \\ \cos(y, x_1) = -\cos\vartheta\sin\psi \\ \cos(y, y_1) = +\sin\vartheta\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi \\ \cos(y, z_1) = +\sin\vartheta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi \\ \cos(z, x_1) = +\sin\vartheta \\ \cos(z, y_1) = +\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos(z, z_1) = +\cos\vartheta\cos\varphi. \end{cases}$$

Ferner seien $A$, $B$, $C$ die Trägheitsmomente des Geschosses um die Achsen $Sy_1$, $Sz_1$, $Sx_1$ und $p$, $q$, $r$ die Komponenten der Drehgeschwindigkeit und zwar $p$ positiv für die Drehung um die Achse $Sy_1$ von $Sz_1$ nach $Sx_1$, $q$ positiv für die Drehung um $Sz_1$ von $Sx_1$ nach $Sy_1$, $r$ positiv für die Drehung um $Sx_1$ von $Sy_1$ nach $Sz_1$.

Weiterhin ist wiederum $\alpha$ der variable Winkel, den die Geschoßachse jeweilig mit der Fortbewegungsrichtung d. h. der Bahntangente bildet und der in der gesamten Untersuchung eine Hauptrolle spielt.

Der Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten sei um $(\xi_a - \xi_0)$ vom Schwerpunkt $S$ entfernt.

Im Abschnitt 1 sind die Komponenten dieser Resultanten parallel und senkrecht zur Geschoßachse, sowie außerdem der Ausdruck

$$U = \frac{(\xi_a - \xi_0) W_S}{\sin\alpha}$$

eingehend entwickelt worden.

Wenn $L$, $M$, $N$ die Momentsummen in bezug auf die Achsen $Sy_1$, $Sz_1$, $Sx_1$ bedeuten, nämlich

$$(36)\qquad \begin{cases} L = x_1 Z_1 - z_1 X_1 \\ M = y_1 X_1 - x_1 Y_1 \\ N = z_1 Y_1 - y_1 Z_1 \end{cases}$$

1) Die Herleitung dieser und ähnlicher hier gebrauchter Ausdrücke findet sich in jedem Handbuch der analytischen Mechanik.

so folgen aus den bekannten Eulerschen Gleichungen:

$$(37)\qquad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} = (B-C)q\cdot r + L \\ B\frac{dq}{dt} = (C-A)r\cdot p + M \\ C\frac{dr}{dt} = (A-B)p\cdot q + N. \end{cases}$$

die Differentialgleichungen für die Bewegung der Geschoßachse; es handelt sich nur darum, sie in eine geeignete Form zu bringen.

Um die Momentsumme zu bilden, hat man für die Koordinaten des Angriffspunkts einzusetzen:

$$x_1 = \xi_a - \xi_0,\quad y_1 = 0,\quad z_1 = 0.$$

Bezeichnet man ferner den Winkel zwischen $W_S$ und $Sy_1$ ebenso wie in den Untersuchungen von Prof. Cranz mit $\beta$, so ist $X_1 = W_S\cos\beta$, $Y_1 = W_S\sin\beta$ und damit

$$L = (\xi_a - \xi_0)W_S\sin\beta,\quad M = -(\xi_a - \xi_0)W_S\cos\beta,\quad N = 0.$$

Außerdem sind offenbar die Kosinus der Winkel zwischen der Bahntangente und den Koordinatenachsen des zweiten fest mit dem Geschoß verbundenen Systems $=\cos\alpha$, $=\sin\alpha\cos\beta$, $=\sin\alpha\sin\beta$. Dagegen sind die Kosinus der Winkel zwischen der Bahntangente und den Achsen des ersten festen Koordinatensystems

$$=\frac{dx}{ds},\quad =\frac{dy}{ds},\quad =\frac{dz}{ds}.$$

Folglich ist

$$(38)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \frac{dx}{ds}\cdot\cos(x,x_1) + \frac{dy}{ds}\cdot\cos(y,x_1) + \frac{dz}{ds}\cdot\cos(z,x_1) \\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{dx}{ds}\cdot\cos(x,y_1) + \frac{dy}{ds}\cdot\cos(y,y_1) + \frac{dz}{ds}\cdot\cos(z,y_1) \\ \sin\alpha\sin\beta = \frac{dx}{ds}\cdot\cos(x,z_1) + \frac{dy}{ds}\cdot\cos(y,z_1) + \frac{dz}{ds}\cdot\cos(z,z_1). \end{cases}$$

Da ferner $A = B$ ist, nehmen die Eulerschen Drehgleichungen bzw. (37) die folgende, der Übersichtlichkeit wegen so geschriebene Form an:

$$(39)\qquad \begin{cases} \frac{dp}{dt} - aq = w\cdot P \\ \frac{dq}{dt} + ap = w\cdot Q \\ \frac{dr}{dt} = 0. \end{cases}$$

Hier bedeutet

$$(40)\quad \begin{cases} a = -\dfrac{C-A}{A}\cdot r \\ w = \dfrac{\xi_a - \xi_0}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{W_S}{A} = \dfrac{U}{A}. \end{cases}$$

$$(41)\quad \begin{cases} P = \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{dx}{ds}\cdot\cos(x,z_1) + \dfrac{dy}{ds}\cdot\cos(y,z_1) + \dfrac{dz}{ds}\cdot\cos(z,z_1) \\ Q = \sin\alpha\cos\beta = \dfrac{dx}{ds}\cdot\cos(x,y_1) + \dfrac{dy}{ds}\cdot\cos(y,y_1) + \dfrac{dz}{ds}\cdot\cos(z,y_1). \end{cases}$$

Aus der dritten Gleichung (39) folgt sofort $r = \text{Const.}$, d. h. „die Komponente der Drehgeschwindigkeit um die Geschoßachse ist konstant.“ Das dürfte allerdings schwerlich den Tatsachen entsprechen. Es ist vielmehr sicher nur ein Mangel der Theorie, welche die Luftreibung nicht in Ansatz bringt. Denn wenn diese wohl an sich im eigentlichen Sinne des Wortes sehr gering sein wird, so wird doch von dem mathematisch keineswegs glatten, d. h. einen genauen Drehungskörper bildenden Geschoß durch die Drehung ein Teil der umgebenden Luft mitgeführt. Es muß also Energie aufgewendet werden und zwar auf Kosten der Drehung. Da indeß fast alle bisherigen Theorien mit $r = \text{Const.}$ arbeiten, so behalten wir auch hier diese Annahme vorläufig bei, um erst später auf diese Frage zurückzukommen.

Indem man die beiden ersten Gleichungen (39) mit $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ multipliziert, dann addiert und subtrahiert und schließlich die ebenfalls von Euler herrührenden Beziehungen

$$(42)\quad \begin{cases} \cos\vartheta\dfrac{d\psi}{dt} = -p\cdot\sin\varphi - q\cdot\cos\varphi \\ \dfrac{d\vartheta}{dt} = -p\cdot\cos\varphi + q\cdot\sin\varphi \end{cases}$$

benützt, werden sie zu

$$p'\cos\varphi - q'\sin\varphi + a\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt} = w(P\cos\varphi + Q\sin\varphi)$$

$$-p'\sin\varphi - q'\cos\varphi + a\frac{d\vartheta}{dt} = w(-P\sin\varphi + Q\cos\varphi).$$

Bestimmt man aus (42) die Differentialquotienten $p' = \frac{dp}{dt}$ und $q' = \frac{dq}{dt}$ und setzt diese sowie die Werte (41) in die vorstehenden Gleichungen, so folgt, weil nach einer weiteren Eulerschen Formel

$$(42\text{a})\quad \frac{d\varphi}{dt} = r + \sin\vartheta\frac{d\psi}{dt}$$

ist, mit Hilfe der Ausdrücke (35)

$$-\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \gamma\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt} - \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = w\Big(-\sin\vartheta\cos\psi\frac{dx}{ds} + \sin\vartheta\sin\psi\frac{dy}{ds} + \cos\vartheta\frac{dz}{ds}\Big)$$

$$\cos\vartheta\frac{d^2\psi}{dt^2} - \gamma\frac{d\vartheta}{dt} - 2\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{d\vartheta}{dt} = w\left(\sin\psi\frac{dx}{ds} + \cos\psi\frac{dy}{ds}\right),$$

wo zur Abkürzung

(43) $$\gamma = r - a = \frac{C}{A}r$$

gesetzt ist.

Weil nun

$$\cos\vartheta\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right) - \sin\vartheta\frac{d\psi}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}$$

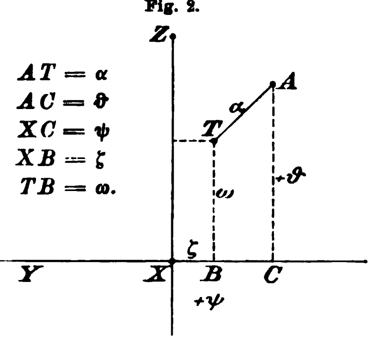
ist, kann man schreiben

(44) $$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right) + \left(\gamma + \sin\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right)\cdot\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt} = w\Big(\sin\vartheta\cos\psi\frac{dx}{ds} \\ \qquad - \sin\vartheta\sin\psi\frac{dy}{ds} - \cos\vartheta\frac{dz}{ds}\Big) \\ \frac{d}{dt}\left(\cos\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right) - \left(\gamma + \sin\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right)\frac{d\vartheta}{dt} = w\left(\sin\psi\frac{dx}{ds} + \cos\psi\frac{dy}{ds}\right). \end{cases}$$

Es wird sich zeigen, daß die Beibehaltung der kleinen Größe $\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt}$, die Herr Professor Cranz vernachlässigt, weiterhin lohnt. Damit und mit der später vorgenommenen Koordinatentransformation trennen sich beide Arbeiten. Man erreicht dadurch hier den Vorteil, daß man nicht weitere Vernachlässigungen vornehmen muß. Es ist z. B. wohl nicht unbedenklich, wenn man vor der Integration der Differentialgleichungen die Quadrate der allerdings nicht großen Winkel $\vartheta$ und $\varphi$ vernachlässigt, wie dies in den mehrfach erwähnten Untersuchungen geschieht; es wird dort außerdem der Winkel, den die Bahntangente mit der Horizontalen bildet, vernachlässigt, so daß die gesamte Theorie nur für sehr flache Bahnen gelten kann. Diese Beschränkungen zu vermeiden ist der Hauptzweck der vorliegenden Studie. Es dürfte nicht überflüssig sein, ehe weiter gegangen wird, nach dem Vorgang von Professor Cranz die geometrische Darstellung von $\alpha$, $\vartheta$ und $\psi$ zu geben, weil sie die Vorstellung des Vorgangs wesentlich erleichtert.

Die Gleichungen (44) sind die Bewegungsgleichungen der Geschoßachse bezogen auf das erste im Raume feste Koordinatensystem. Denkt man sich die Geschoßachse, sowie eine durch den Geschoßschwerpunkt

parallel zur festen $Ox$-Achse gelegte Gerade bis zum Schnitt mit einer um den Geschoß-Schwerpunkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche verlängert, so ergibt sich für das Auge des Schützen die nebenstehende geometrische Darstellung.




Auf der erwähnten Kugelfläche sind $X$, $Y$, $Z$ die Spuren der festen Koordinatenachsen, $T$ die Spur der Bahntangente, $A$ die Spur der Geschoßachse.

In den Formeln (44) sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ offenbar die Richtungskosinus der Bahntangente. Es sei nun $\omega$ der Winkel, den die Bahntangente mit der Horizontalen bildet[1]), $\zeta$ der Winkel, den die durch die Bahntangente gelegte Vertikalebene mit der $xz$-Ebene bildet, so ist nach bekannten Formeln:

$$(45)\quad \frac{dx}{ds} = \cos(T,x) = \cos\omega \cdot \cos\zeta \qquad \frac{dy}{ds} = \cos(T,y) = -\cos\omega \sin\zeta$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos(T,z) = \sin\omega \cos\zeta.$$

Obwohl nun die Gleichungen (44) unverkennbar bereits eine gewisse Symmetrie aufweisen, so ist doch wegen ihrer Verwickeltheit deren unmittelbare Integration nicht oder doch nicht ohne erhebliche Vernachlässigung zu leisten.

## 3. Abschnitt.

## Integration der Differentialgleichungen für die Bewegung der Geschoßachse.

Die Hauptschwierigkeit läßt sich bei den Gleichungen (44) dadurch beseitigen, daß man vom festen zu einem beweglichen Koordinatensystem übergeht. Durch Drehung um die Winkel $\omega$ und $\zeta$ verlegt man die neue $x$-Achse in die jeweilige Flugbahntangente. Allerdings kennt man die Lage des neuen Koordinatensystems im Verhältnis zum früheren vorläufig nicht oder doch nur genähert, weil die Theorie bis jetzt nur $\omega$, nicht aber $\zeta$ liefert. Aber dies ist vorläufig ganz belang-

1) Natürlich nicht zu verwechseln mit dem ebenso bezeichneten Winkel im Abschnitt 1 und einer später auftretenden Variablen.

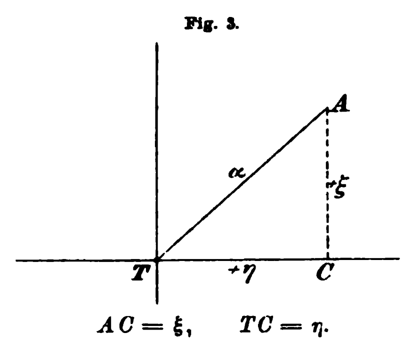
los; vielmehr gewinnen dadurch, daß in bezug auf das neue Achsensystem jetzt

(45a) $$\frac{dx}{ds} = 1, \quad \frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{dz}{ds} = 0$$

wird, die neuen Drehungsgleichungen, in denen wir $\xi$ statt $\vartheta$ und $\eta$ statt $\psi$ schreiben, ganz wesentlich an Einfachheit. Sie gehen nämlich über in:

(46) $$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dt}\right) + \left(\gamma + \sin\xi\,\frac{d\eta}{dt}\right)\cdot\cos\xi\,\frac{d\eta}{dt} = w\cdot\sin\xi\cdot\cos\eta \\ \frac{d}{dt}\left(\cos\xi\frac{d\eta}{dt}\right) - \left(\gamma + \sin\xi\frac{d\eta}{dt}\right)\frac{d\xi}{dt} = w\cdot\sin\eta. \end{cases}$$

Fig. 3.




$AC = \xi$, $TC = \eta$.

Offenbar hat man jetzt nebenstehende, der früheren entsprechende geometrische Darstellung, sowie die Beziehung

(47) $$\cos\xi\cdot\cos\eta = \cos\alpha.$$

Die Symmetrie der Differentialgleichungen ist nun vollends augenfällig geworden. Eliminiert man aus ihnen zunächst $w$ auf die bekannte Weise, so hat man

$$\sin\eta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \sin\xi\cdot\cos\eta\frac{d}{dt}\left(\cos\xi\frac{d\eta}{dt}\right) - \left(\gamma + \sin\xi\frac{d\eta}{dt}\right)\frac{d}{dt}(\cos\eta\cos\xi) = 0$$

oder

$$\sin\xi\cdot\cos\eta\frac{d}{dt}\left(\cos\xi\frac{d\eta}{dt}\right) - \sin\eta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \sin\xi\frac{d\eta}{dt}\cdot\frac{d}{dt}(\cos\eta\cos\xi)$$
$$= -\gamma\frac{d}{dt}(\cos\eta\cos\xi).$$

Man überzeugt sich leicht, daß man statt dessen schreiben kann

(48) $$\frac{d}{dt}\left[\sin\xi\frac{d}{dt}(\sin\eta\cos\xi) - \sin\eta\cos\xi\frac{d}{dt}(\sin\xi)\right] = -\gamma\frac{d}{dt}(\cos\eta\cos\xi$$

Man hatte oben $r = \text{Const}$ (3[te] Gleichung (39)) daher ist nach (43) auch $\gamma$ eine Konstante oder wird wenigstens vorläufig, wie in allen bisherigen Theorien, als solche behandelt. Man kann somit ohne weiteres integrieren und erhält

(49) $$\sin\xi\frac{d}{dt}(\sin\eta\cos\xi) - \sin\eta\cos\xi\frac{d}{dt}(\sin\xi) = \text{Const} - \gamma\cos\eta\cos\xi.$$

Da bei einer modernen Feuerwaffe das Geschoß ziemlich genau zentriert das Rohr verlassen dürfte, sind die Anfangswerte $\xi_0$ und $\eta_0$ von $\xi$ und $\eta$ wenn nicht überhaupt gleich Null, so doch mindestens

so klein, daß man sie unbedenklich mit ihrem sinus vertauschen und ihren cosinus = 1 setzen kann. Ist dann noch

$$(50)\qquad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 = p_0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0 = q_0,$$

so folgt aus (49) für $t = 0$

$$(51)\qquad \text{Const} = \gamma + \delta \quad \text{wo} \quad \delta = q_0\xi_0 - p_0\eta_0.$$

Ich bin der Überzeugung, daß $\delta$ eine so außerordentlich kleine Größe ist, daß man sie zu vernachlässigen hat; bei der straffen Führung der heutigen Geschosse kann $\xi_0$ und $\eta_0$ unmöglich einen nennenswerten Betrag erreichen.[1]) Verschieden steht es mit $p_0$ und $q_0$. Es sind dies Winkelgeschwindigkeiten um eine zur Geschoßachse senkrechte Achse, die das Geschoß in dem Augenblick besitzt, wenn es das Rohr verläßt. Sie sind Folgen eines Stoßes; ein solcher ist aber zweifellos vorhanden. Das kann schon aus dem sogenannten Abgangsfehler geschlossen werden. Aus der Einrichtung der Lafette wird es außerdem wahrscheinlich, daß ein Stoß erfolgt, der das Geschoß um eine wagerechte Achse (senkrecht zur Geschoßachse) zu drehen bestrebt ist. Wäre also in dem Moment des Verlassens des Rohres die $Sy_1$-Achse horizontal, die $Sz_1$-Achse vertikal[2]), so würde es sich um eine Drehung um die $Sy_1$-Achse handeln, d. h. es würde $p_0$ einen nennenswerten Betrag annehmen, wogegen dann $q_0$ wohl geringfügig wäre. Selbstverständlich müssen $p_0$ und $q_0$ klein gegen die Drehgeschwindigkeit sein, da sonst die Stabilität der Geschoßachse nicht gewahrt wäre.

Aus (47) und (49) folgt nun:

$$(52)\qquad \sin\xi\frac{d}{dt}(\sin\eta\cos\xi) - \sin\eta\cos\xi\frac{d}{dt}\sin\xi = \gamma(1-\cos\alpha) + \delta.$$

Es liegt nahe, eine neue Variable $\omega$ einzuführen (die aber nicht mit $\omega$ in (45) verwechselt werden darf), indem man

$$\sin\xi = r\cos\omega \qquad \sin\eta\cos\xi = r\sin\omega$$

setzt, wobei man sofort sieht, daß

$$r^2 = \sin^2\xi + \sin^2\eta\cos^2\xi = 1 - \cos^2\xi\cos^2\eta = \sin^2\alpha$$

also $r = \sin\alpha$ wird. Damit wird (52) zu

$$\sin^2\alpha\frac{d\omega}{dt} = \gamma(1-\cos\alpha) + \delta,$$

1) Anders liegt es natürlich bei Geschützmodellen, die mit mangelhaften Hilfsmitteln konstruiert sind und die lediglich Versuchs- und Demonstrationszwecken dienen.

2) Dies festzusetzen bleibt jedermann unbenommen.

oder

(53) $$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\gamma}{1+\cos\alpha} + \frac{\delta}{\sin^2\alpha}$$

und

(54) $$\sin\alpha\frac{d\omega}{dt} = \gamma\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{\sin\alpha}.$$

Wenn nun $\delta = 0$ ist, was man unbedenklich stets annehmen darf, so hat man die einfache Beziehung[1])

(55) $$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\gamma}{1+\cos\alpha} = \frac{\gamma}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Das heißt, die Winkelgeschwindigkeit des Radiusvektor der von der Geschoßspitze auf der Kugelfläche vom Radius 1 beschriebenen Kurve ist abhängig vom Winkel $\alpha$, den die Geschoßachse mit der Bahntangente einschließt. Für $\alpha = 0$ ist die Winkelgeschwindigkeit $\frac{\gamma}{2}$, mit wachsendem $\alpha$ nimmt sie zu. Sie kann höchstens $=\gamma$ werden; das ist jedoch praktisch unmöglich; denn in diesem Falle wäre $\alpha = 90^0$, mit anderen Worten, das Geschoß würde sich überschlagen. Da ferner $\gamma = \frac{C}{A}r$, wo $r$, die Winkelgeschwindigkeit der Geschoßdrehung, sehr groß ist, muß auch $\frac{d\omega}{dt}$ bei den heutigen Geschützen und noch mehr den Handfeuerwaffen[2]) ziemlich groß sein. Es vollführt daher die Geschoßachse *sehr rasche* konische Pendelungen, wie dies ja auch aus allen Beobachtungen hervorgeht.

Hätte $\delta$ einen von der Null verschiedenen Wert, so könnte $\alpha$ im Verlauf der ganzen Erscheinung niemals den Wert Null annehmen, da ja sonst nach (53) die Winkelgeschwindigkeit der Pendelung sprungweise unendlich groß werden müßte. Für $\delta \gtrless 0$ hätte man offenbar bei $t = 0$

$$\sin\omega_0 = \frac{\eta_0}{\alpha_0} \qquad \cos\omega_0 = \frac{\xi_0}{\alpha_0} \qquad \alpha_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2},$$

womit

$$\delta = \alpha_0(q_0\cos\omega_0 - p_0\sin\omega_0)$$

würde.

Für verschwindendes $\eta_0$ hat man für jeden Wert von $\xi_0$

$$\sin\omega_0 = 0,$$

1) Sie stimmt mit der Polargleichung einer Parabel der Form nach überein.

2) Natürlich nicht bei kleinen Versuchsmodellen, die nur geringe Anfangsgeschwindigkeiten verwenden.

d. h. für verschwindendes $\delta$ hat man das Recht, den Anfangswert $\omega_0$ von $\omega$ gleich Null zu setzen.

Während offenbar (49) das „Flächenintegral" darstellt, gewinnt man aus den Gleichungen (48) durch Elimination von $\left(\gamma + \sin\xi \frac{d\eta}{dt}\right)$ eine Gleichung, die dem „Integral der lebendigen Kraft" entspricht, nämlich

$$(56) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\cos\xi\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right] = -w\frac{d}{dt}(\cos\eta\cos\xi).$$

Nun ist $w$, wie im Abschnitt 1 dargelegt ist, nicht nur eine Funktion von $\alpha$, sondern auch eine solche der Fortbewegungsgeschwindigkeit $v$ des Geschosses, und da wir gewohnt sind, letztere als Funktion von $t$ zu betrachten, implicite auch eine Funktion von $t$. Mithin schließt $w$ streng genommen alle Verwicklungen des ballistischen Problems in sich. An eine strenge Integration von (56), worin $w$ als verwickelte Funktion von $t$ auftritt, ist gar nicht zu denken. Allein ähnlich wie in vielen Fällen der Astronomie tritt auch hier ein zufälliger Umstand erleichternd ein. Da, wie oben ausgeführt, $\frac{d\omega}{dt}$ sehr groß ist, mithin $\xi$ und $\eta$ eine sehr kurze Periode hat, begeht man keinen sehr merklichen Fehler, wenn man die Schiebungsgeschwindigkeit $v$ und damit den in $w$ steckenden Faktor $f(v)$ während *eines* solchen Umlaufes als konstant ansieht. Diese Anschauungsweise ist zunächst dann völlig einwandfrei, wenn man nur die Gestalt der von der Geschoßspitze auf der Kugel vom Radius $= 1$ beschriebenen Kurve zu bestimmen sucht und von ihrer Ausdehnung vorläufig absieht. Indessen liegt auf der Hand, daß man sogar weitergehen darf. Die Kürze der Periode von $\xi$ und $\eta$ im Vergleich zur Ausdehnung der gesamten Flugbahn gestattet, die im Verhältnis zu jener kurzen Umlaufsperiode sehr langsam veränderliche Schiebungsgeschwindigkeit statt als Funktion der unabhängigen Variabeln als variabeln Parameter der Kurve[1]) aufzufassen. Die wahre Bewegung der Geschoßspitze vollzieht sich dann auf einer stetig aneinander gereihten Kurvenschar. Die einzelne Kurve wird offenbar gefunden, indem man $f(v)$ in dem Ausdrucke $w$ als Konstante behandelt. Es ist dies allerdings keine völlig strenge Lösung des Problems; daß aber in der Tat die Annäherung so groß als wünschenswert ist, wird sich aus den später ermittelten Zahlen ergeben.

In dem Ausdruck für

$$w = \frac{U}{A} = \varphi(\alpha) = a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots$$

1) Die Theorie der säkularen Planetenstörungen tut ja schließlich auch nichts anderes.

(vgl. oben Formel (34)) behandelt man daher die Koeffizienten $a_i$ bis auf weiteres als Konstanten, obschon sie sämtlich den Faktor $f(v)$ enthalten.

Setzt man nun in Formel (56) die Ausdrücke

$$\sin\xi = \sin\alpha\cos\omega$$

und

$$\sin\eta\cdot\cos\xi = \sin\alpha\sin\omega$$

ein, so folgt nach einigen leichten Reduktionen

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\frac{d\sin\alpha}{dt}\right)^2 + \sin^2\alpha\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right] = -2w\frac{d}{dt}\cos\alpha, \tag{57}$$

und mit Hilfe von (54) geht dies, wenn man integriert, über in

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = C - \gamma^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 2\int\varphi(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha. \tag{58}$$

Es ist hier $\delta = 0$ angenommen, wie ich es für der Wirklichkeit entsprechend halte; übrigens würde die Beibehaltung von $\delta$ durchaus keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bereiten, nur die Übersichtlichkeit der Formeln würde etwas darunter leiden.

Zunächst folgt aus (58) zur Bestimmung der Integrationskonstante

$$\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right]_0 = C;$$

man überzeugt sich leicht, daß hier die linke Seite gleich $p_0^2 + q_0^2$ ist, womit man

$$C = p_0^2 + q_0^2 \tag{59}$$

findet, und ferner hat man

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{d\omega}\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\alpha}{d\omega}\cdot\frac{\gamma}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

somit wird (58)

$$d\omega = \frac{\gamma}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{d\alpha}{\sqrt{C-\gamma^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+2\int\varphi(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha}}. \tag{60}$$

Zur Ausführung dieser Quadratur ist man wegen der Beschaffenheit von $\varphi(\alpha)$ auf Reihenentwicklungen angewiesen; man muß sich daher die Überzeugung verschaffen, daß diese konvergieren.

Es empfiehlt sich offenbar, $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ unter das Wurzelzeichen, dafür die Konstante $C$ vor das Wurzelzeichen zu schaffen.

Führt man dies aus und setzt, wobei $\sqrt{C}$ und $k$ als stets positiv angenommen werden,

$$\frac{2\sqrt{C}}{\gamma} = k, \tag{61}$$

so wird (60), wenn man das Integral unter dem Wurzelzeichen ausführt, zu:

$$(62)\quad \begin{cases} k\,d\omega \doteq \dfrac{d\alpha}{\pm\sqrt{R(\alpha)}}, \quad \text{wo} \\ R(\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha^2}{k^2}\Big\{1 - \dfrac{\alpha^2}{3} + \dfrac{2\alpha^4}{45} - \cdots + \dfrac{2}{\gamma^2}\Big[C\Big(1 - \dfrac{5}{24}\alpha^2 + \dfrac{\alpha^4}{360} - \cdots\Big) \\ -4\alpha\Big(\dfrac{a_1}{3} + \dfrac{a_2}{4}\alpha + \dfrac{12a_3 - 11a_1}{60}\alpha^2 + \dfrac{12a_4 - 11a_2}{72}\alpha^3 + \cdots\Big)\Big]\Big\}. \end{cases}$$

## 4. Abschnitt.

### Ermittlung der von der Geschoßspitze beschriebenen Kurve.

Wie mehrfach hervorgehoben, ist $\frac{2}{\gamma^2}$ klein gegen 1. Für eine erste Annäherung kann man daher in der Klammmer { } der Gleichung (62) die mit $\frac{2}{\gamma^2}$ multiplizierten Glieder gegen die Einheit vernachlässigen. In diesem Falle wird aus (62)

$$k\,d\omega = \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\alpha}}.$$

Hierin liegt sofort eine Bedingung des Problems: $\sin\alpha \leqq k$, da andernfalls die Wurzel imaginär würde; andererseits sieht man aber, daß eben unter dieser Bedingung die Reihenentwicklung (62) konvergieren muß. Durch die Transformation

$$\sin\alpha = k\sin\varphi$$

wird

$$\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\alpha} = \cos\varphi, \qquad d\alpha = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\alpha},$$

mithin

$$(63)\qquad d\omega = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Man hat auf diese Weise ein elliptisches Integral erster Gattung erhalten. Integriert man zwischen den Grenzen $\omega_0 = 0$ und $\omega$ und zwischen 0 und $\varphi$, so hat man nach der üblichen Bezeichnung

$$(64)\qquad \begin{cases} \omega = F(k, \varphi) \quad \text{oder} \\ \varphi = \operatorname{am}\omega \quad \text{folglich} \\ \sin\varphi = \dfrac{\sin\alpha}{k} = \sin\operatorname{am}\omega \ \text{oder} \\ \sin\alpha = k\cdot\sin\operatorname{am}\omega. \end{cases}$$

Treibt man also die Annäherung nur soweit, daß man $\frac{2}{\gamma^2}$ gegen die Einheit vernachlässigt, so hat die Polargleichung der gesuchten Kurve den vorstehenden ziemlich einfachen Ausdruck.

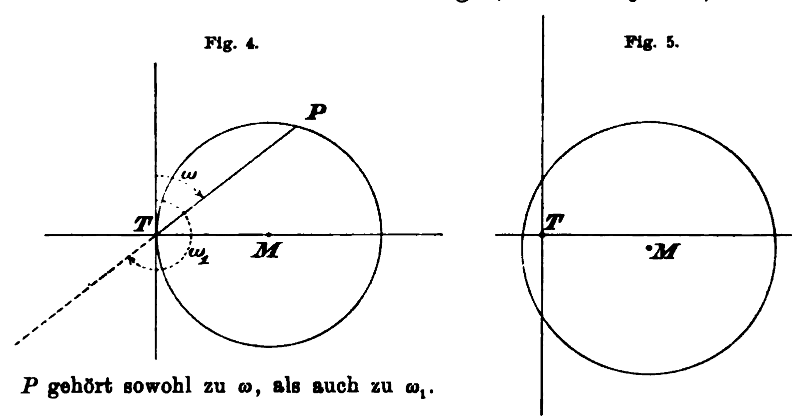
Nun ist weiterhin auch der Modul $k$ ziemlich klein, wenn nämlich $C$ im Verhältnis zu $\gamma$ klein ist, worüber man allerdings vorläufig noch nichts Sicheres weiß, was man aber vermuten darf. Je kleiner aber $k$ ist, desto mehr nähert sich der Amplitudensinus der Kreisfunktion sinus. Die Reihenentwicklung beider sinus zeigt bekanntlich, daß die beiden Funktionen sich nur um Glieder unterscheiden, die mit $k^2$ multipliziert sind.

Die Gleichung (59) beweist, daß $C$ ausschließlich vom Anfangsstoß (bei vorhandenem endlichen $\delta$ allerdings auch von diesem) abhängt; im allgemeinen dürfte auch dieser Anfangsstoß im Verhältnis zu $\gamma$ klein sein.

Wenn man sich daher erlaubt, außerdem noch $k^2 = \frac{4C}{\gamma^2}$ gegen die Einheit zu vernachlässigen, so geht die letzte Gleichung (64) über in

$$\sin\alpha = k\cdot\sin\omega = \frac{2\sqrt{C}}{\gamma}\sin\omega. \tag{65}$$

Diese Gleichung ist dann die Polargleichung der gesuchten Kurve unter den vereinfachenden Voraussetzungen, die sich jedoch, wie man




$P$ gehört sowohl zu $\omega$, als auch zu $\omega_1$.

später sehen wird, durchaus nicht sehr weit von der Wirklichkeit entfernen. Diese Kurve ist ein Kreis (Fig. 4) vom Radius $k = \frac{2\sqrt{C}}{\gamma}$, der die Bahntangente im Ursprung berührt und vom Schützen aus gesehen stets rechts der Bahntangente[1]) verbleibt. Die Geschoßspitze $P$

1) Die Beibehaltung der kleinen Größe $\delta$ in den Formeln (53) und (54) — vgl. Bemerkung im Anschluß zu Formel (55) — hätte lediglich zur Folge, daß $T$ um einen geringen Betrag in das Innere des Pendelungskreises fallen würde. Vgl. Fig. 5.

durchläuft diesen Kreis nicht gleichförmig, sondern wie Gleichung (45) zeigt[1]) mit periodisch veränderlicher Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit ist am kleinsten dann, wenn die Geschoßspitze gerade die Bahntangente passiert, sie nimmt hierauf zu, bis $\alpha$ während eines Umlaufes den größten Wert angenommen hat. Wenn $\omega > \pi$ wird, so erhält $\sin \omega$ und damit $\sin \alpha$ negative Werte, da ja $k$ unter allen Umständen positiv ist, d. h. der Radius Vektor ist dann nach der entgegengesetzten Seite abzutragen. Mit anderen Worten: während $\omega$ von 0 bis $2\pi$ zunimmt, beschreibt die Geschoßspitze zweimal den erwähnten Kreis rechts der Bahntangente, oder die Kurve, von der (65) die Polargleichung ist, besteht streng genommen nicht aus einem, sondern aus zwei überfallenden Kreisen. Weil nun die „Pendelungen", besser wohl „konische Rotationen" stets auf der einen Seite der jeweiligen Bahntangente verlaufen, so muß für die Translation des Geschoßschwerpunktes offenbar eine seitliche Komponente erzeugt werden, d. h. es muß im betrachteten Falle, wenn die Luftwiderstandsresultante vor dem Schwerpunkt angreift und Rechtsdrall vorhanden ist, Rechtsabweichung stattfinden. Man könnte daran denken, jetzt schon die Größe dieser seitlichen Komponente auf Grund der vereinfachten Theorie zu bestimmen, aber man wird sich von vornherein sagen müssen, daß man wegen der Vernachlässigungen dann nicht entfernt erwarten darf, die Seitenabweichung zahlenmäßig auch nur einigermaßen darzustellen. Bemerkenswert ist, daß in dem vereinfachten Problem die von der Form der Geschoßspitze abhängigen Koeffizienten $a_i$ der Entwicklung von $w$ ganz in Fortfall gekommen sind. Unter den vereinfachenden Voraussetzungen ist also die Spitzenform für die Pendelung und Seitenabweichung völlig belanglos. Man darf hieraus schon schließen, daß sie auch beim strengen Problem keine sehr erhebliche Rolle spielen wird; das wird sich später in der Tat herausstellen. Damit fällt ein Teil des Interesses, das man bisher mit Rücksicht auf konische Pendelung der Spitzenform und den verschiedenen Luftwiderstandsgesetzen z. B. von Newton, Lößl, Duchemin, Kirchhoff u. a. entgegenbringen zu müssen glaubte. Weiterhin folgt, daß unter denselben vereinfachenden Voraussetzungen, wenn $\gamma$ oder was auf dasselbe hinausläuft, die Geschoßdrehung konstant ist, nicht nur die durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit, sondern auch die Amplitude der Pendelungen konstant bleiben müßte. Dies deckt sich nun nicht mit den Beobachtungen; vielmehr spricht alles dafür, daß die Amplituden gegen das Ende der Geschoßbahn zunehmen, wenn

1) Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um $M$ ist augenscheinlich doppelt so groß als die bezüglich $T$.

auch sicher nicht so rapid wie Prof. Cranz annimmt: von 9′ am Anfang bis 41° am Ende der Bahn beim Geschütz C/73.

Ehe auf diese Frage näher eingegangen wird, soll die strenge Gleichung (62) weiter untersucht werden.

Mit Hilfe des binomischen Satzes, dessen Anwendung zweifellos erlaubt ist, wenn auch die Konvergenz langsam ausfällt, erhält man aus (62):

$$\text{(66)}\qquad k\frac{d\omega}{d\alpha} = 1 + \frac{1}{2k^2}\alpha^2[b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \cdots] + \frac{3}{8}\frac{\alpha^4}{k^4}[b_0^2 + 2b_0b_1\alpha + (2b_0b_2 + b_1^2)\alpha^2 + \cdots] + \frac{5}{16}\frac{\alpha^6}{k^6}[b_0^3 + \cdots],$$

wobei gesetzt ist

$$\text{(66a)}\qquad \begin{cases} b_0 = 1 + \frac{1}{2}k^2 \quad b_1 = -\frac{2}{3}\frac{k^2a_1}{C} \quad b_2 = -\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{48}k^2 + \frac{1}{2}\frac{k^2a_2}{C}\right) \\ b_3 = -\frac{2k^2}{C}\left(\frac{12a_3 - 11a_1}{60}\right) \quad b_4 = \frac{2}{45} + \frac{1}{720}k^2 - \frac{2k^2}{C}\left(\frac{12a_4 - 11a_2}{72}\right). \end{cases}$$

Durch Integration folgt aus (66)

$$k\omega = \alpha + \frac{1}{2}\frac{\alpha^3}{k^2}\left\{\frac{b_0}{3} + \frac{b_1}{4}\alpha + \left(\frac{b_2}{5} + \frac{3}{20k^2}b_0^2\right)\alpha^2 + \cdots\right\};$$

wenn man hier auf der rechten Seite $b_0 = 1$, $b_1 = b_2 = \cdots = 0$ setzt, so geht, wie es sein muß, diese Seite über in

$$\int\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{k^2}}} = k\cdot\arcsin\left(\frac{\alpha}{k}\right);$$

damit wird:

$$\text{(66b)}\qquad \omega = \arcsin x + \varepsilon,$$

wobei

$$x = \frac{\alpha}{k}$$

und

$$\text{(66c)}\qquad \varepsilon = \frac{k^2}{12}x^3(h_0 + h_1x + h_2x^2 + \cdots).$$

In (66c) bedeuten, wie man sich leicht überzeugt, unter Berücksichtigung von (66a):

$$\text{(67)}\qquad \begin{cases} h_0 = 1 \quad h_1 = -\frac{12k}{C}a_1 \quad h_2 = -\frac{1}{40}(13 + 5k^2 + 24k^2a_2) \\ h_3 = -\frac{k}{15C}(6k^2a_3 + 15a_1 + 2k^2a_1) \\ h_4 = \cdots \end{cases}$$

Setzt man jetzt

$$\arcsin x = z \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{k^2}{12} f(z),$$

so daß

$$f(z) = \sin^3\omega\,(h_0 + h_1 \sin\omega + h_2 \sin^2\omega + \cdots),$$

dann wird (66b) zu

$$\omega = z + \frac{k^2}{12} f(z).$$

Da $\frac{k^2}{12}$ sehr klein ist, kann man hierauf die bekannte Umkehrungs-Formel von Lagrange anwenden, womit man findet

$$z = \omega + \frac{k^2}{12} f(\omega) + \frac{k^4}{2 \cdot 12^2} \frac{d[f(\omega)]^2}{d\omega} + \frac{k^6}{2 \cdot 3 \cdot 12^3} \frac{d^2[f(\omega)]^3}{d\omega^2} + \cdots$$

oder

$$z = \omega + \frac{k^2}{12} \sin^3\omega\,(1 + h_1 \sin\omega + h_2 \sin^2\omega + \cdots)$$

$$+ \frac{k^4}{2 \cdot 12^2} \sin^5\omega \cos\omega\,[6 + 7 \cdot 2 \cdot h_1 \sin\omega + 8(h_1^2 + 2h_2)\sin^2\omega + \cdots] + \cdots$$

Dafür kann man schreiben

$$z = \omega\left\{1 + \frac{k^2}{12}\frac{\sin^3\omega}{\omega}\left[1 + h_1 \sin\omega + \cdots + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{12} \sin^2\omega \cos\omega\,(6 + 7 \cdot 2 \cdot h_1 \sin\omega + \cdots) + \cdots\right]\right\}.$$

Hieraus erhält man, wenn man bedenkt, daß

$$\frac{\sin^3\omega}{\omega} = \sin^2\omega\left[1 - \frac{1}{2 \cdot 3}\sin^2\omega - \left(\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2}\right)\sin^4\omega - \cdots\right]$$

und indem man setzt

$$(68)\quad n = 1 + \frac{k^2}{12}\sin^2\omega\left\{1 + h_1 \sin\omega + \cdots + \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{12}\sin^2\omega\cos\omega\,(6 + 7 \cdot 2 \cdot h_1 \sin\omega + \cdots) + \cdots\right\} \cdot \left[1 - \frac{1}{2 \cdot 3}\sin^2\omega - \left(\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2}\right)\sin^4\omega - \cdots\right],$$

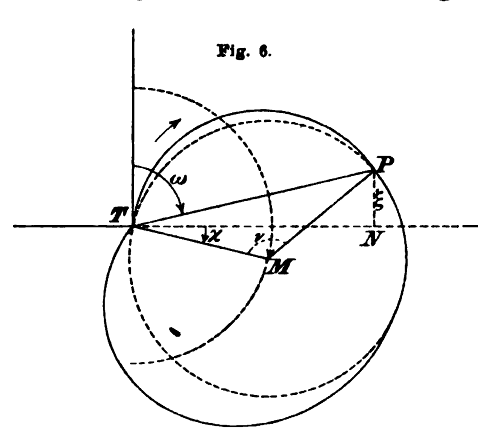
$$(69)\quad \begin{cases} z = \arcsin x = n\omega \\ \frac{\alpha}{k} = \sin n\omega \\ \alpha = k \cdot \sin n\omega = \frac{2\sqrt{C}}{\gamma}\sin n\omega, \end{cases}$$

wobei man sich zu erinnern hat, daß $\sqrt{C}$ bezw. $k$ stets positiv ist und daß für $n\omega \gtrless \pi$ $\sin n\omega$ negativ wird, also ein zweiter Umlauf der Geschoßspitze beginnt.

Wie aus dem Ausdruck (68) für $n$ hervorgeht, ist dieses eine periodische Funktion von $\omega$, die bei jeder konischen Pendelung zwischen dem Wert 1 (für $\omega = 0$) und einem um ein geringes größeren Werte hin und herschwankt. Die Amplitude dieser Schwankungen hängt im

wesentlichen von $k^2$ ab; von geringerem Einfluß sind die in den Koeffizienten $h_1$ enthaltenen Koeffizienten $a_1$ der ursprünglichen Entwicklung von $w$, die $f(v)$ enthalten und damit tatsächlich langsam veränderlich sind. Es ist also strenggenommen $n$ eine ungemein verwickelte Funktion.

Trotzdem ist die durch (69) dargestellte Kurve entfernt nicht so verwickelt, als daß man sich nicht eine übersichtliche geometrische Darstellung schaffen könnte. Es liegt nämlich eine Hypotrochoide[1]) vor.




$TP = \alpha,\quad MP = \varrho,\quad PN = \xi,$
$TN = \eta,\quad \sphericalangle\, MTP = \frac{\pi}{2} + \chi - \omega.$

Die Bewegung auf der durch $\alpha = k \cdot \sin n\omega$ $(0 < \omega < 2\pi)$ definierten Kurve läßt sich ohne weiteres in zwei Bewegungen spalten, wie aus der Figur 6 näher hervorgeht:

Die Geschoßspitze $P$ bewegt sich mit einer Winkelgeschwindigkeit $= \frac{d\nu}{dt}$ auf der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt $M$ sich mit der Winkelgeschwindigkeit

$$(70)\qquad \frac{d\chi}{dt} = (1 - n)\frac{d\omega}{dt}$$

um den Koordinatenanfang $T$ (Spur der Flugbahntangente auf der Kugelfläche vom Radius 1) dreht. Die Radien beider Kreise sind einander gleich und gleich $\varrho$.

Die Figur ist für konstantes $n < 1$ gezeichnet.[2]) Aus der Betrachtung des gleichschenkligen Dreiecks $PMT$ folgt

$$\frac{\nu}{2} + \frac{\pi}{2} + \chi - \omega = \frac{\pi}{2},$$

wenn für $\omega = 0$ ebenfalls $\chi = 0$ ist, was man ohne weiteres, wie in der Figur geschehen ist, willkürlich annehmen darf. Daraus folgt

$$\frac{\nu}{2} = \omega - \chi$$

oder

$$(71)\qquad \frac{d\nu}{dt} = 2\left(\frac{d\omega}{dt} - \frac{d\chi}{dt}\right) = 2n\frac{d\omega}{dt}$$

1) Vgl. z. B. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik II, S. 543.

2) In Wirklichkeit ist jedoch wohl meist $n > 1$, also $\frac{d\chi}{dt}$ negativ; s. unten.

und ferner:

$$\frac{\alpha}{2} : \varrho = \sin\frac{\nu}{2},$$

womit

$$(72)\quad \begin{cases} \alpha = 2\varrho \sin\frac{\nu}{2} \quad \text{und} \\ \varrho = \frac{k}{2} = +\frac{\sqrt{C}}{\gamma}. \end{cases}$$

Es sei noch einmal daran erinnert, daß, wie aus (68) und (70) hervorgeht, $n$ nicht konstant ist; vielmehr wird $\frac{d\chi}{dt}$, die Winkelgeschwindigkeit des Zentrums $M$, eine periodische Funktion von $\omega$, die zwischen Null und einem kleinen negativen Werte hin- und herschwankt. Die Amplitude dieser Schwankungen ist außerdem veränderlich. Es ist nämlich nach (68) und (70):

$$(73)\quad \begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} = -\frac{k^2}{12}\sin^2\omega \Big\{ 1 + h_1 \sin\omega + h_2 \sin^2\omega + \cdots + \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{12}\sin^2\dot{\omega}\cos\omega (6 + \cdots) \\ + \cdots \Big\} \cdot \Big[ 1 - \frac{1}{2\cdot 3}\sin^2\omega - \Big(\frac{1\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{2^2\cdot 3^2}\Big)\sin^4\omega - \cdots \Big] \cdot \frac{d\omega}{dt}\cdot \end{aligned}$$

Integriert man diesen Ausdruck zwischen 0 und $2\pi$ in bezug auf $\omega$, so erhält man den Betrag $\Delta\chi$, um welchen $\chi$ zunimmt, wenn $\omega$ von 0 bis $2\pi$ wächst, also wenn die Geschoßspitze zwei Pendelungsumläufe macht. Die Ausführung der Rechnung ergibt

$$(74)\quad \begin{aligned} \Delta\chi = -\frac{k^2\pi}{6}\Big\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\Big(\frac{1}{2^2\cdot 3^2} - \frac{1\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 5}\Big) + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\Big(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} \\ - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \frac{1}{2^3\cdot 3^3}\Big) + \cdots + h_2\Big[\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} - \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots\Big] \\ + h_4\Big[\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots\Big] + \cdots \Big\}. \end{aligned}$$

Diese Doppelreihe konvergiert allerdings etwas langsam und hat den Übelstand, daß man sehr vieler Koeffizienten $h_i$ (vgl. Formel (67)) benötigt, die recht umständlich aus (64) und (62) zu berechnen wären. Man müßte eine überaus große Zahl von Gliedern berechnen und erhielte doch kein scharfes Resultat, weil die in den $h_i$ befindlichen $a_i$ nicht genau genug bekannt sind. Bricht man daher mit $h_2$ die Reihe ab, so kann man nur eine ziemlich rohe Annäherung erwarten, nämlich

$$(74\text{a})\quad \Delta\chi = -\frac{k^2\pi}{6}(0{,}33 - 0{,}04k^2 - 0{,}19\,a_2k^2),$$

wobei nach (33) und (34)

$$a_2 = -0{,}017 f(v) = -c\cdot f(v).$$

Berechnet man mit Hilfe von (31) $f(v)$ für $v = 200$ und 300 m/sec, so hat man unter Berücksichtigung von (72), wenn $c$ den Koeffizienten von $f(v)$ im Ausdruck von $a_2$ bedeutet, in roher Annäherung

$$(74\text{b})\quad \begin{aligned} &\text{für } v = 300\,\text{m/sec}\quad \varDelta\chi = -\varrho^2(0{,}69 - 0{,}34\varrho^2 + 888c\varrho^2) \\ &\text{für } v = 200\,\text{m/sec}\quad \varDelta\chi = -\varrho^2(0{,}69 - 0{,}34\varrho^2 + 2520c\varrho^2), \end{aligned}$$

wobei $c$ etwa gleich $+0{,}017$ zu setzen wäre, wenn das im Abschnitt 1 angenommene Gesetz zutrifft.

Es führt somit auch die gegenwärtige Theorie auf eine Präzessions- und Nutationsbewegung. Die Bewegung der Geschoßspitze um $M$ ist die „Nutation", die weit langsamere und in *entgegengesetzter* Richtung stattfindende Rotation von $M$ um den Koordinatenanfang oder die Bahntangente ist die „Präzession". Die Amplituden $\varrho$ beider sind gleich.[1]) Während die Nutation annähernd ganz unabhängig von der Form der Geschoßspitze ist, indem nur die periodischen Schwankungen der Rotationsgeschwindigkeit während eines einzelnen Umlaufes indirekt von allerdings verschwindendem Einfluß sein können, hängt die Winkelgeschwindigkeit der Präzession in erster Linie von der Amplitude $\varrho$ der Präzession und Nutation ab, dann aber auch von der Form der Geschoßspitze, weil im Ausdruck von $\frac{d\chi}{dt}$ bezw. $\varDelta\chi$ die Koeffizienten $a_1, a_2 \ldots$ auftreten, die wesentlich von der Spitzenform bedingt sind. Die sehr geringe Winkelgeschwindigkeit der Präzession hat außerdem noch, wie bereits erwähnt, eine kurze Periode, indem sie während jeder Doppelnutation einmal durch den Wert 0 geht. Da ihr Durchschnittswert wesentlich von $\varrho$ abhängt, folgt ohne weiteres, daß, je größer $\varrho$, d. h. je kleiner $\gamma$ und damit die Geschoßdrehung ist, desto größer und unregelmäßiger die Pendelungen werden müssen.[2]) Je größer $\varrho$ ist, desto schneller verläuft die Präzession, während die Geschwindigkeit der Nutation fast unabhängig von $\varrho$ ist. Die Hauptrolle spielt die Konstante $C$ der Integration (58), die nach (59) vom Anfangsstoß abhängt. Da man diesen nicht kennt, ist eine numerische Bestimmung der Geschoßpendelung aus den bisherigen Daten überhaupt unmöglich, und aus diesem Grunde kann ich auch die zahlenmäßigen Ergebnisse in den mehrfach angeführten Untersuchungen des Herrn Professor Cranz nicht als genügend begründet ansehen.

---

1) Ob man $\varrho$ oder $2\varrho$ als Amplitude betrachten will, ist Sache der Festsetzung.

2) Es wird dies durch die Beobachtungen an den Versuchsmodellen bestätigt.

## 5. Abschnitt.

### Zusammenhang von konischer Pendelung und Seitenabweichung.

Um die Dauer einer Nutation zu bestimmen, kann man offenbar die Präzession vernachlässigen.[1]) Wenn man sich erinnert, daß die Geschoßspitze zwei Nutationen ausführt, während $\omega$ von 0 bis $2\pi$ zunimmt, so folgt aus den Gleichungen

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\gamma}{1 + \cos\alpha} \quad \text{und} \quad \alpha = 2\varrho \sin\omega \quad (\text{vgl. } (72))$$

ohne weiteres die Dauer $T$ einer Nutation oder, wie man in Rücksicht auf die verhältnismäßige Langsamkeit der Präzession zu sagen berechtigt ist, einer „Geschoßpendelung schlechthin“:

$$\tfrac{1}{2} T = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos(2\varrho \sin\omega)]\, d\omega,$$

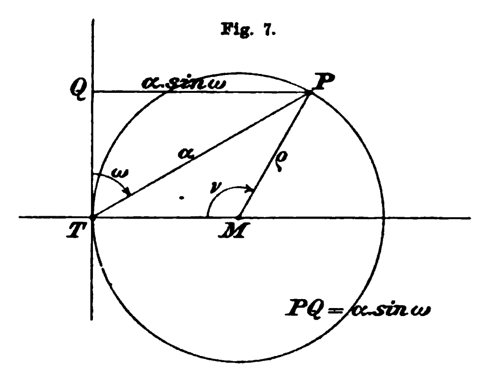
oder wenn man

$$(75) \quad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos(2\varrho \sin\omega)]\, d\omega = \frac{\pi}{2}\left[2 - \frac{(2\varrho)^2}{2!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(2\varrho)^4}{4!} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \cdots\right]$$

setzt

$$(76) \qquad T = \frac{2}{\gamma} J_1.$$

Nimmt man weiterhin einen Augenblick an, es fände gar keine Präzession statt, d. h. es wäre $\frac{d\chi}{dt} = 0$, so befände man sich im Falle der vereinfachenden oben bereits gemachten Annahme, wonach die Nutationen andauernd ganz auf der rechten Seite der Bahntangente vor sich gingen. Es ist ebenfalls bereits darauf hingewiesen worden, daß durch die Asymmetrie der Lage der Nutationskreise zur Bahntangente eine seitliche Beschleunigungskomponente erzeugt werden muß, welche die Bewegung des Geschoßschwerpunktes beeinflußt. Die Komponente ist offenbar eine periodische Funktion der Periode $\omega$ und




1) Die strenge Formel ist (71); indes spielt es hier offenbar keine Rolle, wenn man $n = 1$ nimmt.

zwar muß sie, wie eine einfache geometrische Überlegung zeigt, im wesentlichen von der Größe $PQ = \alpha \sin \omega$ abhängen. (Fig. 7).

Da nun die Periode dieses Ausdrucks sehr kurz ist, wird die Wirkung annähernd dieselbe, wie wenn die Geschoßspitze in der Horizontalebene dauernd um einen Winkel $u$ nach rechts gedreht wäre, der gleich dem Mittelwert von $\alpha \cdot \sin \omega$ ist. Wenn man $\alpha \cdot \sin \omega = f(t)$ setzt, so ist jener Mittelwert

$$u = \frac{1}{\frac{1}{2}T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt.$$

Führt man nun zur Bequemlichkeit $\omega$ statt $t$ als Variable ein, so ist

$$u = \frac{2}{T}\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\gamma}\,\varrho \sin^2\omega\,[1 + \cos(2\varrho \sin\omega)]\,d\omega$$

$$= \frac{4\varrho}{\gamma T}\int_0^{\pi/2} \sin^2\omega\,[1 + \cos(2\varrho\sin\omega)]\,d\omega.$$

Nennt man das hier auftretende bestimmte Integral $J_2$, so findet man leicht

$$(77)\qquad \begin{cases} J_2 = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{(2\varrho)^2}{2!}\,\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{(2\varrho)^4}{4!}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} - \cdots\right] \\ u = 2\varrho\,\frac{J_2}{J_1} = \varrho\left(1 - \frac{\varrho^2}{4} - \frac{\varrho^4}{24} - \cdots\right). \end{cases}$$

Nun ist ohne weiteres klar, daß man der Präzession Rechnung tragen kann, indem man $u$ noch mit $\cos\chi$ multipliziert. Denn wie aus der Figur 6 hervorgeht, muß die seitliche Komponente abnehmen, wenn $\chi$ zunimmt; sie wird $= 0$, wenn $\chi$ den Wert $\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$ erreicht und wechselt ihr Zeichen, wenn $\chi > \frac{\pi}{2}$ wird. Da nun bei unseren heutigen Geschützen der Fall, daß anfangs zwar Rechtsabweichung, dann aber im späteren Verlauf Linksabweichung stattfände, nicht eintritt, so darf man von vornherein vermuten, daß während der gesamten beobachteten Flugzeit die Präzession noch nicht eine Viertelsdrehung ausmacht. Nach der hier entwickelten Theorie ist dies aber auch deshalb wahrscheinlich, weil in den Gleichungen (74) u. ff. der Faktor $k^2$ sehr klein sein dürfte.

Man hat also den vollständigen Ausdruck

$$(78)\qquad u = 2\varrho\,\frac{J_2}{J_1}\cos\chi = \varrho\cdot\cos\chi\left(1 - \frac{\varrho^2}{4} - \frac{\varrho^4}{24} - \cdots\right).$$

Da ferner nach den bisherigen Voraussetzungen $\varrho$ konstant sein müßte und $\varrho^2$ sowohl als $c$ in (74b) kleine Größen sind, kann die

Veränderlichkeit von $f(v)$ in $a_2$ keine sehr große Rolle spielen. Man darf daher in erster Annäherung den Koeffizienten von $\varrho_2$ im Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit der Präzession und unter der vorläufigen Voraussetzung, daß $\varrho$ konstant sei, auch jene Winkelgeschwindigkeit selbst als konstant ansehen.

Nach der Formel (32) ist die seitliche Beschleunigung des Ogivalspitzengeschosses

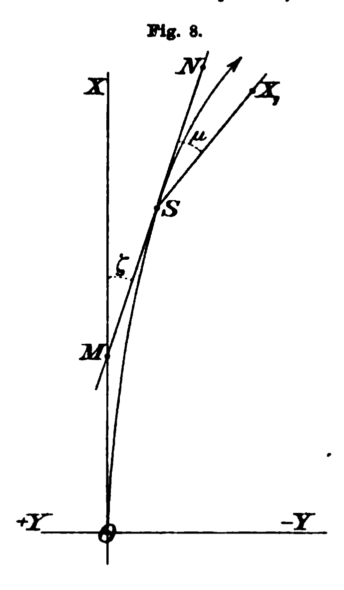
$$W_S = \frac{g}{p}\, r^2 (24{,}2 \sin^2 u + 6{,}6 \sin^3 u - 5{,}1 \sin^5 u) \cdot f(v),$$

was man auch schreiben kann

$$(79)\qquad \begin{cases} W_S = \frac{g}{p}\, r^2 \pi A_0 \cdot \Phi(u) \cdot f(v), \\ \text{mit } \Phi(u) = \sin^2 u\,(1 + A_1 \sin u + A_2 \sin^2 u), \\ A_0 = 7{,}7, \quad A_1 = 0{,}273, \quad A_2 = -0{,}210. \end{cases}$$

Bezieht man nun die Bewegung des Geschoßschwerpunkts auf das im Abschnitt 2 vor Formel (35) erwähnte feste Koordinatensystem, so ist klar, daß die auf die horizontale $xy$-Ebene projizierte Geschoßbahn unter dem Einfluß obiger seitlicher Beschleunigung eine in bezug auf den Schützen nach rechts gekrümmte Kurve sein muß (s. Figur 8). Der Winkel, den die Tangente dieser Kurve mit der $Ox$-Achse bildet, ist augenscheinlich der bereits in (45) aufgetretene Winkel $\zeta$, da $MN$ die Projektion der Bahntangente ist. Es sei ferner $SX_1$ die Projektion der Geschoßachse, von der wie oben vereinfachend angenommen wird, daß sie keine Nutationspendelung ausführt, sondern an deren Stelle um den Mittelwert $u$ nach rechts verdreht ist. Da $W_S$ senkrecht zu $SX_1$ wirkt, wirkt senkrecht zu $MN$ (Bahntangente) eine Komponente gleich $W_S \cos u$, parallel zu $MN$ eine Komponente gleich $W_S \sin u$. Letztere addiert sich zu der gewöhnlichen Frontalkomponente, welche die Geschoßbewegung beeinflußt, ist also in den empirischen Widerstandsausdrücken des ballistischen Problems (vgl. (31)) bereits enthalten. Die Komponente $W_S \cos u$ läßt sich nun wieder nach den festen Koordinatenachsen zerlegen. Parallel zur $OX$-Achse gibt dies eine Komponente gleich $W_S \cos u \sin \zeta$; von ihr gilt dasselbe, was von $W_S \sin u$ gesagt ist. Dagegen beschäftigt

Fig. 8.



uns hier die Komponente parallel zur $OX$-Achse $= W_S \cos u \cos \zeta$. Wenn $x$, $y$, $z$ die Koordinaten des Geschoßschwerpunkts sind, so ist offenbar

$$(80)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = - W_S \cos u \cos \zeta = - \frac{g}{p} r^2 \pi A_0\, \Phi(u) \cdot f(v) \cos u \cdot \cos \zeta.$$

Nun ist nach einer allbekannten Formel der Ballistik

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{g}{p} r^2 \pi \cdot f(v) \cdot \cos \omega,$$

wo $f(v)$ ebenfalls die in (31) angebene Bedeutung $= 0{,}0140\, v^2$ usw. hat, und $\omega$ der Winkel ist, den die Bahntangente mit der Horizontalebene bildet. Es nehmen aber die üblichen Formeln auf die seitliche Krümmung der Flugbahn keine Rücksicht. Wie die Figur 8 zeigt, läßt sie sich berücksichtigen, indem man die rechte Seite der letzten Gleichung noch mit $\cos \zeta$ multipliziert. Es ist also vollständig

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{g}{p} r^2 \pi \cdot \cos \omega \cdot \cos \zeta \cdot f(v).$$

Setzt man $x' = \frac{dx}{dt}$ und $y' = \frac{dy}{dt}$, so folgt aus der letzten Gleichung und aus (80), womit man die unbequeme, weil der analytischen Form nach unbekannte Funktion $f(v)$ eliminiert:

$$\cos \omega \frac{dy'}{dx'} = A_0\, \Phi(u) \cos u.$$

Hier läßt sich die rechte Seite sehr leicht in Reihen nach steigenden Potenzen der kleinen Größe $\varrho$ entwickeln; man hat

$$(81)\quad \begin{aligned} B \equiv \cos \omega \frac{dy'}{dx'} = A_0 \varrho^2 \cos^2 \chi \{ & 1 + A_1 \varrho \cos \chi (1 - \tfrac{1}{4} \varrho^2) \\ & - \tfrac{5}{6} \varrho^2 \cos^2 \chi (1 - \tfrac{1}{2} \varrho^2) + (A_2 - A_1) \varrho^3 \cos^3 \chi + \tfrac{9}{40} \varrho^4 \cos^4 \chi \\ & - \tfrac{1}{4} \varrho^2 - \tfrac{1}{48} \varrho^4 - \cdots \}, \end{aligned}$$

und diese Reihe konvergiert sehr stark.

Die Funktion $B$ läßt sich mit ausreichender Genauigkeit aus der Schußtafel für jeden Punkt der Bahn numerisch ermitteln. Man berechnet aus der vorgeschriebenen Seitenverschiebung die Seitenabweichung, wobei behufs Erzielung eines stetigen Verlaufs[1]) der Funktion graphisch zu interpolieren ist. Indem man in das erhaltene Diagramm für $x$ und $y$ die Flugzeiten nach der Schußtafel einträgt, lassen

1) Die Schußtafel enthält bekanntlich nur die sogenannte Seitenverschiebung d. h. die Winkel in $^1/_{16}{}^0$, um welche man seitwärts am Ziel vorbeirichten muß, um die Seitenabweichung auszugleichen.

sich ganz leicht die Differentialquotienten $\frac{dy}{dt} = y'$ und $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy'}{dt}$ rechnerisch und graphisch ermitteln. Endlich ist $x' = \frac{dx}{dt} = v \cdot \cos\omega$, also $\frac{dx'}{dt} = \frac{dt}{dt}(v \cdot \cos\omega)$, was ebenfalls aus der Schußtafel unschwer zu berechnen und zu interpolieren ist. Aus $\omega$, $\frac{dy'}{dt}$ und $\frac{dx'}{dt}$ findet man so schließlich $B = \cos\omega\left(\frac{dx'}{dt} : \frac{dy'}{dt}\right)$.

Aus der Schußtafel des Feldgeschützes C/73 (Granate) ist auf diese Weise folgende kleine Tabelle ermittelt worden.

Tabelle nach der Schußtafel C/73:

| $t$ = Flugzeit in Sekunden | $v \cdot \cos\omega$ m/sec | $\frac{d}{dt} v \cdot \cos\omega$ | $y$ m | $\frac{d^2y}{dt^2}$ | $\log B + 10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 294 | ∼ | − 1,8 | ∼ | ∼ |
| 5 | 281 | − 13,0 | − 2,6 | − 0,22 | 8,2264 |
| 6 | 268 | − 11,5 | − 3,8 | − 0,24 | 8,3177 |
| 7 | 258 | − 10,5 | − 5,0 | − 0,25 | 8,3731 |
| 8 | 247 | − 9,6 | − 6,5 | − 0,26 | 8,4281 |
| 9 | 239 | − 8,7 | − 8,4 | − 0,28 | 8,5013 |
| 10 | 230 | − 8,1 | − 10,6 | − 0,29 | 8,5450 |
| 11 | 223 | − 7,5 | − 13,0 | − 0,30 | 8,5907 |
| 12 | 215 | − 7,0 | − 15,8 | − 0,31 | 8,6310 |
| 13 | 209 | − 6,5 | − 18,8 | − 0,32 | 8,6666 |
| 14 | 202 | − 6,1 | − 22,2 | − 0,32 | 8,6989 |
| 15 | 197 | − 5,9 | − 25,8 | − 0,33 | 8,7228 |
| 16 | 191 | − 5,6 | − 29,8 | − 0,33 | 8,7403 |
| 17 | 186 | − 5,5 | − 34,1 | − 0,34 | 8,7550 |
| 18 | 180 | − 5,4 | − 38,8 | − 0,35 | 8,7697 |
| 19 | 175 | − 5,4 | − 44,0 | − 0,36 | 8,7759 |
| 20 | 169 | − 5,3 | − 49,3 | − 0,36 | 8,7765 |

**Bem.:** Von einer Fortsetzung der Tabelle über $t = 20$ hinaus ist mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Daten Abstand genommen worden. Unter $t = 4$ sind die $y$ zu klein, um $\frac{d^2y}{dt^2}$ scharf genug zu geben. Das Beobachtungsmaterial erreicht überhaupt schwerlich die Genauigkeit vierstelliger Logarithmen.

Wir haben oben festgestellt, daß in Beziehung auf die Veränderlichkeit der Koeffizienten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ der Entwicklung (34) von $\varphi(\alpha)$ die Änderung von $\chi$ nur sehr langsam erfolgen müßte. Wäre nun $\varrho$ konstant, was der Fall sein müßte, wenn die Geschwindigkeit der Ge-

schoßdrehung konstant bliebe, so müßte auch $B$ annähernd konstant sein. Schon ein flüchtiger Blick zeigt, daß dies entfernt nicht zutrifft; damit bestätigt sich die bereits zu Anfang aufgestellte Vermutung, daß die Geschoßdrehung nicht konstant sein kann. Man könnte nun einwenden, daß hiemit die Berechtigung der Integration der Differentialgleichung (48) und hiermit auch das folgende hinfällig wird. Allein eine ähnliche Erwägung wie die nach Gleichung (56) angestellte zeigt, daß das Verfahren eben so wie dort zwar nicht völlig streng ist, aber sich der Wirklichkeit außerordentlich nähert d. h. es darf wiederum $\gamma$ als variabler Parameter statt als Funktion der unabhängigen Variabeln behandelt werden.

Was nun die Abnahme der Geschwindigkeit anlangt, so dürfte es eine ganz glaubhafte Annahme sein, daß die Rauhigkeiten der Geschoßoberfläche nach Art eines Schaufelrades arbeiten, d. h. daß man die üblichen Luftwiderstandsgesetze auf einen Punkt des Geschoßmantels anwenden darf. Dieser Vorgang ist etwas anderes, als die Luftreibung an einer ganz glatten Oberfläche, deren Wirkung in der Tat gleich Null sein müßte.

Wenn $v_0$ die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses, $\delta$ der Drallwinkel ist, so ist für $t = 0$ die lineare Geschwindigkeit eines Punktes des Zylindermantels des Geschosses $= v_0 \operatorname{tg} \delta$. Bezeichnet man die Winkelgeschwindigkeit der Drehung mit $r$, das halbe Kaliber mit $R$, so ist die Winkelgeschwindigkeit der Drehung für $t = 0$:

$$(82) \qquad r_0 = \frac{v_0 \operatorname{tg} \delta}{R}.$$

Es erscheint nun gerechtfertigt anzunehmen, daß die Beschleunigung (Verzögerung) der linearen Geschwindigkeit eines Punktes der Geschoßoberfläche proportional dem Quadrat eben dieser Geschwindigkeit und nahezu unabhängig von der Fortbewegungsgeschwindigkeit des Geschosses ist; wenigstens würde der Vergleich der Wirkung der Rauhigkeiten mit der eines Schaufelrades hierzu führen und jedenfalls lohnt es, diese Hypothese[1]) zu prüfen. Die betrachtete lineare Geschwindigkeit gehört zu den kleinen, denn es ist z. B. für C/73 $v_0 \operatorname{tg} \delta = 442 \cdot \operatorname{tg} 3^0{,}6 =$ rund 28 m/sec. Daher ist die Anwendung des Newtonschen quadratischen Gesetzes wohl berechtigt.

Die jeweilige lineare Geschwindigkeit eines Punktes des Zylindermantels ist $= Rr$, somit ist, wenn $h$ eine Konstante bezeichnet,

$$\frac{R\,dr}{dt} = -hR^2r^2 \quad \text{oder} \quad \frac{dr}{r^2} = -hR\,dt,$$

1) Mehr soll und kann die Annahme nicht sein; eine Prüfung weiterer Hypothesen, z. B. $\frac{dr}{dt} = h_0 + h_1 r + h_2 r^2$ hätte indes keine besondere Schwierigkeit.

woraus durch Integration folgt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + hRt.$$

Somit hat man

(83) $$r = \frac{r_0}{1+\varepsilon t}, \quad \text{wo} \quad \varepsilon = hRr_0.$$

Nennt man $i$ den bisher, z. B. in (43), mit $\frac{C}{A}$ bezeichneten Quotienten aus dem Trägheitsmoment um die Rotationsachse und dem Trägheitsmoment um die Querachse (d. h. eine durch den Schwerpunkt senkrecht zur Rotationsachse gehende Achse), so daß nach (43) $\gamma = ir$ ist, so ist offenbar auch

(84) $$\gamma = \frac{\gamma_0}{1+\varepsilon t},$$

und weil

$$\varrho = \frac{\sqrt{C}}{\gamma},$$

(85) $$\varrho = \varrho_0(1+\varepsilon t), \quad \varrho_0 = \frac{\sqrt{C}}{\gamma_0}.$$

Nun gibt (74b) den Betrag, um den $\chi$ während der Dauer von zwei Nutationen zunimmt; es ist also der Mittelwert von $\frac{d\chi}{dt}$, den man ganz analog wie $u$ — vgl. Formel (77) — unbedenklich verwenden darf

(86) $$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\varrho^2}{2T}(0{,}69 - \cdots + l\varrho^2),$$

wobei $l$ Werte zwischen 43 und 15 hat, wenn die Fortrückungsgeschwindigkeit zwischen 300 und 200 m/sec. liegt.

Da nun, wie später außerdem nachgewiesen wird, anzunehmen ist, daß $\varrho$ sehr klein ist, begeht man keinen großen Fehler, wenn man in (86) die Klammer $K = 0{,}69 - \cdots + l\varrho^2$ als Konstante ansieht, deren Wert nach oberflächlicher Schätzung ungefähr zwischen 0,7 und 1,5 liegen dürfte.

Nach (76) ist mit Hilfe von (84) die Dauer einer Nutation

(87) $$T = \frac{\pi}{\gamma_0}(2 - \varrho^2 - \cdots)(1+\varepsilon t).$$

Vernachlässigt man auch hier $\varrho^2$ in der Klammer, so wird

(88) $$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\gamma_0 \varrho_0^2 K(1+\varepsilon t)^2}{4\pi(1+\varepsilon t)} = -\frac{K\gamma_0\varrho_0^2}{4\pi}(1+\varepsilon t),$$

und indem man integriert und wie oben[1]) festsetzt, daß für $t = 0$, $\chi = 0$ sein soll,

(89) $$\chi = -\frac{K\gamma_0\varrho_0^2}{4\pi}\left(t + \tfrac{1}{2}\varepsilon t^2\right).$$

1) Siehe Fig. 6.

Aus (81) folgt weiterhin als eine der wichtigsten Formeln für das ganze Problem:

$$(90)\qquad \sqrt{B} = \varrho_0 \sqrt{A_0} \cos\chi \cdot (1 + \varepsilon t)\left\{1 - \tfrac{19}{48}\varrho^2 + \tfrac{1}{2}A_1 \varrho \cos\chi - \frac{13 + 8A_1^2}{48}\varrho^2 \cos 2\chi + \cdots\right\}.$$

## 6. Abschnitt.

### Bestimmung der Konstanten des Problems. Numerische Ergebnisse.

Der Wert der Klammer { } in der Gleichung (90) ist wenig verschieden von 1; man begeht daher keinen großen Fehler, wenn man ihn vorläufig = 1 setzt. Es ist dann zu untersuchen, ob den Zahlen der obigen Tabelle durch

$$(90a)\qquad \sqrt{B} = \varrho_0 \sqrt{A_0}(1 + \varepsilon t) \cos\chi$$

genügt wird.

Man kann dafür schreiben

$$(91)\qquad \begin{cases} \sqrt{B} = \sigma(1 + \varepsilon t) \cos\left[\lambda t\left(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon t\right)\right] \\ \lambda = -\dfrac{K\gamma_0\varrho_0^2}{4\pi}, \qquad \sigma = \varrho_0\sqrt{A_0}. \end{cases}$$

Man sucht jetzt analog wie bei einer Planetenbahnbestimmung, zunächst aus 3 Werten der Tabelle die Konstanten $\sigma$, $\varepsilon$, $\lambda$ zu bestimmen. Wenn man von den äußersten Werten der Tabelle absieht, denen im Hinblick auf die Extrapolation und Interpolation wohl größere Unsicherheiten im Vergleich zu den übrigen anhaften, so erscheinen die Werte für $t = 6, = 12, = 18$ besonders geeignet.

Bezeichnet man die zugehörigen Werte von $\sqrt{B}$ mit $f_6$, $f_{12}$, $f_{18}$ und den Ausdruck $\sigma(1 + \varepsilon t)$ für $t = 6$ mit $x$, für $t = 12$ mit $y$, so ist, wie man sich leicht überzeugt

$$\begin{aligned} &x \cdot \cos\chi_6 = f_6 \qquad &&\chi_6 = 6\lambda(1 + 3\varepsilon) \qquad \chi_{12} = 12\lambda(1 + 6\varepsilon) \\ &y \cdot \cos\chi_{12} = f_{12} &&\chi_{18} = 18\lambda(1 + 9\varepsilon) \\ &(2y - x)\cos\chi_{18} = f_{18}; \end{aligned}$$

hieraus folgt ohne weiteres

$$x = \frac{f_6}{\cos\chi_6}, \qquad y = \frac{f_{12}}{\cos\chi_{12}}$$

und

$$(92)\qquad \frac{\cos\chi_{18}}{\cos\chi_{12}} - \frac{f_6}{2 \cdot f_{12}} \cdot \frac{\cos\chi_{18}}{\cos\chi_6} = \frac{f_{18}}{2 f_{12}}.$$

Dies ist eine transzendente Gleichung für $\lambda$ (und $\varepsilon$), die man nur durch Versuche lösen kann. Wenn man zunächst das in $\chi$ enthaltene $\varepsilon$ vernachlässigt, und $\chi_6$ mit $z$ bezeichnet, so wird

(92) zu $$\frac{\cos 3z}{\cos 2z} - \frac{f_6}{2f_{12}} \cdot \frac{\cos 3z}{\cos z} = \frac{f_{18}}{2f_{12}}.$$

Die Lösung dieser Näherungsgleichung ist $z = 13^0$; damit wird mit Hilfe der Ausdrücke für $x$ und $y$

$$\lambda = 2^0{,}1 \qquad \sigma = 0{,}07 \qquad \varepsilon = 0{,}2.$$

Damit könnte man in der Tat schon die Zahlen der Tabelle einigermaßen darstellen, wobei man außerdem berücksichtigen muß, daß in der aus der Schußtafel abgeleiteten Tabelle jedenfalls die 4. Dezimale in $\sqrt{B}$ ganz unsicher ist. Es handelt sich aber vor allem darum, darzulegen, daß die Gleichung (90) oder die daraus abgeleitete vereinfachte Gleichung (90a) die Zahlen der Tabelle darstellt. Mit Hilfe des ersten Näherungswertes für $\varepsilon$ kann man die Gleichung (92) nach $\lambda$ durch Versuche auflösen. Als Kontrolle ergibt sich, daß man durch die Gleichungen für $x$ und $y$ schließlich $\varepsilon$ übereinstimmend mit dem Ausgangswert $\varepsilon$ finden muß. Auf diese Weise ergibt sich endlich, daß die Werte

(93) $$\begin{cases} \sigma = 0{,}0735 \\ \lambda = 0^0{,}7380 = 0^0\,44'\,17'' \\ \varepsilon = 0{,}1625 \end{cases}$$

nebst der Gleichung (90a) den Werten der Tabelle für $t = 6$, $t = 12$, $t = 18$ genügen. Die Darstellung der übrigen Werte dieser Tabelle zeigt die nachstehende Zusammenstellung.

| Flugzeit $t =$ | $\sqrt{B}$ aus der Schußtafel | $\sqrt{B}$ berechnet | Differenz | Flugzeit $t =$ | $\sqrt{B}$ aus der Schußtafel | $\sqrt{B}$ berechnet | Differenz |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,130 | 0,133 | − 3 | 13 | 0,215 | 0,217 | − 2 |
| 6 | 0,144 | 0,144 | ± 0 | 14 | 0,224 | 0,224 | ± 0 |
| 7 | 0,154 | 0,155 | − 1 | 15 | 0,230 | 0,230 | ± 0 |
| 8 | 0,164 | 0,167 | − 3 | 16 | 0,235 | 0,235 | ± 0 |
| 9 | 0,178 | 0,177 | + 1 | 17 | 0,239 | 0,240 | − 1 |
| 10 | 0,187 | 0,187 | ± 0 | 18 | 0,243 | 0,243 | ± 0 |
| 11 | 0,197 | 0,198 | − 1 | 19 | 0,244 | 0,244 | ± 0 |
| 12 | 0,207 | 0,207 | ± 0 | 20 | 0,244 | 0,243 | + 1 |

In Anbetracht des ziemlich verwickelten Verlaufes der Funktion $\sqrt{B}$ wird man die erhaltene Übereinstimmung als recht befriedigend bezeichnen dürfen.

Nun könnte man daran denken, nach der Methode der kleinsten Quadrate, beziehungsweise durch Aufstellung von Korrektionsgleichungen eine schärfere Übereinstimmung mit sämtlichen auf 4 Dezimalen angesetzten Tabellenwerten herbeizuführen. Dabei würde es sich empfehlen, auf die vollständige Gleichung (90) zurückzugehen. Es würde genügen, wenn man die Koeffizienten innerhalb der Klammer als konstant ansetzte d. h. mit der wohl erlaubten Vernachlässigung von $\varrho^4$ schriebe:

$$(94)\qquad \sqrt{B} = \sigma \cdot \cos\chi \cdot (1 + \varepsilon t)\,\{0{,}99972 - 0{,}000045\,t^2 + 0{,}00362\,(1 + \varepsilon t)\cot\chi - 0{,}00019\,(1 + \varepsilon t)^2 \cos 2\chi\}$$

$$\chi = \lambda t\,(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon t)$$

und $\lambda$, $\varepsilon$, $\sigma$ hieraus so bestimmte, daß sie sich den Tabellenwerten genau anschließen. Ich glaubte, auf die Ausführung der etwas umständlichen Rechnung verzichten zu sollen, um so mehr, als die Daten der Schußtafel hierzu nicht genau genug[1]) sein dürften.

Ehe genauere Unterlagen zur Verfügung stehen, sollen deshalb die weiteren zahlenmäßigen Folgerungen aus (93) gezogen werden.

Aus (91) folgt

$$\varrho_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{A_0}}$$

und da $A_0$ nach (79) gleich 7,7 ist, wird auf Grund dieses Wertes, der natürlich alles weitere beeinflußt:

$$\varrho_0 = 0{,}02649 = 1^0{,}518,$$

d. h. die Anfangsamplitude der Nutation beträgt $1^0\ 31'$. Über die Zuverlässigkeit dieses Wertes ist allerdings schwer zu urteilen, da sie wesentlich von der Genauigkeit des Koeffizienten $A_0$ abhängt. Aus (85) folgt nun, daß z. B. nach 20 Sekunden Flugzeit die Amplitude den Wert

$$\varrho_{20} = 6^0{,}450$$

annimmt. Diese Werte sind wesentlich andere, als die von Herrn Professor Cranz ermittelten und wie ich glaube an und für sich wahrscheinlicher.

1) Ganz abgesehen von den etwas rohen Angaben über Seitenverschiebung, sind ja auch die Werte für $v$ und $\cos\omega$ mehr oder minder Interpolationsprodukte.

Die Winkelgeschwindigkeit der Geschoßdrehung ist für $t = 0$ nach (82) $r_0 = 632$, d. h. das Geschoß macht $\frac{r_0}{2\pi}$ = rund 100 Umdrehungen in der Sekunde. Nach 20 Sekunden Flugzeit dagegen macht es[1]) nur noch $\frac{r_0}{2\pi(1 + 20 \cdot 0{,}1625)} = 23^1/_2$ Umdrehungen in der Sekunde. Ganz ähnlich verhält es sich mit der Geschwindigkeit der Pendelungen (Nutationen). Nach der unmittelbar vor (84) stehenden Beziehung ist $\gamma = ir$. Da $i$ annähernd $= 0{,}24$ ist, folgt hieraus

$$\gamma_0 = 150.$$

Die Dauer einer Nutationspendelung wird somit nach (87) für $t = 0$ $T_0 = 0{,}042$ sec, für $t = 20$ $T_{20} = 0{,}177$ sec. Dies entspricht einer Umlaufzahl von 24 resp. 5,6.

Was die „Präzession" anlangt, so hat die Heranziehung der Schußtafel die oben aufgestellte Behauptung, daß innerhalb der erreichbaren Schußweiten entfernt keine volle Umdrehung stattfindet, durchaus bestätigt. Es wächst von $t = 0$ bis $t = 20$ sec der Winkel $\chi$ von 0 bis $-38^0{,}75$.

Es müßte sich ferner nach (91) ergeben, daß

$$\lambda = \frac{K\gamma_0 \varrho_0^2}{4\pi}$$

ist.

Es ist oben schon bemerkt worden, daß die Reihe für $K$ — vgl. S. 399 und Formel (74) — zu langsam konvergiert, als daß man ihren Wert bequem und genau berechnen könnte. Auf Grund einer rohen Abschätzung war die Vermutung aufgestellt worden, es möchte ihr Wert von 1 nicht allzu sehr verschieden sein.

Die Einsetzung von $\gamma_0$ $\varrho_0$ $\lambda$ ergibt nun in der Tat

$$K = 1{,}53,$$

worin ich in erster Linie eine Bestätigung der entwickelten Theorie erblicke.

Endlich muß auch noch auf die erstmals in (58) auftretende Integrationskonstante eingegangen werden. Sie wird $C = (\gamma_0 \varrho_0)^2 = 15{,}8$ und damit $\sqrt{C}$ rund $= 4$; $\sqrt{C}$ aber stellt die Winkelgeschwindigkeit dar, die das Geschoß um eine Querachse infolge des „Anfangsstoßes" erhielt. Das obige Resultat würde bedeuten: der Anfangsstoß ist derart, daß er dem Geschoß eine Umdrehungsgeschwindigkeit von 0,6 Um-

1) Ob diese theoretische Vorhersage der Wirklichkeit entspricht, dürften die leider noch nicht bekannten Versuche des Prof. Dr. Neesen in nicht allzulanger Zeit entscheiden.

drehungen in der Sekunde um eine Querachse geben würde. Dieser Betrag ist durchaus wahrscheinlich.

Die Konstante $C$ hat, wie dargelegt, einschneidende Bedeutung in der ganzen Theorie; es dürfte aber ziemlich ausgeschlossen sein, sie a priori zu bestimmen, ohne die beobachteten Seitenabweichungen heranzuziehen. Damit werden wohl alle Spekulationen hinfällig, die darauf abzielen, die Größe oder Geschwindigkeiten der konischem Pendelungen unabhängig von den beobachteten Seitenabweichungen zu berechnen, solange man die Pendelungen selbst nicht genau beobachten kann.

Schließlich erübrigt noch die Frage, wie man umgekehrt die Seitenabweichungen aus $\lambda$, $\varepsilon$, $\sigma$ unmittelbar berechnen kann. Am einfachsten ist es jedenfalls, wenn man, wie hier geschehen, zunächst die Funktion $B$ berechnet, wozu die Gleichung (90) zu verwenden ist. Hiermit findet man vermöge mechanischer Quadraturen (oder graphischer Integration) die Seitenabweichungen, falls man noch nicht damit befriedigt ist, daß das aus der Pendelungstheorie errechnete $B$ mit dem aus der Schußtafel ermittelten übereinstimmt.

Die unmittelbare Integration von (80) hätte zwar für das quadratische Luftwiderstandsgesetz keine großen Schwierigkeiten, dagegen müßten für eine Integration nach Art Siaccis neue ballistische Funktionen berechnet werden.

Die genauere Ermittlung des Verlaufes der konischen Pendelung dürfte nun auch von Wert sein für die Erforschung des sogenannten Formkoeffizienten der Ballistik, der gewöhnlich mit $i$ bezeichnet wird. Vielleicht wird es mit der Zeit möglich, ihm auf diesem Wege eine analytisch begründete Form zu geben, während er bis jetzt nur ein Interpolationsfaktor ist. Es würde zu weit führen, auf diese Frage näher einzugehen. Vielmehr seien hier die Ergebnisse nochmals kurz zusammengefaßt:

Sofort nach dem Verlassen der Mündung beginnt die Geschoßspitze Kreise zu beschreiben, die anfangs ganz rechts der Bahntangente liegen. Die Umdrehungsgeschwindigkeit während der einzelnen Umdrehung ist nicht ganz konstant, sondern periodisch leicht (um 0,17 bis 3,3‰)[1]) veränderlich; sie nimmt außerdem stetig wie die Geschoßrotation ab. Der Radius des Pendelungskreises ist fast ausschließlich (insofern $\delta$ in Formel (51) zu vernachlässigen ist) vom Anfangsstoß, der Drehgeschwindigkeit und den Trägheitsmomenten des Geschosses abhängig; dieser Radius vergrößert sich im Verhältnis, wie die Pendelungsge-

1) Vgl. (53). Hier sind die Werte für $C/73$ für $t = 0$ und $t = 20$ zugrunde gelegt.

schwindigkeit abnimmt. Das sind die von Cranz und anderen nach der analogen Erscheinung bei der Bewegung der Erdachse mit Nutationen bezeichneten Umdrehungen; sie allein sind der unmittelbaren Beobachtung unter Umständen zugänglich. Der Mittelpunkt des Nutationskreises, der zu Beginn rechts in derselben Höhe mit der Bahntangente lag, beschreibt um letztere mit periodisch und stetig nach ziemlich verwickeltem Gesetze veränderlicher Geschwindigkeit eine sich erweiternde Spirale in entgegengesetzter Richtung. Diese Bewegung ist aber so langsam, daß sie auf die weitesten Schußentfernungen noch keine halbe Umdrehung beträgt. Dies ist der Grund, weshalb die Nutationen dauernd fast ganz auf der einen Seite der Bahntangente verlaufen und weshalb man nur Abweichungen nach einer Seite hat. Es ist also nicht die Präzessionskurve „unsymmetrisch bezüglich der Bahntangente" (Prof. Cranz a. a. O.), sondern wir können eben nur einen Bruchteil eines Umlaufes von ihr beobachten. Wäre die Flugbahn länger, so würde die Präzessionskurve allmählich eine volle Umdrehung um die Bahntangente umfassen.

Die numerischen Angaben bezüglich der Granate $C/73$ können nur als Annäherungen betrachtet werden, vor allem wegen der Mißlichkeit einer genauen Bestimmung des Koeffizienten $A_0$ (hier $= 7{,}7$) und der Schwierigkeit genauer Ermittlung der Trägheitsmomente durch Rechnung.

Für $C/73$ ist der Verlauf der Erscheinung in vergrößertem Maßstabe (etwa 2 : 1) nachstehend abgebildet.

Nach dem Vorstehenden wäre es daher nicht richtig, daß die Periode der Nutationsbögen vom Anfangsstoß unabhängig ist (Cranz a. a. O.), dagegen stimme ich der dortigen Formel VI (Cranz a. a. O.) für die Amplituden der Nutationsbögen bis zu einem gewissen Grade zu, während ich allerdings die Gültigkeit der übrigen Formeln bezweifeln muß. Herr Professor Cranz wollte ja selbst die Lösung nur für den Fall gelten lassen, wo man den Winkel zwischen Bahntangente und Horizontale vernachlässigen kann. Die vorstehenden Entwickelungen dagegen sind unabhängig von dieser Beschränkung und für Flach- und Steilfeuer gleichmäßig verwendbar. Auch die Heydenreichsche Beobachtung: „bei Steigerung der Anfangsgeschwindigkeit von 180 m auf 500 m steigerte sich die Zahl der Pendelungen von 2 auf 4 bis 5", wird nach dem Vorstehenden fast ganz streng dargestellt, denn es ist nach (87) und (82)

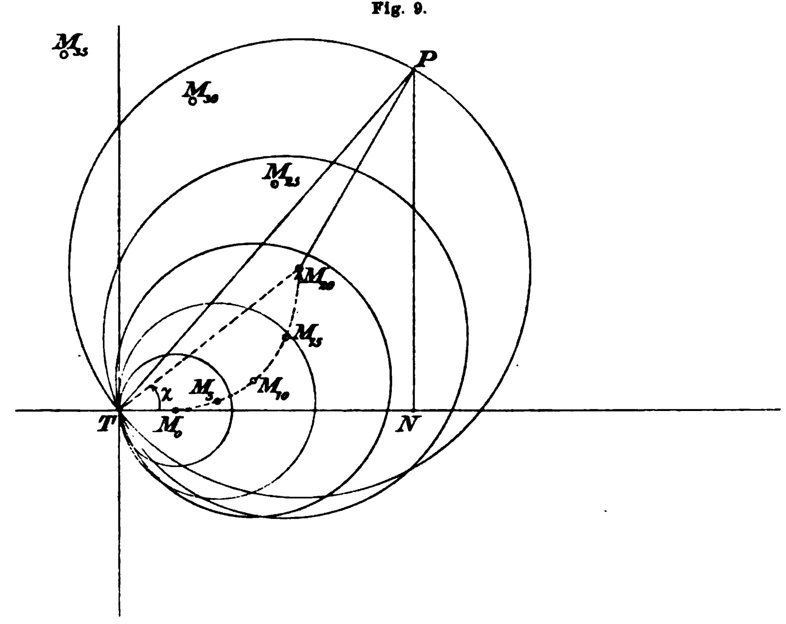
$$T = \frac{2\pi}{\gamma_0}(1 + \varepsilon t) \qquad \gamma_0 = i r_0 \qquad r_0 = \frac{v_0 \, tg\,\delta}{R}.$$

Hieraus folgt: Wenn bei $v_0 = 180\ ^{m}/\mathrm{sec}$ 2 Pendelungen stattfinden,

müssen bei $v_0 = 500$ m/sec 5,5 stattfinden, oder wenn es bei $v_0 = 500$ 4,5 sind, so finden bei $v_0 = 180$ 1,62 statt. Das liegt sicher innerhalb der Beobachtungsfehler.

Daß die Seitenabweichungen mit der Zunahme der Anfangsgeschwindigkeiten und mit der Verlängerung der Geschosse abnehmen (Beobachtung von Dähne), liegt daran, daß $\varrho$, der wesentliche Faktor für die Seitenabweichung mit wachsendem $\gamma_0$, das proportional $v_0$ ist, und mit abnehmendem $i = \frac{C}{A}$, das für längere Geschosse abnimmt, kleiner wird.

Fig. 9.




Die 5 ausgezeichneten Kreise sind die Nutationskreise für $t = 0$, $= 5$ sec, $= 10$ sec, $= 15$ sec, $= 20$ sec, die gestrichelte Kurve $M_0 M_{20}$ ist die Präzessionskurve von $t = 0$ bis $t = 20$ sec, deren weitere Fortsetzung durch die Punkte $M_{25} M_{30} M_{35}$ gegeben ist. Für den Punkt $P$ ist $TP = \alpha$, $PM_{20} = \varrho$, $\sphericalangle NTM_{20} = \chi$; für die Seitenabweichung ist $TN$ bestimmend. Da die Entfernung der Geschoßspitze vom Schwerpunkt bei $C/73$ rund 132 mm beträgt hat man für

| | | |
|---|---|---|
| $t = 0$ sec, | $\varrho = 3,5$ mm, | $\chi = 0°$, |
| $t = 5$ „ , | $\varrho = 6,8$ „ , | $\chi = 5°,2$, |
| $t = 10$ „ , | $\varrho = 9,2$ „ , | $\chi = 13°,4$, |
| $t = 15$ „ , | $\varrho = 12,0$ „ , | $\chi = 24°,6$, |
| $t = 20$ „ , | $\varrho = 14,9$ „ , | $\chi = 38°,7$. |

Es müßte demnach von etwa $t = 33$ sec an die Seitenabweichung wieder abnehmen, noch später $= 0$ und negativ werden, wenn die Flugbahn soweit reichte.[1])

1) Die letzten Zahlen der Schußtafel für 6300 bis 6500 m sind bezüglich der Seitenverschiebung wohl lediglich extrapoliert.

Daß die Seitenabweichung bei Steilfeuer unter sonst gleichen Umständen größer ist, als bei Flachfeuer, sieht man auf den ersten Blick am Auftreten von $\cos \omega$ in der Formel (81), wo $\omega$ den Winkel zwischen der Bahntangente und der Horizontalebene bedeutet.

Es erscheint erwünscht, hier noch mit einigen Worten das Lößlsche Luftwiderstandsgesetz zu berücksichtigen. Dieses nimmt an Stelle der Formel (5) an, daß

$$(95) \qquad \varphi(\omega) = \cos \omega$$

ist ($\omega$ Winkel zwischen Normale der Geschoßoberfläche und Bahntangente).

Damit wird das erste und am meisten beträchtliche Glied im Ausdruck für die seitliche Beschleunigung (28), deren umständliche Herleitung im einzelnen hier nicht mehr durchgeführt werden soll, zu

$$\frac{\pi}{2} Whr \sin \alpha, \quad \text{statt} \quad \frac{4}{3} Whr \sin^2 \alpha$$

und (32) wird

$$(96) \qquad W_S = Y = \frac{g}{p} r^2 \cdot \frac{3\pi}{8}(24{,}2 \sin \alpha + \cdots) \cdot f(v).$$

Damit wird (79)

$$W_S = \frac{g}{p} r^2 \pi A_0 \Phi(u) f(v)$$

$$\Phi(u) = \sin u (1 + \cdots)$$

$$A_0 = \frac{3\pi}{8} \cdot 7{,}7 = 9{,}05.$$

Hieraus folgt statt (81)

$$(97) \quad B \equiv \cos \omega \frac{dy'}{dx} = A_0 \varrho \cos \chi \{1 + \cdots\} = A_0 \varrho_0 (1 + \varepsilon t) \cos \chi \cdot \{1 + \cdots\},$$

und es bliebe nun zu untersuchen, ob die Schußtafelangaben sich durch die vorstehende Gleichung darstellen lassen. Ich habe diesen Versuch nicht durchgeführt, da es kaum anzunehmen ist, daß $B$, das nach (90) genähert die Form

$$\sigma_1^2 \cos^2 \chi_1 (1 + 2\varepsilon_1 t + \varepsilon_1^2 t^2)$$

hat, auch durch

$$\sigma_2 \cos \chi_2 (1 + \varepsilon_2 t)$$

darstellbar wäre. Denn wenn auch in der ersten Formel $\varepsilon_1^2$ nur $= 0{,}16\ldots^2 = 0{,}026$ ist, so wird doch $\varepsilon_1^2 t^2$ z. B. für $t = 20$ zu 12, während $2\varepsilon_1 t$ erst den Wert 6,5 hat; mithin tritt das Glied mit $t^2$ stark in die Erscheinung. Lößls Gesetz führt hier nicht zu einem Gliede mit $t^2$; ich glaube also, daß die Erscheinungen der konischen

Pendelungen mindestens nicht zu gunsten von Lößl sprechen, wenn damit allerdings auch nicht bewiesen werden kann, daß das Newtonsche Gesetz genau der Wirklichkeit entspricht. Wenn es dereinst vergönnt sein dürfte, hier einen tieferen Einblick in das Wesen der Dinge zu gewinnen, so wird der Weg vermutlich über die kinetische Theorie der Gase führen. Allerdings darf man nicht vergessen, daß gerade die Gesetze und Theorien für die Praxis fruchtbarer sind, die nur Annäherungen darstellen, aber eben deshalb, weil sie solche sind, das Wesentliche und Charakteristische der meist verwickelten Vorgänge klarer in die Erscheinung treten lassen. Die verhältnismäßig grobe Annäherung, welche die Keplerschen Gesetze für die Planetenbewegung bilden, sagt unserer Anschauung mehr, als wenn wir imstande wären, für die Integrale des Dreikörperproblems strenge geschlossene Funktionen aufzustellen. Wenn es daher erlaubt ist, Kleines mit Großem zu vergleichen, so glaube ich, es dürfte die vorstehende auf Annäherungen beruhende Theorie der konischen Pendelung für die Erkenntnis dieses verwickelten Vorgangs beinahe mehr leisten, als eine völlig strenge, mit den bisherigen Mitteln der Analysis wohl kaum zu bewältigende Integration der Differentialgleichungen für die Bewegung der Geschoßachse.

---

# Über die Bewegung eines starren Körpers durch Abschroten.

Von Friedrich Schur in Karlsruhe.

Bekanntlich kann man sich jede Bewegung eines starren Körpers dadurch entstanden denken, daß eine geradlinige Fläche, ein bewegliches Axoid, auf einer anderen geradlinigen Fläche, dem festen Axoide, zugleich abrollt und abgleitet oder, wie man nach Reuleaux zu sagen pflegt, abschrotet. Am vollständigsten ist dies Problem wohl von Antomari in dessen Thèse[1]) behandelt worden. Indessen ist die Frage in dieser umfänglichen Abhandlung, von der ich übrigens erst nachträglich Kenntnis erhielt, mit so vielen andern Fragen verquickt worden, daß eine Orientierung nicht ganz leicht ist und im besonderen die analytische Darstellung der Bewegung, die durch zwei geeignet

1) Antomari, Application de la méthode cinématique à l'étude des propriétés des surfaces réglées, Paris 1894. Wegen der sonstigen Literatur s. Encyklopädie der Math. Wiss. Bd. IV, 1, S. 283 ff. Vergl. auch die Behandlung bei Heun, Lehrbuch der Mechanik, Leipzig, Göschen, 1906, S. 249 ff.

gewählte Axoide hervorgerufen wird, nicht deutlich genug zum Ausdrucke kommt. Es dürfte daher die folgende Behandlung des Problems nicht ohne Nutzen sein und für manche Zwecke eine erwünschte Ergänzung der obigen Abhandlung bilden, zumal nichts vorausgesetzt wird als die Eigenschaften der orthogonalen Substitution.

## I.

Sind $XYZ$ die Koordinaten eines Punktes im festen Raume $xyz$ diejenigen desselben Punktes im beweglichen Körper, so ist eine Drehung desselben um den festen Anfangspunkt dargestellt durch die Formeln:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} X = xf_1 + yf_2 + zf_3, \\ Y = xg_1 + yg_2 + zg_3, \\ Z = xh_1 + yh_2 + zh_3, \end{cases} \qquad \text{(II)} \quad \begin{cases} x = Xf_1 + Yg_1 + Zh_1, \\ y = Xf_2 + Yg_2 + Zh_2, \\ z = Xf_3 + Yg_3 + Zh_3, \end{cases}$$

wo $f_1$, $g_1$, $h_1$ etc. als Funktionen einer veränderlichen Größe $t$ die bekannten Bedingungen[1]) einer orthogonalen Substitution zu erfüllen haben. Dann ergeben sich die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes $XYZ$ in der Form:

$$\text{(1)} \quad \frac{dX}{dt} = xf'_1 + yf'_2 + zf'_3 = X(f_1f'_1 + f_2f'_2 + f_3f'_3) + Y(g_1f'_1 + g_2f'_2 + g_3f'_3) + Z(h_1f'_1 + h_2f'_2 + h_3f'_3), \text{ usw.,}$$

wo durch die Striche die Differentiation nach $t$ bezeichnet werden möge. Setzt man daher:

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} P\omega = g_1h'_1 + g_2h'_2 + g_3h'_3 = -(h_1g'_1 + h_2g'_2 + h_3g'_3), \\ Q\omega = h_1f'_1 + h_2f'_2 + h_3f'_3 = -(f_1h'_1 + f_2h'_2 + f_3h'_3), \\ R\omega = f_1g'_1 + f_2g'_2 + f_3g'_3 = -(g_1f'_1 + g_2f'_2 + g_3f'_3), \end{cases}$$

$$\text{wo } \omega^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = (g_1h'_1 + g_2h'_2 + g_3h'_3)^2 + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}(f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2 + g_1'^2 + g_2'^2 + g_3'^2 + h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2),$$

so nehmen die Gleichungen (1) die Form an:

$$\text{(III)} \quad \frac{dX}{dt} = (QZ - RY)\omega, \quad \frac{dY}{dt} = (RX - PZ)\omega, \quad \frac{dZ}{dt} = (PY - QX)\omega,$$

sodaß *$PQR$ die Richtungskosinus der Momentanachse und $\omega$ die sogenannte Winkelgeschwindigkeit* bedeuten.

---

1) S. z. B. Schur, Lehrbuch der analyt. Geometrie, Leipzig, 1898, S. 144.

Durch Anwendung dieser Formeln auf die Punkte $f_1\ g_1\ h_1$ usw. ergibt sich das Formelsystem:

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} f'_1 = (Qh_1 - Rg_1)\omega, & g'_1 = (Rf_1 - Ph_1)\omega, & h'_1 = (Pg_1 - Qf_1)\omega; \\ f'_2 = (Qh_2 - Rg_2)\omega, & g'_2 = (Rf_2 - Ph_2)\omega, & h'_2 = (Pg_2 - Qf_2)\omega; \\ f'_3 = (Qh_3 - Rg_3)\omega, & g'_3 = (Rf_3 - Ph_3)\omega, & h'_3 = (Pg_3 - Qf_3)\omega. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$f_3f'_2 + g_3g'_2 + h_3h'_2 = \{P(g_2h_3 - h_2g_3) + \cdots\}\,\omega = (Pf_1 + Qg_1 + Rh_1)\omega = p\omega, \text{ usw.}$$

sodaß wir das dem System (2) analoge Formelsystem:

$$(3)\quad \begin{cases} p\omega = f_3f'_2 + g_3g'_2 + h_3h'_2 = -(f_2f'_3 + g_2g'_3 + h_2h'_3), \\ q\omega = f_1f'_3 + g_1g'_3 + h_1h'_3 = -(f_3f'_1 + g_3g'_1 + h_3h'_1), \\ r\omega = f_2f'_1 + g_2g'_1 + h_2h'_1 = -(f_1f'_2 + g_1g'_2 + h_1h'_2) \end{cases}$$

für die Richtungskosinus $pqr$ der Momentanachse im beweglichen Körper erhalten.

Ist nunmehr *die allgemeine Bewegung des starren Körpers* in der Form:

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} X = L + xf_1 + yf_2 + zf_3, \\ Y = M + xg_1 + yg_2 + zg_3, \\ Z = N + xh_1 + yh_2 + zh_3 \end{cases}$$

gegeben, und bestimmt man $x, y, z$ aus den Gleichungen:

$$(4)\qquad L' + xf'_1 + yf'_2 + zf'_3 = sP, \text{ usw.},$$

wo $s = \frac{du}{dt}$ die sogenannte *Schiebungsgeschwindigkeit* ist, so erhalten wir für die entprechenden $X, Y, Z$ im festen Systeme die Gleichungen:

$$\text{(VI)}\quad \begin{cases} sP = L' + (Q(Z - N) - R(Y - M))\omega, \\ sQ = M' + (R(X - L) - P(Z - N))\omega, \\ sR = N' + (P(Y - M) - Q(X - L))\omega. \end{cases}$$

[illegible] folgt:

$$s = PL' + QM' + RN'.$$

[illegible] Gleichungen (VI) genügt daher z. B. der Punkt $ABC$, wenn

$$A = L + \frac{1}{\omega}(QN' - RM'),\quad B = M + \frac{1}{\omega}(RL' - PN'),$$
$$C = N + \frac{1}{\omega}(PM' - QL').$$

[illegible] ist:

[illegible] $(Q(C - N) - R(B - M)) = L' + P(QM' + RN') - L'(Q^2 + R^2) =$
$$P(PL' + QM' + RN') = Ps, \text{ usw.}$$

Es sind daher alle Lösungen der Gleichungen (VI) enthalten in der Form:

$$(8) \qquad X = A + uP, \quad Y = B + uQ, \quad Z = C + uR,$$

wenn $u$ ein veränderlicher Parameter ist. Jeder Punkt der durch diese drei Gleichungen dargestellten Geraden besitzt demnach den Gleichungen (4) und (VI) zufolge eine in die Gerade selbst fallende Geschwindigkeit, diese Gerade ist folglich die sogenannte *momentane Schraubenachse* unserer Bewegung. Zugleich sieht man, daß die Gleichungen (8), wenn man darin $u$ und $t$ oder $\varphi$ als veränderlich ansieht, das *feste Axoid* oder den Ort dieser Schraubenachsen im festen Systeme darstellen.

Bedeuten nunmehr $a, b, c$; $p, q, r$ die entsprechenden Größen für den bewegten Körper, so gelten für jedes $t$ oder $\varphi$ die Gleichungen:

$$(9) \qquad P = pf_1 + qf_2 + rf_3, \text{ usw.},$$

und

$$(10) \qquad A = L + af_1 + bf_2 + cf_3, \text{ usw.}$$

Im besonderen erhalten wir die Gleichungen des *beweglichen Axoids* oder des Ortes der momentanen Schraubenachsen innerhalb des bewegten Körpers in Beziehung auf das feste System in der Form:

$$(11) \qquad X = A_1 + uP_1, \quad Y = B_1 + uQ_1, \quad Z = C_1 + uR_1,$$

wo:

$$(12) \qquad A_1 = L^0 + af_1^0 + bf_2^0 + cf_3^0, \text{ usw.}$$

und:

$$(13) \qquad P_1 = pf_1^0 + qf_2^0 + rf_3^0, \text{ usw.},$$

wenn der Index 0 einer bestimmten Lage des bewegten Körpers oder einem Werte $t = t^0$ oder $\varphi = \varphi^0$ entspricht. Dann ist natürlich: $A_1^0 = A^0$, usw. und $P_1^0 = P^0$, usw. Da ferner infolge der Gleichungen (9), (III) und (1) oder auch infolge von Gleichungen, die dem Systeme (IV) analog sind, die Gleichungen:

$$(14) \qquad pf_1' + qf_2' + rf_3' = 0, \text{ usw.}$$

bestehen, so ist:

$$(15) \qquad P' = p'f_1 + q'f_2 + r'f_3, \text{ usw.}$$

also auch: $(P')^0 \equiv (P_1')^0$, usw., d. h. *die der Schraubenachse* $(A^0 B^0 C^0;$ $P^0 Q^0 R^0)$ *auf dem festen und dem beweglichen Axoide benachbarten Geraden haben gleiche Richtung.* Weiter folgt aus:

$$(16) \qquad A' = L' + a'f_1 + b'f_2 + c'f_3 + af_1' + bf_2' + cf_3', \text{ usw.},$$

und aus den Gleichungen (4), daß:

$$(17)\qquad A' = a'f_1 + b'f_2 + c'f_3 + sP, \text{ usw.}$$

Es ist daher:

$$(18)\qquad (A')^0 = (A'_1)^0 + s^0 P^0, \text{ usw.}$$

Obwohl man hiernach eigentlich nicht sagen kann, daß die beiden benachbarten Geraden zusammenfallen, so haben die *beiden Axoide doch in allen Punkten der gemeinsamen Schraubenachse die Tangentialebene gemein.* Denn deren Stellungskosinus $\lambda, \mu, \nu$ bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$(19)\qquad \lambda P + \mu Q + \nu R = 0,$$

$$(20)\qquad \lambda(A' + uP') + \mu(B' + uQ') + \nu(C' + uR') = 0.$$

Von diesen beiden Gleichungen ist aber die erste sicher für beide Axoide dieselbe und die zweite auf Grund der ersten nach dem Obigen ebenfalls.

Ebenso läßt sich leicht erkennen, daß der sogenannte *Verteilungsparameter* $k = \frac{de}{d\sigma}$ *für beide Axoide derselbe ist,* wo $de$ der kürzeste Abstand zweier benachbarter Schraubenachsen und $d\sigma$ ihr Winkel ist. Denkt man sich daher statt der Zeit $t$ die Veränderliche $\sigma$ eingeführt auf Grund der Gleichung:

$$(21)\qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dP}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2,$$

so sind die *Richtungskosinus des kürzesten Abstands:*

$$(22)\qquad A = QR' - RQ', \quad B = RP' - PR', \quad \Gamma = PQ' - QP',$$

wo, wie im Folgenden immer, *die Differentiation nach der Veränderlichen $\sigma$ durch Striche* bezeichnet werden mag. Sind ferner $u = v$ und $u = \bar{v}$ die Abstände der Endpunkte dieses kürzesten Abstands von den Anfangspunkten $(A, B, C)$ und $(A + dA,\ B + dB,\ C + dC)$ der Schraubenachse und der ihr benachbarten, so gelten die Gleichungen:

$$(23)\qquad A + dA + \bar{v}(P + dP) = A + vP + de\,A, \text{ usw.},$$

oder:

$$(24)\qquad A' = wP - vP' + kA, \text{ usw.},$$

wenn $\frac{v - \bar{v}}{d\sigma} = w$ gesetzt wird. Hieraus folgt:

$$(\mathrm{VII})\qquad \begin{cases} w = PA' + QB' + RC', \\ -v = P'A' + Q'B' + R'C', \\ k = AA' + BB' + \Gamma C'. \end{cases}$$

Hiernach ergibt sich zuerst aus den Gleichungen (15), daß $\sigma = \sigma_1$ ist, ferner aber aus (18), daß $k^0 = k_1^0$ und $v^0 = v_1^0$. *Die beiden Axoide haben daher für jede gemeinsame Schraubenachse den sogenannten Striktionspunkt und den Verteilungsparameter gemein.* Was dagegen die Funktion $w$ betrifft, so folgt nur $w^0 = w_1^0 + \left(\frac{du}{d\sigma}\right)^0$, sie ist also nur dann für jede gemeinsame Achse dieselbe, wenn kein Gleiten stattfindet.

## II.

Denken wir uns nunmehr *das feste Axoid in der Form* (8) *gegeben, so kann zunächst das bewegliche Axoid aus den den Gleichungen* (24) *analogen Gleichungen:*

$$\frac{da}{d\sigma} = w_1 p - v p' + k\alpha, \text{ usw.,} \tag{25}$$

*durch Quadraturen bestimmt werden.* Hierbei sind $p, q, r$ solche im übrigen willkürliche Funktionen von $\sigma$, daß $p^2 + q^2 + r^2 = p' + q' + r' = 1$ ist, d. h. *der Richtkegel des beweglichen Axoids kann noch beliebig angenommen werden* und seine Kanten können denen des Richtkegels des festen Axoids so zugeordnet werden, daß entsprechende Kanten mit je einer beliebig zu wählenden Anfangskante gleiche Kegelmäntel einschließen. Während ferner auch $w_1$ als eine beliebige Funktion von $\sigma$ angenommen werden kann, sind die Funktionen $v$ und $k$ durch das feste Axoid gegeben. Da aber $ABC$ auch *irgend* ein Punkt der betreffenden Schraubenachse sein kann, so könnte man auch $v = 0$ setzen, also die Striktionslinien der beiden Axoide als ihre Leitlinien annehmen. Durch die Funktion $w_1$ ist offenbar das Verhältnis der Schiebungs- zur Drehungsgeschwindigkeit gegeben.

Wollen wir nunmehr die diesen beiden Axoiden entsprechenden *Bewegungsformeln* aufstellen, so gehen wir von der folgenden Überlegung aus. Irgend ein Punkt $xyz$, der mit dem beweglichen Axoide verbunden ist, hat in einem Systeme $\omega\xi\eta\zeta$, dessen Anfangspunkt $\omega$ mit dem Striktionspunkte $abc$ zusammenfällt und dessen Achsen $\omega\zeta$, $\omega\eta$, $\omega\xi$ die Richtungskosinus $pqr$, $p'q'r'$, $\alpha\beta\gamma$ besitzen, die Koordinaten:

$$\begin{cases} \xi = (x - a)p + (y - b)q + (z - c)r, \\ \eta = (x - a)p' + (y - b)q' + (z - c)r', \\ \zeta = (x - a)\alpha + (y - b)\beta + (z - c)\gamma. \end{cases} \tag{26}$$

Denken wir uns nun das bewegliche Axoid in die Lage gebracht, bei der das obige System nach $ABC$, $PQR$, $P'Q'R'$, $AB\Gamma$ zu liegen

kommt, so hat dieser selbe Punkt im ursprünglichen Systeme die Koordinaten:

$$(27)\qquad \begin{cases} X = A + \xi P + \eta P' + \zeta A, \\ Y = B + \xi Q + \eta Q' + \zeta B, \\ Z = C + \xi R + \eta R' + \zeta \Gamma, \end{cases}$$

sodaß wir die gesuchten Bewegungsformeln aus den Formeln (V) erhalten, wenn wir darin setzen:

$$(\text{VIII})\qquad \begin{cases} L = A - af_1 - bf_2 - cf_3, \\ M = B - ag_1 - bg_2 - cg_3, \\ N = C - ah_1 - bh_2 - ch_3, \end{cases}$$

und:

$$(\text{IX})\begin{cases} f_1 = Pp + P'p' + A\alpha,\ f_2 = Pq + P'q' + A\beta,\ f_3 = Pr + P'r' + A\gamma, \\ g_1 = Qp + Q'p' + B\alpha,\ g_2 = Qq + Q'q' + B\beta,\ g_3 = Qr + Q'r' + B\gamma, \\ h_1 = Rp + R'p + \Gamma\alpha,\ h_2 = Rq + R'q' + \Gamma\beta,\ h_3 = Rr + R'r' + \Gamma\gamma. \end{cases}$$

Hierbei ist aber darauf zu achten, daß wir einerseits jede Seite der Erzeugenden $PQR$ mit jeder Seite der Erzeugenden $pqr$ und andrerseits auch jede Seite der Normale $P'Q'R'$ mit jeder Seite der Normale $p'q'r'$ zur Deckung bringen können. Diese Bemerkung ist wichtig, weil sonst bei kongruenten Axoiden der Widerspruch entstände, daß sie überhaupt keine Bewegung definieren könnten. Eine solche Frage drängt sich auf, wenn wir aus obigen Formeln wieder die momentanen Schraubenachsen zu bestimmen suchen. Wir brauchen hierzu einige aus der Kurvenlehre wohl bekannte Identitäten. Setzen wir:

$$(28)\qquad \alpha p'' + \beta q'' + \gamma r'' = \delta,$$

so folgt aus dem Systeme:

$$(29)\qquad \begin{cases} pp'' + qq'' + rr'' = -1, \\ p'p'' + q'q'' + r'r'' = 0, \\ \alpha p'' + \beta q'' + \gamma r'' = \delta \end{cases}$$

das System:

$$(30)\qquad p'' = \alpha\delta - p,\quad q'' = \beta\delta - q,\quad r'' = \gamma\delta - q,$$

und aus dem Systeme:

$$(30)\qquad \begin{cases} p\alpha' + q\beta' + r\gamma' = 0, \\ p'\alpha' + q'\beta' + r'\gamma' = -\delta, \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \end{cases}$$

das System:

$$(31)\qquad \alpha' = -p'\delta,\quad \beta' = -q'\delta,\quad \gamma' = -r'\delta.$$

Bedenken wir daher, daß

$$h_1' = R'p + Rp'' + R''p' + R'p'' + \Gamma'\alpha + \Gamma\alpha', \text{ usw.}$$

so folgt (s. Gl. (2)):

$$(32) \quad \begin{aligned} g_1h_1' + g_2h_2' + g_3h_3' &= QR' + Q'R + Q'R'' - Q'\Gamma\delta + B\Gamma' \\ &\quad - QR' \qquad\qquad\qquad + R'B\delta \\ &= Q'R + Q'\Gamma\Delta - P\delta \\ &\quad - Q'R - R'B\Delta \qquad = P(\Delta - \delta), \text{ usw.} \end{aligned}$$

Ferner wird (s. Gl. (4)):

$$(33) \quad \begin{aligned} L' + af_1' + bf_2' + cf_3' &= A' - a'f_1 - b'f_2 - c'f_3 = \\ A' - Pw_1 - Ak &= P(w - w_1), \text{ usw.} \end{aligned}$$

Wir kommen also in der Tat zu der ursprünglichen Schraubenachse zurück und finden erstens wie oben, daß $w - w_1 = \frac{du}{d\sigma}$, und zweitens, daß die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{d\sigma} = \Delta - \delta$ ist. In dem Vorstehenden glauben wir alle Formeln gegeben zu haben, um spezielle Aufgaben, die sich hieran knüpfen, zu lösen, halten aber ein Eingehen auf solche Aufgaben hier nicht für nötig.

Karlsruhe, den 9. November 1906.

---

# Bemerkung zu den Sommerfeldschen Ausführungen „Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen“ (Zusatz).

Von A. TIMPE in Danzig.

Im Einverständnis mit Herrn Prof. Sommerfeld möchte ich noch nachholen, darauf hinzuweisen, daß sich der von mir (diese Zeitschrift Bd. 55, Fußnote S. 151, 152) bemerkte Vorzeichenfehler in seinem Bedingungsschema (diese Zeitschrift Bd. 54, S. 320) leicht dadurch korrigieren läßt, daß man die dort in Gleichung (5) gegebene Definition von $f(y)$ folgendermaßen abändert:

$$f(y) = -\operatorname{Sin}\lambda(y-h) + \lambda y \operatorname{Cof}\lambda(y-h) + \operatorname{Sin}\lambda y - \lambda(y-h)\operatorname{Cof}\lambda y.$$

Ich pflichte Herrn Sommerfeld gern darin bei, daß seine Lösung, sofern auf eine möglichst übersichtliche geschlossene analytische Darstellung gesehen wird, den Vorzug verdient.

---

# Bücherschau.

**Werkmeister P.** **Graphische Tachymetertafel für alte Kreisteilung.** Entworfen für Entfernungen von 5 bis 500 m und für Höhenunterschiede von 0,1 bis 70 m. Mit einem Vorwort von Dr. E. Hammer, Professor a. d. Kgl. Technischen Hochschule in Stuttgart. Verlag von Konrad Wittwer in Stuttgart 1906. Preis ℳ 4.60.

Die hauptsächlich von d'Ocagne ausgebildete Methode der fluchtrechten Punkte zur Herstellung von Rechentafeln (abaques à alignement) wird neuerdings vielfach namentlich in der Geodäsie und Astronomie angewendet. Nach dieser Methode sind in vorliegender Tafel die gebräuchlichen Grundgleichungen für tachymetrische Messung:

$$e = E\cos^2\alpha \tag{1}$$

$$h = \tfrac{1}{2}E\sin 2\alpha \tag{2}$$

dargestellt. Hierin bedeuten: $E$ eine Rechnungshilfsgröße vom Betrag $c + k \cdot l$ (wo $c$ und $k$ von der Fernrohrkonstruktion abhängige Konstanten, $l$ der zwischen den Distanzfäden abgelesene Lattenabschnitt sind); $\alpha$ den Höhenwinkel der Zielung nach einem bestimmten Teilstrich an der vertikal aufgestellten Latte; $e$ die gesuchte Horizontaldistanz zwischen Latte und Umdrehungsachse des Instruments; $h$ den gesuchten Höhenunterschied zwischen Kippachse und jenem Teilstrich.

Die für den Bureaugebrauch bestimmte Tafel (Format $35 \times 25$ cm) gibt auf S. 1 die aus Gleichung (1) folgende Reduktion von $E$ auf $e$:

$$E - e = E\sin^2\alpha\,.$$

Die folgenden 12 Seiten sind der Gleichung (2) gewidmet, wobei die jeweiligen Grenzen von $E$ und $\alpha$ den Bedürfnissen der Praxis entsprechen. Die Träger der 3 Punktreihen sind einander parallel; verbindet man je 2, zusammengehörigen Werten von $E$ und $\alpha$ entsprechende Punkte (auf den beiden äußeren Skalen) durch eine gerade Linie (was mittels einer auf Zellhorn eingerissenen roten Linie geschieht), so liest man am Schnittpunkt der mittleren Skala mit jener Geraden den gesuchten Wert von $(E - e)$ bezw. $h$ ab. Für ein Instrument mit bestimmten Konstanten läßt sich die Tafel leicht dahin ändern, daß man statt mit dem Argument $E$, sogleich mit dem Lattenabschnitt $l$ eingeht. Der Maßstab der Skalen ist so gewählt, daß bis zu Höhenunterschieden von 10 m fast überall eine Genauigkeit von 1 cm erreicht wird, an den übrigen Stellen der Tafel wird das dcm sicher erhalten.

Die aufs sorgfältigste gezeichnete Tafel hat vor den meisten sonstigen graphischen Tachymetertafeln den Vorzug, wegen ihrer schönen, übersichtlichen Anordnung das Auge nicht zu ermüden und wegen der genügend weit gehenden Ausdehnung der Argumente $E$ und $\alpha$ ($E$ bis 500 m) den Höhenunterschied stets unmittelbar zu liefern, so daß eine Zerlegung von $E$ nur ganz ausnahmsweise nötig wird. Kommafehler, denen man bei den gebräuchlichen Rechenschiebern ausgesetzt ist, sind ausgeschlossen. Nach einiger Übung macht das Auffinden der gewünschten Argumente in der Tafel keine Schwierigkeit. Es dürfte sich empfehlen, bei einer Neuauflage die Tafel in zwei Teile zu zerlegen, den einen mit cm-Genauigkeit in $h$ ($E$ bis etwa 120) zur Berechnung der Wechselpunkte von Waldzügen sowie des Horizonts von Feldstandpunkten, den andern mit dm-Genauigkeit in $h$ für die Zwecke der gewöhnlichen topographischen Tachymetrie. Der jeweils zu benützende Teil der Tafel würde dadurch weniger umfangreich und das Eingehen in die Tafel etwas bequemer.

Stuttgart, Dezember 1906. Dipl. Ing. A. Egerer.

---

**Dr. Otto Fischer. Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper.** Mit speziellen Anwendungen auf den Menschen, sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. Mit 67 in den Text gedruckten Figuren und 4 Tafeln. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. Preis: geb. ℳ 14.—.

Das vorliegende Werk enthält eine zusammenfassende Darstellung der ausgedehnten Untersuchungen, welche der Verfasser zum Teil noch (bis 1895) gemeinsam mit W. Braune über die Bewegung des menschlichen Körpers angestellt hat. Der 1. allgemeine Teil behandelt die Kinetik der Gelenksysteme, deren Grundsätze fast ganz neu entwickelt werden mußten, da es sich hier um Systeme mit mehreren Graden der Bewegungsfreiheit handelt, während früher z. B. in der Kinetik der Maschinengetriebe fast nur zwangläufige Systeme untersucht worden sind. Der zweite Teil enthält eine lange Reihe von Anwendungen auf die Bewegung des menschlichen Körpers und dessen Gleichgewichtszustand.

Das Buch ist in erster Linie den Medizinern, insbesondere den Physiologen und Anatomen gewidmet. Damit sind die Schwierigkeiten charakterisiert, mit denen der Verfasser zu kämpfen hatte. In der Tat ist Abschn. 1—8 des 1. Teils recht geeignet dem nicht fachmännisch gebildeten Leser die wichtigsten Begriffe der Kinetik nahezubringen.

Sind auch (Abschn. 6) die Lagrangeschen Differentialgleichungen (zweiter Art) herangezogen, so wird der Leser durch eine zweite elementare Herleitung der Bewegungsgleichungen (Abschn. 8) wieder vollauf befriedigt. Daß auch von Vektoren und ihrer Addition Gebrauch gemacht ist, dürfte für Nichtmathematiker das Verständnis eher fördern als hemmen.

Für den Mathematiker ist von besonderem Interesse die für die Kinetik der Gelenksysteme grundlegende und durchaus wesentliche Theorie von den „Hauptpunkten“, welche die Längsachsen der Gelenkglieder in je zwei „Hauptstrecken“, zerlegen. Ihre wichtigste Eigenschaft ist die, daß der Vektor von irgend einem Gelenk bis zum Schwerpunkt des ganzen Systems

sich aus den Hauptstrecken zusammensetzen läßt, und zwar ist von den beiden einem Glied zugehörigen Hauptstrecken je eine zu verwenden. Durch die Hauptstrecke läßt sich aber auch die lebendige Kraft einfach ausdrücken und deshalb gewinnen auch die Bewegungsgleichungen durch ihre Verwendung an Einfachheit und gestatten eine für das Verständnis recht wichtige Interpretation. Da auch in der technischen Mechanik die Theorie von den Hauptpunkten wichtige Vorteile bietet, sind anhangsweise (Abschn. 21 und 22) einige Anwendungen auf Bewegungsvorgänge an Maschinen behandelt. Vgl. diese Zeitschrift Bd. 47 (1902) O. Fischer: Über die reduzierten Systeme und die Hauptpunkte der Glieder eines Gelenkmechanismus und ihre Bedeutung für die technische Mechanik. In dem 1904 erschienenen Artikel des Verfassers in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften IV, 8 sind hier bloß die Abschnitte 9, 14 und 15 zu vergleichen.

Vom Inhalt des Teils II A des vorliegenden Buches gibt der Artikel der Enzyklopädie eine gedrängte Übersicht.

Zu den Gleichgewichtsproblemen (Abschn. 17; Enz. 12) sei bemerkt:

Der Schwerpunkt einer zweigliedrigen Extremität liegt immer (S. 247 u. 248) in einer Geraden mit dem Gelenkpunkt, in welchem die Extremität mit dem Körper verbunden ist, und einem Punkt auf der Längsachse des Endgliedes, welchen der Verfasser „Richtpunkt“ dieses Endglieds genannt hat. Ich habe in dieser Zeitschrift Bd. 54. S. 325 gezeigt, daß diese Punkte eine wesentlich weiter reichende Bedeutung besitzen, da beim dreigliedrigen Gelenksysteme der Schwerpunkt stets auf der Verbindungslinie der beiden Richtpunkte der Endglieder liegt und dieselbe im Verhältnis der Hauptstrecken des Mittelglieds teilt. In dem S. 187 (Vgl. Taf. I) beschriebenen Gelenkmechanismus könnte man daher mit einigen Pantographen weniger auskommen.

Von den andern behandelten Problemen sei außer den Anfangsbewegungen, welche in Abschn. 18 ausführlich behandelt sind, besonders hingewiesen auf den Abschnitt 19, in welchem die Bewegungsgleichungen integriert werden für den Fall der Kontraktion eines eingelenkigen Muskels und wo der bemerkenswerte Satz abgeleitet wird, daß in jeder Bewegungsphase das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten und das Verhältnis der Winkelbeschleunigungen beider Gelenkglieder gleichen Wert besitzen.

Stuttgart. E. Stübler.

---

**H. Poincaré. Leçons de mécanique céleste professées à la Sorbonne.** Tome I. Théorie générale des perturbations planétaires. VI u. 367 S. 8°. Paris 1905, Gauthier-Villars. — Tome II. 1re partie. Développement de la fonction perturbatrice. 167 S. Paris 1907.

In den Jahren 1892—1898 erschien Poincarés großes Werk „Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste“, in welchem der Verf. die höchste analytische Strenge der von ihm ausgearbeiteten Methoden anstrebt und insbesondere der Konvergenz der in der Störungstheorie auftretenden Reihen seine Aufmerksamkeit angedeihen läßt. Für den Anfänger ist dieses bahnbrechende, neue Pfade erschließende Werk Poincarés nicht bestimmt. Anders hier: das vorliegende Buch soll der Art seiner Entstehung nach den Leser ohne bedeutende Vorkenntnisse in die neueren Anschauungsweisen der Himmelsmechanik einführen; die Darstellung sucht allenthalben aufs

kürzeste zum Ziel zu gelangen, verzichtet damit freilich auch auf die interessanten Ausblicke, die sich mehrfach auf dem Wege der klassischen Himmelsmechanik darbieten.

Der erste Band behandelt die allgemeine Theorie der Planetenstörungen. Dem einleitenden Kapitel, Prinzipien der Dynamik in gedrängter Form, schließen sich die Grundlagen des Problems der drei Körper an. Durch Einführung fiktiver Planeten, denen man folgeweise leicht übersehbare Bedingungen auferlegt, gelingt es, die Darstellung bequemer zu gestalten, und es kommen ebenso einfache wie bemerkenswerte Sätze zum Vorschein, die die Beziehung zwischen den fingierten und den wirklichen Körpern vermitteln. Auf die Untersuchung der elliptischen (Keplerschen) Bewegung wird im Hinblick auf den weiteren Lehrgang die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung angewandt, und danach ist es dann nicht mehr umständlich, die Bedeutung der von Lagrange entwickelten Prinzipien der Mechanik für das Sonnensystem zu diskutieren. Leicht beweisbar ist jetzt die zeitlich beschränkte Konstanz der großen Achsen der Planetenbahnen, die zwar kleinen periodisch verlaufenden Schwankungen, aber keinen säkularen Störungen unterliegen.

Eine große Bedeutung kommt weiter dem sog. „Problème restreint“ zu, auf dessen genäherte Verwirklichung wir bei den kleinen Planeten stoßen. Die gestörte Masse (kleiner Planet) sei Null, der störende Körper (Jupiter) bewege sich in ungestörter kreisförmiger Bahn um den Hauptkörper des Systems (Sonne) und die Bahnebene des kleinen Planeten falle mit jener des Jupiter zusammen. Es tritt dann der Fall ein, daß alle säkularen Störungsglieder verschwinden, und dieses Ergebnis bleibt natürlich auch bestehen, wenn ich das problème restreint noch weiter dahin spezialisiere, daß der kleine Planet sich an einer Stelle befinden soll, in der seine Umlaufszeit in einem rationalen (commensurabeln) Verhältnis zu jener des Jupiter steht. So gelangt man zu den periodischen Lösungen des Dreikörperproblems, bei denen die gegenseitigen Abstände der drei Körper (Sonne, Jupiter, kleiner Planet) periodische Funktionen der Zeit werden. Seltsamer Weise hat aber die Natur die Voraussetzung des Auftretens periodischer Lösungen nicht verwirklicht: in dem sonst so reich besetzten Planetoidengürtel zwischen Mars und Jupiter treffen wir an den Kommensurabilitätsstellen mit der Umlaufszeit des Jupiter noch nicht befriedigend aufgeklärte Lücken.

Wendet man sich nun der allgemeinen Theorie der säkularen Störungen zu, so dürfen die bisher festgehaltenen Vereinfachungen nicht weiter aufrecht bleiben; vielmehr sind jetzt die Variationsgrenzen aller Bahnelemente, auch der Exzentrizität und der Neigung zu diskutieren. Lagrange und Laplace zeigten schon unter Mitnahme der zweiten Potenzen, daß Neigung und Exzentrizität stets klein bleiben; sie erschlossen daraus die Stabilität unseres Sonnensystems. Es ergibt sich weiter, daß auch die Berücksichtigung höherer Potenzen an diesem Resultat nichts ändert: Neigung und Exzentrizität bleibt klein, das Sonnensystem für sehr lange Zeiträume stabil. Allerdings existiert eine Stelle zwischen Sonne und Jupiter, an der ein kleiner Planet, unter der Wirkung von Jupiter und Saturn, sehr große Neigungen erreichen könnte. — Hatte Lagrange gezeigt, daß bei Vernachlässigung der Quadrate der Massen die großen Achsen der Planetenbahnen keine säkularen Glieder enthielten, also invariabel seien, so dehnte Poisson dieses Resultat aus

und bewies unter Berücksichtigung der Quadrate der Massen, aber mit Vernachlässigung ihrer Kuben, daß die großen Achsen zwar gemischt säkulare Terme enthalten, rein säkulare indes nach wie vor nicht auftreten. Noch allgemeiner gestaltet Poincaré dieses Theorem von Poisson, indem er zeigt, daß in der Entwickelung keine rein säkularen Glieder vom Range Eins auftreten. Für jene Planeten, die den Kommensurabilitätsstellen (Lücken) ziemlich nahe liegen, erweist sich die von Delaunay angegebene Methode von Nutzen. Poincaré wendet sie auf den kleinen Planeten (108) Hecuba an, der unter allen dem Typus $^1/_2$ am nächsten kommt, d. h. jener Stelle, an der eine Umlaufszeit von genau der Hälfte jener des Jupiter stattfinden müßte. In solchen Fällen erscheinen Glieder von sehr langen Perioden, die Jahrhunderte und in gewissen kleineren Termen Zehntausende von Jahren übersteigen. —

Der erste Teil des zweiten Bandes ist der Entwicklung der Störungsfunktion gewidmet. Man versteht darunter eine periodische Funktion der mittleren Längen des störenden und gestörten Körpers, die sich nach dem Vielfachen dieser Winkelgrößen in eine Fouriersche Reihe entwickeln läßt. In der Diskussion werden drei Spezialfälle unterschieden: 1) Neigungen, und Exzentrizitäten sind Null, 2) die Exzentrizitäten sind Null, 3) die Neigungen sind Null. Hierzu tritt noch der Fall der Mondbahn, wo das Verhältnis der großen Bahnachsen des gestörten (Mond) zum störenden Körper (Sonne) sehr klein ist, die Entwicklung nach Potenzen dieses Verhältnisses daher besondere Vorteile darbietet. Von einschneidender Wichtigkeit ist die Frage nach der Konvergenz der in der Störungsfunktion auftretenden Reihen. Eine abschließende Beantwortung ist zur Zeit noch nicht möglich. Wohl lassen sich eine Anzahl interessanter Beziehungen zwischen den Koeffizienten der nach verschiedenen Argumenten entwickelten Störungsfunktion angeben; durchweg aber wird man sich in praxi über den allgemeinen Verlauf der Koeffizienten durch deren numerische Berechnung zu orientieren suchen; bequeme Methoden hierfür, die verschiedenen Fällen angepaßt sind, haben Hansen, Jacobi, Cauchy und Poincaré ausgearbeitet. —

Die Planetenentdeckungen im verflossenen und laufenden Jahre, die bis jetzt schon drei Planeten in genau oder sehr nahe derselben Entfernung wie Jupiter zum Vorschein brachten, verleihen den himmelsmechanischen Untersuchungen einen neuen Reiz: Spezialfälle des Dreikörperproblems, die bisher nur ein theoretisches Interesse beanspruchten, scheinen hier der Verwirklichung nahe gerückt. Zu der erschöpfenden Aufklärung der noch erwachsenden Schwierigkeiten aber weisen die Arbeiten von Gyldén, Poincaré und Charlier den Weg.

Straßburg i. E. WIRTZ.

# Abhandlungsregister 1905—1906.

Von E. WÖLFFING in Stuttgart.

(Fortsetzung.)

### Metrologie.

1992. *B. Eötvös Loránd.* Valtozhatatlan mértó kegységek (Unveränderliche Masseneinheiten). N.M.B. 35. 369.

1994. *J. Witkowski.* Miary dlugości metryczne i ich stosunek do miar angielskich i dawnych polskich (Die metrischen Maße und ihre Beziehung zu den englischen und altpolnischen Maßen). P.T. W. 41. 81.

1995. *C. F. Lehmann.* Über die Beziehungen zwischen Zeit- und Raummessungen im babylonischen Sexagesimalsystem. B.A.G. 1. 381.

Siehe auch 3406.

### Höhere Geodäsie.

1996. *M. T. Huber.* Pomiar ziemi (Wie hat man die Erde gemessen?) W. W. 22. 481; 500.

1997. *C. E. Guillaume.* La mesure rapide des bases géodésiques. B.S.F.P. 1906. 5; J.P. (4) 5. 247.

1998. *A. Loperfido.* Compensazione degli azimut astronomici attraverso una rete geodetica fondamentale. R.F.M. 7. 501.

1999. *W. G. Raymond.* Geographical positions of base lines and principal meridians governing the public surveys. J.G.C. 2. 40.

2000. *J. de Schokalsky.* La superficie de la Russie d'Asie et la méthode employée pour la mesurer. C.R. 143. 278.

### Gradmessungen.

2001. *D. D. Sergievskij.* Vlijanie na točnost zlementov zemnogo sferoida vyvedennych Klarkon pozdnejšich gradusnych izmercnij (Der Einfluß späterer Meridianbogenmessungen auf die Genauigkeit der Elemente des Erdsphäroids nach Clarke). M.S.M T. 59. 193.

2002. *A. S. Vasilev.* Popytka objavnit nekotoryja sistematičeskija ošibki v bazisnom pribore Ederina (Versuch einige systematische Fehler von Jäderins Basisapparat zu erklären). A.P.B. (5) 19. 93.

### Geoïd.

2003. *W. Láska.* Die Erdgestalt. N. O. 51. 209.

2004. *G. L. Hosmer.* The figure of the earth. T.Q. 16. 60.

2005. *F. R. Moulton.* The shape of the Earth. J.G.C. 2. 481; 521.

2006. *F. Angelitti.* Formole e teoremi relativi all' elissoide terestre. P.R.O.P. (2) 1. Nr. 2 und 3.

2007. *F. R. Helmert.* Die Größe der Erde. S.A.B. 1906. 525.

2008. *M. Brillouin.* Les courbures du géoide dans le tunnel du Simplon. C.R. 142. 916.

Siehe auch 2001.

### Lotabweichungen.

2009. *N. N.* The deflection to the right. M.W.R. 33. 448.

### Geophysik.

2010. *E. Hammer.* Die isostatische Lagerung der äußeren Erdschichten. P. G.M. 52. 190.

2011. *G. Herglotz.* Über die Elastizität der Erde bei Berücksichtigung ihrer variablen Dichte. Z.S. 52. 275.

Siehe auch 1828.

### Schweremessungen.

2012. *A. Venturi.* Nuove determinazioni di gravità relativa in Sicilia. R. A.L.R. (5) 14B. 309.

**2013.** *A. Alessio.* Relazione sulla determinazione della gravità relativa fra La Plata e Padova. A.S.A. 60. 280.

### Erddichte.

**2014.** *O. Fisher.* Densities of the Earths crust beneath continents and oceans compared. P.C.P.S. 13. 106.

**2015.** *R. Spitaler.* Periodische Verschiebungen des Schwerpunkts der Erde. S.A.W. 114. 695.

Siehe auch 2011.

### Erdbeben.

**2016.** *W. J. Laska.* Über die Berechnung der Erdbeben. M.E.C. (2) 14.

**2017.** *R. Stiattesi.* Vuove formole par la determinazione della distanza degli epicentri sismici coi dati dei sismogrammi. R.F.M. 7 A. 106.

**2018.** *W. Krebs.* Die Richtung bei der Herdbestimmung von Fernbeben. D. W.R. 6. 285.

**2019.** *V. Monti.* Sull' interpretazione matematica dei sismogrammi. R.A.L.R. (5) 15. A. 217.

**2020.** *F. Omori.* Note on the relation between the imperfect elasticity of rocks and the earthquake motion. P.T.M. 2. 460. — *H. Nagaoka.* 463.

**2021.** *S. Kusakabe.* A note on the direction of earthquake motion. P.T.M. 3. 10.

**2022.** *H. Benndorf.* Über die Art der Fortpflanzung der Erdbebenwellen im Erdinnern. S.A.W. 114. 1407; A.A.W. 20. 377.

**2023.** *H. Nagaoka.* Group velocity in distant earthquakes. P.T.M. 3. 52.

**2024.** *H. Nagaoka.* The rigidity of the Earth and the velocity of seismic waves. P.T.M. 2. 353.

**2025.** *H. Nagaoka.* Dispersion of seismic waves P.T.M. 3. 44.

**2026.** *V. Monti.* Sulla misura delle velocità di propagazione delle perturbazioni sismiche in rapporto alla sismometria razionale. R.A.L.R. (5) 15. A. 15.

**2027.** *H. Nagaoka.* On damped progressive waves and the formation of tail in distant earthquake P.T.M. 3. 17.

**2028.** *H. Benndorf.* Über die Art der Fortpflanzung der Erdbebenwellen im Erdinnern. A.A.W. 1906. 227.

**2029.** *H. Nagaoka.* On the existence of secondary vibrations in seismic waves. P.T.M. 2. 443.

**2030.** *S. Kusakabe.* Frequency of after-shocks and space distribution of seismic waves. J.U.T. 21. Nr. 1.

**2031.** *C. Davison.* Über Erdbebenflutwellen. E.W.L. 3. 97.

**2032.** *A. Cancani.* Sopre une ipotetica relazione fra le variazioni di latitudine e la frequenza dei terremoti mondiali. B.S.S.I. 8. 286.

**2033.** *A. Cancani.* Zur Hypothese über eine Wechselbeziehung zwischen den Variationen geographischer Breiten und der Bebenhäufigkeit. E.W.L. 3. 49.

Siehe auch 2049; 2163; 2996—98.

### Bodentemperatur.

**2034.** *L. Jatschewski.* Über das thermische Régime der Erdoberfläche im Zusammenhange mit den geologischen Prozessen. M.S.R.M. (2) 42. 343.

### Erdwärme.

**2035.** *G. Romanes.* Suggestion as to the cause of the Earths internal heat. P.R.S.E. 24. 415.

**2036.** *J. Koenigsberger.* Über den Temperaturgradienten der Erde bei Annahme radioaktiver und chemischer Prozesse. P.Z. 7. 297.

**2037.** *F. Linke.* Die Tammannschen Schmelzversuche und das Problem vom Zustande des Erdinnern. D.W.B. 6. 329.

**2038.** *L. Jaczewski.* Über das thermische Regime der Erdoberfläche im Zusammenhange mit den geologischen Prozessen. V.R.M.G. (2) 42. 343.

**2039.** *W. Branco.* Über H. Höfers Erklärungsversuche der hohen Wärmezunahme im Bohrloche zu Neuffen. Z.D. G.G. 56. 174.

### Eis.

**2040.** *H. T. Barnes.* Ice formation in Canadian waters and the physical laws governing its formation. T.C.S.C.E. 1901. 78.

### Gletscher.

**2041.** *E. Brückner.* Die Höhe der Firnlinie am Hüfigletscher und die Methode der Bestimmung der Firnlinie im allgemeinen. V.N.Z. 51. 50.

### Erdströme.

Siehe 2146; 2336.

### Erdmagnetismus.

**2042.** *V. Carlheim-Gyllensköld.* Note sur le potentiel magnétique de la Terre exprimé en fonction du temps. A.M.A.F. 3. Nr. 7.

**2043.** *A. Wagner.* Eine neue Methode zur Messung der Horizontalintensität auf Reisen. S.A.W. 114. 1221.

**2044.** *W. Watson.* The determination of the moment of inertia of the magnets used in the measurement of the horizontal component of the Earths field. P.P.S.L. 19. 636.

**2045.** *C. Störmer.* Sur les trajectoires des corpuscules électriques dans l'espace sous l'influence du magnétisme terrestre avec application aux aurores boréales et aux perturbations magnétiques. C.R. 142. 1580; 143. 140.

**2046.** *A. Alessio.* Informe sobre las observaciones de magnetismo terrestre realizadas en el Observatorio nacional de la Plata. A.S.A. 61. 74.

Siehe auch 2164—68.

### Ozeanographie.

**2047.** *A. Vinhaes.* Oceanographia. R.M.B. 1906. Nr. 5.

**2048.** *W. H. Fry.* Ocean waves N.M.L. 1905. 592.

**2049.** *C. Davison.* Über Erdbebenflutwellen E.W.L. 3. 97.

Siehe auch 510; 921; 2031.

### Meeresströme.

**2050.** *C. Forch.* Zur Theorie der Meeresströmungen. A.H. 34. 114.

**2051.** *V. W. Ekman.* Beitrag zur Theorie der Meeresströmungen. A.H. 34. 423; 472; 527.

**2052.** *R. Atmagià.* Sulle cause delle correnti marine. B.S.G.I. 1906. Nr. 1.

**2053.** *J. W. Sandström* and *B. Helland-Hansen.* On the mathematical investigation of ocean currents. R.F.H.I. 1902—1903.

**2054.** *V. W. Ekman.* On the influence of the Earths rotation on ocean currents. A.M.A.F. 2. Nr. 11.

**2055.** *T. C. Chamberlin.* On a possible reversal of deep-sea circulation and its influence on geological climates P.P.S. 45. 33.

**2056.** *O. Petterson.* Über die Wahrscheinlichkeit von periodischen Schwankungen in dem Atlantischen Strome und seinen Randgewässern. A.H. 34. 1.

**2057.** *W. Meinardus.* Variations in the circulation of the North Atlantic and the phenomene connected therewith. Q.J.M.S. 32. 53.

**2058.** *J Lunesdane.* The Gulf stream N.M.L. 1906. Nr. 6.

**2059.** *W. Wissemann.* Die Oberflächenströmungen des Schwarzen Meeres. A.H. 34. 162.

Siehe auch 1922; 3326.

### Gezeiten.

**2060.** *W. Abendrot.* Entwicklung u. gegenwärtiger Stand der Gezeitenforschung M.V.E.D. 1906. Nr. 1.

**2061.** *J. Franz.* Die Gezeiten. D.R. 30. B. 87.

**2062.** *W. Förster.* Über Ebbe u. Flut M.V.A.P. 15. 111; 127.

**2063.** *R. M. de Bellegarde.* Sul problema nautico delle maree. R.M.R. 38 d. 176.

**2064.** *R. Koyer.* Nueva teoria de las mareas. A.H.M.C. 24.

**2065.** *G. Wegemann.* Rückblick auf die Gezeitenliteratur seit Ende 1904. A.H. 34. 484.

**2066.** *G. Wegemann.* Berechnung eines einzelnen Hochwassers nach Zeit u. Höhe mittels der harmonischen Konstanten. A. H. 34. 35.

Siehe auch 1860; 2695.

### Hydrologie.

**2067.** *Chrystal.* Some results in the mathematical theory of seiches. P.R.S.E. 25. 328; 637.

**2068.** *P. White* and *W. Watson.* Some experimental results in correction with the hydrodynamical theory of seiches. P.R S.E. 26. 142.

**2069.** *J. R. Witting.* Der bottnische Meerbusen. A.H. 34. 391; 414.

Siehe auch 3336.

### Seen.

Siehe 2067—68; 3334.

### Flüsse.

**2070.** *E. Blomqvist.* Vattnets medelhastighet i naturliga vattendrag. T.F.T. 1901. 161.

**2071.** *Lapaine.* Natürliche und künstliche Form des Flußgerinnes. Ö.W.Ö.B. 11. 253.

**2072.** *Coales.* Rivers conservancy. P.M.C.E. 31. 214.

Siehe auch 1749; 2481—82; 3327—32; 3380.

### Grundwasser.

**2073.** *E. Dubois.* Études sur les eaux souterraines des Pays-Bas. A.M.T. (2) 10. 75.

### Mathematische Meteorologie.

Siehe 57.

### Höhere Luftschichten.

Siehe 1427; 1475.

### Höhe der Atmosphäre.

**2074.** *T. E. E. See.* Détermination de la hauteur de l'atmosphère par le temps nécessaire à la disparition de la couleur bleue du ciel après le coucher du soleil. B.S.A.F. 19. 371.

**2075.** *O. J. B. Cordeiro.* The atmosphere. P.A. 13. 384.

### Luftdruck.

**2076.** *J. Holm.* On the relations between the diurnal charges of temperature and atmospheric pressure. J.S. M.S. (3) 22.

**2077.** *C. H. Wind.* Graphische Tabellen zur Bestimmung des Luftdruckgradienten. M.V.N.M.I. 1906. Nr. 2.

**2078.** *A. Anderkó.* Über den vertikalen Gradienten des Luftdruckes. M.Z. 22. 547.

**2079.** *P. Czermak.* Zur Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe. Z.P. 19. 228.

**2080.** *J. W. Sandström.* On the construction of isobaric charts for high levels in the Earths atmosphere and their dynamic significance. T.P.S. (2) 21. 31.

Siehe auch 58; 2084; 2132; 2170.

### Dynamische Meteorologie.

**2081.** *J. Schubert.* Der Zustand u. die Strömungen der Atmosphäre. B.P.A. 1. 147.

**2082.** *G. v. Friesenhof.* Die Luftdruckgebilde der unteren und der oberen Atmosphäre und ihr Zusammenhang. M.Z. 23. 209.

**2083.** *W. M.* The surface trajectories of moving air. N. 74. 162

Siehe auch 1990; 2080.

### Luftbewegung.

**2084.** *E. H. Bowie.* The relation between storm movement and pressure distribution. M.W.R. 34. 61.

**2085.** *F. W. Proctor.* Vertical air currents. M.W.R. 34. 78.

**2085a.** *H. H. Clayton.* The lifting power of ascending currents of air. M.W.R. 33. 390.

**2086.** *W. Krebs.* Barometrische Ausgleichsbewegung in der Erdatmosphäre. V.D.P.G. 7. 14; 377.

**2087.** *G. Greim.* Über die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre. G.Z. 10. 39.

**2088.** *G. Berti.* Applicazione del teorema di Carnot alla circolazione nell' atmosfera. B.M.S.M.I. (2) 22. 69.

**2089.** *P. Garrigou-Lagrange.* Sur les mouvements généraux de l'atmosphère dans les diverses saisons. A.S.M.F. 54. 96.

**2090.** *H. Hergesell.* Sur les vents locaux du voisinage des îles Canaries. C.R. 142. 1360.

Siehe auch 2081; 2132.

### Zyklonen.

**2091.** *E. van der Linden.* La dynamique des cyclones et des anticyclones d'après John Aitken. C.T.B. 1903. 341.

**2092.** *A. J. Monné.* Courant ascendant tourbillonaire. R.N. 1906. 25.

**2093.** *M. Margules.* Über die Energie der Stürme. J.Z.M.E. (2) 40. 1.

**2094.** *S. Tetsu Tamura.* Doctor Margules on the energy of storms. M.W.R. 33. 519.

**2095.** *N.N.* La teoria idrotermodinamica dei turbini atmosferici rispetto al problema delle variazioni della temperatura nella atmosfera. B.M.S.M.I. (2) 24. Nr. 4—6.

**2096.** *H. Helm Clayton.* Various researches on the temperature in cyclones and anticyclones in temperate latitudes. B.P.A. 1. 97.

**2097.** *De C. Word.* Temperatures in cyclones and anticyclones. S. (2) 23. 274.

Siehe auch 2134.

### Meteorologische Optik.

**2098.** *C. H. Claudy.* Some curious things about light. A.I. 8. Nr. 7.

**2099.** *H. E. Lau.* Sur la dispersion atmosphérique. B A. 23. 323.

**2100.** *W. W. Payne.* The colour of the sky. P.A. 14. 5.

**2101.** *K. Exner.* Das optische Vermögen der Atmosphäre. M.Z. 23. 10.

**2102.** *A. Kolmovskij.* Vency okolo solnca (Sonnenringe). M.M P. 1903. 405.

**2103.** *J. M. Pernter.* Erklärung des fälschlich weißer Regenbogen benannten Bouguerschen Halos. S.A.W. 114. 917.

**2104.** *R. C. C. Lippincott.* The green flash. Q.J.M.S. 32. 232.

2105. *R. Holm.* Über die abnorm kleine Sonnenstrahlung in den Jahren 1902—03. A.M.A.F. 2. Nr. 4.

Siehe auch 2074.

### Refraktion.

2106. *H. Andoyer.* Sur la théorie de la réfraction. B.A. 22. 404.

2107. *E. Großmann* u. *L. Courvoisier.* Untersuchungen über die astronomische Refraktion. V.S.H. 3.

2108. *A. Bemporad.* Sulla teoria della refrazione astronomica. M.S.S.I. 34. 191; 217; 233.

2109. *Arnaud.* Mémoire sur la réfraction astronomique. Courbure de la trajectoire lumineuse dans l'air. M.A. Ly. (3) 8. 163.

2110. *P. Pizzetti.* Intorno al calcolo della rifrazione astronomica senza speciali ipotesi sul modo di variare temperatura dell' aria coll' altezza. R.A. L.R. (5) 15. A. 73; N.C.P. (5) 10. 407.

2111. *G. Tichov.* Le changement de la position des étoiles en admettant la réfraction de la lumière dans le système solaire. A.P.B. (5) 22. Nr. 2.

2112. *G. A. Hill.* An untried method of determining the constant of refraction. P.A. 13. 417.

2113. *L. de Ball.* On the influence of vapour pressure on refraction. M N.A.S. 65. 750.

2114. *O. Bergstrand.* Zur Theorie der Differentialrefraktion. A.N.K. 172. 19 — *L de Ball.* 157.

2115. *A. Lorenzen.* Neue Beispiele terrestrischer Refraktion. P. 14. 137.

2116. *U. Barbieri.* Ricerche sulla rifrazione terrestre eseguite a Lecce nel 1902. M.S.It. (3) 13. 45.

### Regenbogen.

2117. *W. Le Conte Stevens.* Theory of the rainbow. M.W.R. 1906. Nr. 4.

2118. *D. Hammer.* Airy's theory of the rainbow J.F.I. 156. 335.

2119. *K. Aichi* and *T. Tanakadate.* On the theory of the rainbow due to a circular source of light. P.T.M. 2. 417.

2120. *J. M. Pernter.* Zur Theorie des von einer kreisförmigen Lichtquelle erzeugten Regenbogens. S.A.W. 114. 785.

2121. *L. Besson.* The circumhorizontal arc. M.W.R. 30. 486.

### Lufttemperatur.

2122. *F. M. Exner.* Über Druck und Temperatur bewegter Luft. A.A.W. 20. 380.

2123. *K. Ångström.* Über die Anwendung der elektrischen Kompensationsmethode zur Bestimmung der nächtlichen Ausstrahlung. N.A.U. (4) 1. Nr. 2.

Siehe auch 132; 2075; 2170.

### Insolation.

2124. *F. Hopfner.* Über die Größe der solaren Wärmemengen, welche in gegebenen Zeiten beliebigen Breiten der Erde zugestrahlt werden. M.Z. 23. 385.

2125. *F. Hopfner.* Die Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erde. S.A.W. 114. 1315.

2126. *F. Hopfner.* Die tägliche solare Wärmestrahlung auf einer in beliebiger Breite fest gegebenen Flächeneinheit. M.Z. 23. 396.

2127. *S. Zöllner.* Graphische Darstellung der täglichen Bestrahlung der Erde durch die Sonne in verschiedenen Monaten und Breiten. M.Z. 23. 92.

2128. *L. Steiner.* Graphische Methode zur Bestimmung der Insolationsmenge. M.Z. 23. 294.

Siehe auch 1909.

### Thermodynamik der Atmosphäre.

2129. *F. H. Bigelow.* Studies on the thermodynamics of the atmosphere. M.W.R. 34. 9; 74.

2130. *F. H. Bigelow.* Application of the thermodynamic formulae to the nonadiabatic atmosphere. M.W.R. 34. 110.

2131. *F. M. Exner.* Über Druck und Temperatur bewegter Luft. S.A.W. 114. 1271.

2132. *R. Börnstein.* Über die Verteilung von Luftdruck und Wind unter Einwirkung von örtlicher Erwärmung. M.Z. 22. 563.

2133. *M. Margules.* Über die Änderung des vertikalen Temperaturgefälles durch Zusammendrückung oder Ausbreitung einer Luftmasse. M.Z. 23. 241.

2134. *Dechevrens.* La teoria idrotermodinamica dei turbini atmosferici rispetto al problema delle variazioni della temperatura nell' atmosfera. B.M. S.M.I. 1904. Nr. 7—9; 1905. Nr. 12; 1906. Nr. 1.

### Luftfeuchtigkeit.

2135. *J. R. Sutton.* Comparison between Glaishers factors and Ferrels psychrometric formula. Q.J.M.S. 32. 35.

2136. *J. Ball.* A rapid method of finding the elastic force of aqueous

vapour and the relative humidity from drybulb and wetbulb thermometer readings. Q.J.M.S. 32. 47.

Siehe auch 2088; 2095—97; 2110.

### Nebel.

2137. *C. Barus.* Die Eigenschaften von Kondensationskernen und ihre athmosphärische Verteilung. P.Z. 6. 718.

### Niederschläge.

2138. *E. Brückner.* L'origine de la pluie. C.T.B. 1902. 510; 565.

2139. *A. Defant.* Gesetzmäßigkeiten in der Verteilung der verschiedenen Tropfengrößen bei Regenfällen. S.A.W. 114. 585.

2140. *A. Defant.* Die Gesetzmäßigkeiten in der Verteilung der verschiedenen Tropfengrößen bei Land- und Gewitterregen. D.V.N. 77. 141.

Siehe auch 3335.

### Hagel.

Siehe 2158.

### Luftelektrizität.

2141. *E. Guarini.* Sur l'électricité atmosphérique. B.S.B.A. 11. 13.

2142. *G. C. Simpson.* Atmospheric electricity. M.W.R. 34. 16.

2143. *O. Nairz.* Atmosphärische Elektrizität. P. 17. 529; 545.

2144. *E. Riecke.* Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität. A.Gr. (3) 9. 1; 245.

2145. *H. Gerdien.* Der Elektrizitätshaushalt der Erde und der unteren Schichten der Atmosphäre. P.Z. 6. 647. — *H. Ebert.* 828.

2146. *S. Lemström.* Ob električeskich tokach vozducha. (Die elektrischen Ströme der Luft.) J.R.P.C.G. 34. 307.

2147. *H. Ebert.* Über die Aufrechterhaltung des normalen Erdfeldes. P.Z. 6. 824.

2148. *D. A. Lačinov.* Ob električeskom pole atmosfery. (Über das elektrische Feld der Atmosphere.) J.R.P.C.G. 34. 17.

2149. *P. Langevin.* Sur les ions de l'atmosphère. B.S.F.P. 1905. 79.

2150. *L. L. Hendren.* The rate of recombination of ions in air. P.R. 21. 314.

2151. *A. Gockel.* Über den Ionengehalt der Atmosphäre. M.Z. 23. 53; 339.

2152. *J. Elster* u. *H. Geitel.* Über die natürliche Radioaktivität der Atmosphäre u. der Erde. J.P.R. 19. 35.

2153. *A. Occhialini.* Die Dielektrizitätskonstante der Luft in ihrer Beziehung zu ihrer Dichte. P.Z. 6. 669.

2154. *H. Gerdien.* Demonstration eines Apparates zur absoluten Messung der elektrischen Leitfähigkeit der Luft. P.Z. 6. 800.

2155. *H. Schering.* Der Elster-Geitelsche Zerstreuungsapparat und ein Versuch quantitativer absoluter Zerstreuungsmessung. A.P.L. (4) 20. 176.

2156. *N. A. Hesehus.* Atmosfernoe električestvo i vlijanie na nego pyli. (Atmosphärische Elektrizität und der Einfluß des Staubes auf dieselbe.) J.R.P.C.G. 34. 577.

2157. *C. T. R. Wilson.* On the measurement of the Earth-Air current and on the origin of atmospheric electricity. P.C.P.S. 13. 363.

Siehe auch 863; 1261; 1361; 1480—81; 2639.

### Gewitter.

2158. *E. Durand Gréville.* La loi des grains et des orages. B.S.B.A. 11. 4.

### Polarlichter.

2159. *Negro.* Sull'altezza dell' aurora polare. B.M.S.M.I. (2) 24. Nr. 1—3.

2160. *V. Kousnetzow.* Détermination de la hauteur des rayons d'aurores boréales. A.P.B. (5) 21. 141.

Siehe auch 2045.

### Klimatologie.

2161. *S. Arrhenius.* Die vermutliche Ursache der Klimaschwankungen. M.N.I. 1. Nr. 2.

### Synoptische Meteorologie.

2162. *S. Hanzlik.* Relations between velocities of progression of lows and the areas of rising and falling pressure accompanying them. M.W.R. 1906. Nr. 5.

### Kosmische Geophysik.

2163. *O. Meißner.* Einfluß des Mondes auf die Erdbebenhäufigkeit. H.E.B. 18. 278.

2164. *E. W. Maunder.* The solar origin of terrestrial magnetism. A.J.C. 21. 101; P.A. 13. 59. — *T. H. S. Shearman.* P.A. 13. 226.

**2165.** *E. W. Maunder.* The solar origin of terrestrial magnetic disturbances. S. (2) 23. 885; P. A. 14. 228.

**2166.** *E. W. Maunder.* Origine solare delle perturbazioni del magnetismo terrestre. M.S.S.I. 34. 87.

**2167.** *A. Schuster.* Sun spots and magnetic storms. M.N.A.S. 65. 186.

**2168.** *F. W. Dyson.* Magnetic storms and the solar rotation. O. 28. 176.

### Kosmische Meteorologie.

**2169.** *Jochimsen.* Der Mond und das Wetter. W.B. 22. 223.

**2170.** *F. Bigelow.* Synchronisme entre les variations des protubérances solaires et les variations de la pression et de la température à la surface de la terre. A.S.M.F. 53. 289.

**2171.** *R. Merecki.* Wplyw zmiennej dzialalności slonca na nieokresove ruchy athmosfery ziemskiej (Der Einfluß der veränderlichen Sonnentätigkeit auf die nichtperiodischen Bewegungen der Erdatmosphäre). T.W. 16. 233.

### Meteorologische Beobachtungskunde.

**2172.** *R. de Saussure.* Vorschlag zu einem europäischen meteorologischen Zentralbureau. P.Z. 6. 852.

Siehe auch 2123.

### Mathematische Chemie.

**2173.** *H. de J. Caballero.* Le calcul et les équations chimiques. M. y R. M. 22. 119.

**2174.** *R. de Rodriguez.* Projet pour l'enseignement objectif des formules et équations chimiques. M. y R. M. 23. 57.

**2175.** *M. Bodenstein.* Reaktionsgeschwindigkeit und freie Energie. Z.P.C. 49. 61.

**2176.** *E. Brunner.* Zum Thema: Reaktionsgeschwindigkeit und freie Energie. 51. 106; 55. 635.

**2177.** *W. A. Nernst.* Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit in heterogenen Systemen. Z.P.C. 47. 52.

**2178.** *J. N. Brönsted.* Studien zur chemischen Affinität I. Z.P.C. 55. 371.

**2179.** *R. Luther.* Räumliche Fortpflanzung chemischer Reaktionen. Z.E. 12. 596.

**2180.** *E. Briner.* Recherches sur quelques équilibres chimiques. J.C.P. 4. 267.

**2181.** *M. Bodenstein.* Heterogene katalytische Reaktionen. I. Z.P.C. 46. 725; 49. 41.

**2182.** *M. Bodenstein* und *F. Ohlmer.* Heterogene katalytische Reaktionen. Z.P.C. 53. 166.

**2183.** *A. Titoff.* Beiträge zur Kenntnis der negativen Katalyse im homogenen System. Z.P.C. 45. 641.

**2184.** *H. Lundén.* Über Katalyse von Äthylazetat durch Salpetersäure bei Gegenwart von Alkalinitraten. Z.P.C. 49. 189.

**2185.** *E. Stern.* Die chemische Kinetik der Benzoinsynthese (Cyanionenkatalyse). Z.P.C. 50. 513.

**2186.** *F. Kaufler.* Zur Kinetik der Folgereaktionen. Z.P.C. 55. 502.

**2187.** *C. L. Jungius.* Theoretische Betrachtungen über Reaktionen, welche in zwei oder mehreren aufeinanderfolgenden Phasen verlaufen. Z.P.C. 49. 368. — *A. Mittasch,* 50. 613.

**2188.** *E. Brunner.* Theoretisches über Reaktionen, die in mehreren Stufen verlaufen. Z.P.C. 52. 89.

**2189.** *J. Plotnikov.* Reaktionsgeschwindigkeiten bei tiefen Temperaturen. Z.P.C. 53. 604.

**2190.** *R. Luther* und *N. Schilow.* Zur Systematik und Theorie gekoppelter Oxydations-Reduktionsvorgänge. Z.P.C. 46. 777.

**2191.** *G. N. Lewis.* Hydratation in Lösungen. Z.P.C. 52. 224.

**2192.** *J. W. Brühl* und *H. Schröder.* Über Salzbildungen in Lösungen. Z.P.C. 51. 1; 513.

**2193.** *A. J. J. Vandevelde* et *C. E. Wasteels.* Recherches sur la substitution métallique. B.A.B. 1905. 461.

**2194.** *T. Ericson-Aurén* und *W. Palmaer.* Über die Auflösung von Metallen. II. Z.P.C. 45. 182.

**2195.** *W. T. Cooke.* Versuche über das chemische Verhalten von Argon und Helium. Z.P.C. 55. 537.

**2196.** *R. Luther* und *F. H. Mac Dougall.* Die Reaktion zwischen Chlorsäure und Salzsäure. Z.P.C. 55. 477.

**2197.** *W. Bray.* Beiträge zur Kenntnis der Kalogensauerstoffverbindungen. Z.P.C. 54. 463; 569; 731.

**2198.** *A. Slator.* Chemische Dynamik der Einwirkung von Cl auf Benzol unter den Einfluß verschiedener Katalysatoren und des Lichtes. Z.P.C. 45. 513.

**2199.** *J. Sand.* Die Stärke der HOCl. Z.P.C. 48. 610.

**2200.** *J. Sand.* Bildung und Zersetzung der Chlorsäure. Z.P.C. 50. 465.

**2201.** *J. H. Walton* jr. Die Jodionenkatalyse des $H_2O_2$. Z.P.C. 47. 185. — *G. Bredig* 48. 368.

**2202.** *J. Brode.* Die Oxydation des Jodions zu Hypojodid als Zwischenstufe einiger Reaktionen. Z.P.C. 49. 208.

**2203.** *Berthelot.* Sur les équilibres chimiques constatés dans l'action de plusieurs bases mises simultanément en présence de l'acide phosphorique. A.C.P. (8) 8. 289.

**2204.** *G. Tschermak.* Darstellung von Kieselsäuren durch Zersetzung der natürlichen Silikate. Z.P.C. 53. 349.

**2205.** *A. Smits* und *C. K. Wolff.* Über die Zersetzungsgeschwindigkeit des Kohlenoxyds. Z.P.C. 45. 199.

**2206.** *H. Martinsen.* Beiträge zur Reaktionskinetik der Nitrierung. Z.P.C. 50. 385.

**2207.** *M. A. Hunter.* Zerfallgeschwindigkeit des $N_2O$. Z.P.C. 53. 441.

**2208.** *W. Reinders.* Das chemische Gleichgewicht zwischen Silberamalgamen und einer Lösung von Silber- und Quecksilbernitrat. Z.P.C. 54. 609.

**2209.** *H. F. Sill.* Über das Gleichgewicht zwischen einer Stickstoffbase und organischen Säuren in verschiedenen Lösungsmitteln. Z.P.C. 51. 577.

**2210.** *E. Brunner.* Theorie der Auflösungsgeschwindigkeit des As. Z.P.C. 51. 494.

**2211.** *G. N. Lewis.* Zersetzung von $Ag_2O$ durch Autokatalyse. Z.P.C. 52. 310.

**2212.** *W. C. Bray.* On the use of the differential equation in calculating the results of kinetic measurements; the reaction between arsenic acid and potassium iodide near the equilibrium. J.P.C. 9. 573.

**2213.** *E. Baur* und *H. L. Voerman.* Über $Fe_2$, N und CrN. Z.P.C. 52. 467.

**2214.** *F. A. H. Schreinemakers.* Die Alkalichromate. Z.P.C. 55. 71.

**2215.** *R. Abegg* und *A. J. Cox.* Chromat, Bichromat und Chromsäure. Z.P.C. 48. 725.

**2216.** *S. Bugarszky.* Über die Einwirkung von Br auf Azetaldehyd in wässeriger Lösung. Z.P.C. 48. 63.

**2217.** *R. Vondrácek.* Über den Einfluß der Metalle auf die Hydrolyse des Rohrzuckers. Z.P.C. 50. 560.

**2218.** *C. L. Jungius.* Über die Umlagerung zwischen einigen isomeren Glukosederivaten und die Mutarotation der Zuckerarten. Z.P.C. 52. 97. — *C. Tanret* 53. 692.

**2219.** *E. Reinbach* und *O. Weber.* Über Einwirkung anorganischer Substanzen auf die Drehung von Lävulose und Glukose. Z.P.C. 51. 473.

**2220.** *J. W. Mellor* und *L. Bradshaw.* Die Kinetik der Zuckerinversion. Z.P.C. 48. 353.

**2221.** *V. Henri.* Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Wirkung der Enzyme, der Toxine und Antitoxine und der Agglutinine. Z.P.C. 51. 19.

**2222.** *H. F. Barendrecht.* Enzymwirkung. Z.P.C. 49. 456; 54. 367.

**2223.** *A. W. Visser.* Reaktionsgeschwindigkeit und chemisches Gleichgewicht in homogenen Systemen und deren Anwendung auf Enzymwirkungen. Z.P.C. 52. 257.

Siehe auch 23.

### Physikalische Chemie.

**2224.** *E. Abel.* Wege und Ziele der exakten Forschung in der physikalischen Chemie. Ö.C.Z. (2) 8. 517.

**2225.** *J. Schröder.* Zwei Demonstrationsapparate für Vorlesungen über physikalische Chemie. Z.A.K. 1. 427.

**2226.** *J. Walker.* The determination of avidity by the polarimetric method Z.P.C. 46. 30.

**2227.** *E. Briner.* Étude des équilibres hétérogènes sous des pressions variables. C.R. 142. 1214.

**2228.** *F. Dreyer.* Über die Kristallisationsgeschwindigkeit binärer Schmelzen. Z.P.C. 48. 467.

**2229.** *M. Wilderman.* On the influence of non-electrolytes and electrolytes upon the degree of dissociation. Z.P.C. 46. 43.

**2230.** *R. Drucker.* Messungen und Berechnungen von Gleichgewichten stark dissoziierter Säuren. Z.P.C. 49. 563.

**2231.** *H. Euler.* Zur Theorie katalytischer Reaktionen. Z.P.C. 47. 353.

**2232.** *H. Kauffmann.* Zur Theorie der Pseudosäuren. Z.P.C. 47. 618.

**2233.** *K. Drucker.* Studien an wässrigen Lösungen aliphatischer Säuren. Z.P.C. 52. 641.

**2234.** *H. Euler.* Über Löslichkeitserniedrigung. Z.P.C. 49. 303.

**2235.** *J. Koppel.* Die Bildungs- und Löslichkeitsverhältnisse analoger Doppelsalze. Z.P.C. 52. 385.

**2236.** *H. Jahn.* Über die Erniedrigung des Gefrierpunktes in den verdünnten Auflösungen stark dissoziierter Elektrolyte. Z.P.C. 50. 129.

**2237.** *M. Bodenstein* und *A. Geiger.* Die Dissoziation von BrH und ClH. Z.P.C. 49. 70.

**2238.** *A. H. W. Aten.* Untersuchungen über das System S—Cl. Z.P.C. 54. 55.

**2239.** *H. Goldschmidt* und *H. Larsen.* Über die katalytische Wirkung von Metallchloriden. Z.P.C. 48. 424.

**2240.** *W. Knopp.* Über die Löslichkeitsbeeinflussung von H und Stickoxydul in wäßrigen Lösungen verschieden dissoziierter Stoffe. Z.P.C. 48. 97.

**2241.** *H. Goldschmidt* und *K. Ingebrechtsen.* Über die Reduktion von Nitrokörpern durch Zinnhalogenüre. Z.P.C. 48. 235.

**2242.** *M. Trautz.* Zur physikalischen Chemie des Bleikammerprozesses. Z.P.C. 47. 513.

**2243.** *E. Baur.* Systeme aus Kieselsäure und Flußsäure. Z.P.C. 48. 483.

**2244.** *R. Abegg.* Über die Löslichkeitsverhältnisse einiger schwerlösliger Ag-salze. Z.P.C. 46. 1.

**2245.** *R. Luther.* Die Hydrolyse des Quecksilberchlorids. Z.P.C. 47. 107.

**2246.** *H. M. Goodwin* and *R. D. Mailey.* On the physical properties of fused magnesium oxide. P.R. 23. 22.

**2247.** *S. Tijmstra.* Leitfähigkeitsbestimmungen an Lösungen von Na in absoluten und mit $H_2O$ verdünnten Alkoholen und im Gemische von 2 Alkoholen. Z.P.C. 49. 345.

**2248.** *C. E. Fawsitt.* Physikalisch-chemische Untersuchungen in der Amidgruppe. Z.P.C. 48. 585.

**2249.** *C. S. Hudson.* Über die Hydratbildung des Milchzuckers in Lösung. Z.P.C. 50. 273.

**2250.** *P. Walden* und *M. Centnerszwer.* Über die Molekulargrößen einiger Salze in Pyridin. Z.P.C. 55. 321.

**2251.** *S. Arrhenius.* Zur physikalischen Chemie der Agglutinine. Z.P.C. 46. 415.

**2252.** *F. Auerbach.* Der Zustand des $H_2S$ in Mineralquellen. Z.P.C. 49. 217.

**2253.** *P. Saurel.* On indifferent points. J.P.C. 9. 556.

Siehe auch 2766.

### Phasenlehre.

**2254.** *S. Sano.* Note on Gibb's phase rule. P.T.M. 2. 391.

**2255.** *R. Wegscheider.* Nachtrag zu meinen Mitteilungen: Zur Kenntnis der Phasenregel. Z.P.C. 52. 171.

**2256.** *A. Byk.* Zu den Ableitungen der Phasenregel. Z.P.C. 55. 250.

**2257.** *G. Galeotti.* Gilt dic Phasenregel auch für Kolloide? Z.P.C. 54. 727.

**2258.** *P. P. Fedotieff.* Der Ammoniaksodaprozeß vom Standpunkt der Phasenlehre. Z.P.C. 49. 162.

**2259.** *N. N. Schiller.* Die Unstetigkeit der Ableitung des Drucks nach der Temperatur als wesentliche Bedingung der Phasenregel (russ.). B. U.K. 1905 d. 10. 45.

**2260.** *N. Schiller.* Die Bedeutung der Unstetigkeit der 1. Derivierten des Druckes nach der Temperatur bei der Feststellung der Phasenregel. Z.P.C. 54. 451.

**2261.** *W. D. Bancroft.* Crystallization in binary systems. Z.P.C. 46. 87.

**2262.** *A. Byk.* Zu den Ausnahmen von der Phasenregel, besonders bei optisch-aktiven Körpern. Z.P.C. 45 465; 47. 223; 49. 233. — *R. Wegscheider* 697; 47. 740; 50. 357.

**2263.** *J. J. van Laar.* Die Gleichung einer idealen eutektischen Kurve in einem ternären System und ihre Benutzung zur Berechnung eines eventuellen Umwandlungspunktes zweier Isomeren neben Lösung. Z.P.C. 55. 64.

**2264.** *H. W. Bakhuis-Roozeboom* und *A. H M. Aten.* Gleichgewichte zwischen festen und flüssigen Phasen in ternären Systemen, welche pseudobinär sind mit Anwendung zur Erklärung anormaler Schmalz- und Lösungserscheinungen. Z P.C. 53. 449.

**2265.** *H. W. Bakhuis - Roozeboom.* De verschillende takken der driephaselijn voor vast, vloeibaar, damp in binaire stelsels waarin een verbinding voorkomt. C.A.A. 14. 374; 501.

**2266.** *J. D. van der Waals.* La forme des sections de la surface de saturation par des plans perpendiculaires à l'axe des $x$ dans le cas où existe entre deux températures un système de 3 phases. A.N. (2) 10. 483.

**2267.** *J. D. van der Waals.* De ($T$-$x$)-evenwichten van vaste en fluïde phasen bij veranderlijke waarden van den druk. C.A.A. 14. 183.

**2268.** *J. J. van Laar.* Over het verloop van smeltlijnen bij verbindingen welke in de vloeibare phase gedeeltelijk gedissocieerd zijn bij willekeurige verhouding der ontledingsproducten. C. A.A. 14. 711.

**2269.** *J. v. Narbutt.* Die Schmelz-, Siede- und Dampfkurven (760 mm Druck) in den binären Systemen Ortho- + Para-, Ortho- + Meta-, Para- + Meta-Bromnitrobenzol und die Schmelzkurven der Gemische von Diphenylamin und Phenanthren. Z.P.C. 53. 697.

**2270.** *G. Preuner.* Das Gleichgewicht zwischen Fe, Eisenoxyduloxyd, Wasserstoff und Wasserdampf. Z.P.C. 47. 385.

2271. *J. v. Zawidzky* und *M. Centnerszwer*. Über retrograde Mischung und Entmischung. A.P.L. (4) 19. 426.

2272. *R. Wegscheider*. Zum Begriff der unabhängigen Bestandteile II. Z.P.C. 45. 496; 49. 229. — *J. J. van der Laar* 47. 228.

Siehe auch 660; 869; 1299; 2187.

### Photochemie.

2273. *R. Luther*. Aufgaben der Photochemie. Z.W.P. 3. 257.

2273a. *G. Ciamician* und *P. Silber*. Chemische Lichtwirkungen. C.B. 38. 3813.

2274. *R. Luther* und *F. Weigert*. Über umkehrbare photochemische Reaktionen im homogenen System Anthracen und Dianthracen. Z.P.C. 51 297; 53. 385.

2275. *A. Guébhard*. Explication énergétique simple de quelques vieilles observations dites D' „Actions chimiques de la lumière". J.P. (4) 5. 39.

2276. *F. Weigert*. Über umkehrbare photochemische Reaktionen. J.P.R. 19. 73.

2277. *A. Slator*. Eine Untersuchungsmethode für Lichtreaktionen in homogenen Systemen. J.P.R. 19. 12.

2278. *A. W. Steward* and *E. C. C. Baly*. The relation between absorption spectra and chemical constitution. J.C.S. 89. 489; 502; 540.

2279. *M. Trautz*. Studien über Chemilumineszenz. Z.P.C. 53. 1.

2280. *H. Weiss*. Solarisatiom in Bromsilberschichten. Z.P.C. 54. 305.

2281. *K. Byk*. Zur Frage der Spaltbarkeit der Razemverbindungen durch zirkular-polarisiertes Licht. Z.P.C. 49. 641.

2282. *S. E. Sheppard* und *C. C. R. Mees*. Die Theorie photographischer Prozesse. Z.W.P. 3. 354.

2283. *P. Villard*. Sur les phénomènes pseudophotographiques. S.F.P. 238. 3.

2284. *E. Rothé*. Nouvelles recherches sur la photographie des couleurs. A.U.G. 17. 511.

2285. *J. M. Eder*. Über dic Natur des latenten Lichtbildes. Z.W.P. 3. 329.

Siehe auch 183; 1033; 1038; 2198; 2218 bis 2219; 2612.

### Thermochemie.

2286. *J. H. van't Hoff*. Die Thermochemie. Ö.C.Z. (2) 9. 53.

2287. *E. Bose*. Bemerkungen zu einem thermochemischen Satze Julius Thomsens. P.Z. 7. 503.

2288. *A. Fliegner*. Über den Wärmewert chemischer Vorgänge. V.N.Z. 50. 201.

2289. *J. Fischer*. Eine thermochemische Theorie der Assimilation. Z.E. 12. 654.

2290. *C. Zenghelis*. Chemische Reaktionen bei extrem hohen Temperaturen. Z.P.C. 46. 287.

2291. *F. Dolezalek* und *K. Finckh* Zur Thermodynamik des heterogenen hydrolytischen Gleichgewichts. Z.A.C. 50. 82.

2292. *W. Haupt*. Über die Methode der Dampfdichtebestimmung durch Druckvermehrung und ihre Genauigkeitsgrenzen im Verhältnis zu den bekannten Methoden. Z.P.C. 48. 713.

2293. *M. Reinganum*. Über die Frage genauer Molekulargewichtsbestimmungen aus der Dampfdichte. Z.P.C. 48. 697.

2294. *G. Geffcken*. Beiträge zur Kenntnis der Löslichkeitsbeeinflussung. Z.P.C. 49. 257.

2295. *F. Caubet*. Die Verflüssigung von Gasgemischen. Z.P.C. 49. 101.

2296. *E. Jouguet*. Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz. J.M. (6) 1. 347.

2297. *I. Langmuir*. The theory of the dissociation of gases around highly heated wives. S. (2) 24. 203.

2298. *E. Regener*. Über die chemische Wirkung kurzwelliger Strahlung auf gasförmige Körper. A.P.L. (4) 20. 1033.

2299. *J. Thomsen*. Über den relativen Wert der zur Bestimmung der Verbrennungswärme flüchtiger organischer Verbindungen benutzten kalorimetrischen Methoden. Z.P.C. 51. 657.

2300. *J. Thomsen*. Die numerischen Resultate einer systematischen Untersuchung über die Verbrennungswärme und Bildungswärme flüchtiger organischer Verbindungen. Z.P.C. 52. 343.

2301. *E. Cohen* und *T. Strengers*. Physikalisch chemische Studien an sogenannten explosiven Sb. Z.P.C. 52. 129.

2302. *C. E. et H. Guye*. L'influence des fortes pressions sur le potentiel explosif dans différents gaz. A.S.G. (4) 20. 460.

2303. *H. v. Wartenberg*. Bestimmung hoher Temparaturen mit Hilfe chemischer Gleichgewichte und der beiden Wärmesätze. V.D.P.G. 8. 97.

2304. *P. Giran.* Mesure de la chaleur de combustion. B.S.C.P. (3) 25. 24.

2305. *W. Jaeger* und *H. v. Steinwehrs.* Beitrag zur kalorimetrischen Messung von Verbrennungswärmen. Z.P.C. 53. 153.

2306. *W. Nernst.* Über die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermischen Messungen. N.G.G. 1906. 1.

2307. *A. Wörmann.* Die Neutralisationswärme starker Säuren und Basen und ihre Änderung mit der Temperatur und Konzentration. A.P.L. (4) 18. 775.

2308. *W. Nernst.* Gleichgewicht und Reaktionsgeschwindigkeit beim Stickoxyd. Z.E. 12. 527.

2309. *R. Kremann* und *R. v. Hofmann.* Über die Beständigkeitsgrenzen von Molekularverbindungen im festen Zustande und die Abweichungen vom Kopp-Neumannschen Gesetz. A.A.W. 1905. 473.

2310. *R. Lucas.* Untersuchungen über die Feuerschwindung. Z.P.C 52. 327.

2311. *O. Hahn.* Nachtrag zu der Untersuchung des Gleichgewichtes CO $+ H_2O = CO_2 + H_2$. Z.P.C. 48. 735.

2312. *W. Nernst.* Über das Stabilitätsgebiet des $H_2O_2$. Z.P.C. 46. 720.

2313. *F. Fischer* und *H. Marx.* Über die thermische Bildung von Ozon und Stickoxyd in bewegten Gasen. C.B. 39. 2557.

2314. *J. N. Brönsted.* Über die Reduktion des Quecksilberchlorürs durch Ag. Z.P.C. 50. 481.

2315. *W. Longuinine* et *J. Kablukoff.* Détermination des quantités de chaleur dégagées lors de l'addition du brome à quelques substances non saturées. J.C.P. 4. 209.

2316. *W. Meyerhoffer.* Über reziproke Salzpaare. Z.P.C. 53. 513.

2317. *P. Lebeau.* Sur la décomposition sous l'action de la chaleur et du vide d'un mélange d'un carbonate alcalin et d'un carbonate alcalino-terreux. A.C.P. (8) 6. 433.

2318. *J. H. van't Hoff, E. F. Armstrong, W. Hinrichsen, F. Weigert* und *G. Just.* Gips und Anhydrit. A.Z.C. Z.P.C. 45. 257.

2320. *G. N. Lewis.* Über Silberoxyd und Silbersuboxyd. Z.P.C. 55. 449.

Siehe auch 543; 2259—60; 2745; 2767 bis 2768; 2770; 2773; 3669.

### Elektrochemie.

2321. *W. Löb.* Physikalisch-chemische Seiten der organischen Elektrochemie J.E. 12. 2.

2322. *Chaumet.* Les progrès récents de l'électrochimie. B.S.F.P. 1905. 115.

2323. *J. W. Richards.* Electrochemical calculations. J.F.J. 159. 134; 161. 131; 161.

2324. *F. Haber* und *R. Russ.* Über die elektrische Reduktion. Z.P.C. 47. 257.

2325. *T. Noda.* Über die Zersetzung des Kohlendioxyds durch die Spitzenentladung. A.P.L. (4) 19. 1.

2326. *R. Pohl.* Über die Einwirkung stiller elektrischer Entladung auf $NH_3$ und O. V.D.P.G. 8. 10.

2327. *E. Warburg.* Bemerkungen über die chemische Wirkung der stillen Entladung. V.D.P.G. 7. 291.

2328. *W. Löb.* Studien über die chemische Wirkung der stillen elektrischen Entladung. Z.E. 12. 282.

2329. *R. Abegg.* Über die Gültigkeit des Faraday'schen Gesetzes für Metalle von verschiedenwertigen Ionen I. Z.E. 12. 457.

2330. *W. Nernst* und *J. Sand.* Elektromotorisches Verhalten der HOCl. Z.P.C. 48. 601.

2331. *F. Dolezalek* und *F. Krüger.* Vorlesungsversuch zur Demonstration des Spannungsgesetzes für Elektrolyte. Z.E. 12. 669.

2332. *F. Fischer.* Die chemische Übertragbarkeit der Metallpotentiale und der chemische Lösungsdruck der Metalle. Z.P.C. 52. 55. — *R. Luther* 626.

2333. *M. Reinganum.* Das elektrochemische Äquivalent bei der Elektrizitätsleitung der Metalle. Z.E. 11. 851.

2334. *L. Pissarjewsky* und *N. Lemcke.* Der Einfluß des Lösungsmittels auf die Gleichgewichtskonstante und die Beziehung zwischen dem elektrischen Leitvermögen und der inneren Reibung. Z.P.C. 52. 479.

2335. *D. Tomasi.* Bemerkung über den Ausdruck „Stromdichte". R.C.Z. 13. 129.

2336. *F. Haber* und *F. Goldschmidt.* Der anodische Angriff des Fe durch vagabundierende Ströme im Erdreich und die Passivität des Fe. Z.E. 12. 49.

2337. *J. Tafel.* Über die Polarisation bei kathodischer H-entwicklung. Z.P.C. 50. 641.

2338. *L. Houllevigne.* L'ionoplastie F.M. 15. 187.

2339. *J. H. Mathews.* On the relation between electrolytic conduction, specific inductioe capacity and chemical activity of certain liquids. J.P.C. 9. 641.

**2340.** *P. V. Bevan.* A method of following the course of certain chemical actions and a period of induction in the action of excess of water on monochloracetic acid. P.C.P.S. 13. 269.

**2341.** *M. Levin.* Beiträge zur Theorie der Löslichkeitsbeeinflussung. Z.P.C. 55. 513.

**2342.** *J. Walker.* Theorie der amphoteren Elektrolyte. Z.P.C. 49. 82.

**2343.** *R. Mewes.* Einige Bemerkungen über den 2. Hauptsatz mit besonderer Berücksichtigung seiner Beziehungen zur Theorie der Elektrolyse. E.C.Z. 12. 74; 115.

**2344.** *F. Haber.* Über Gasketten bei hohen Temperaturen. Z.E. 12. 415.

**2345.** *O. Sackur.* Die anodische Auflösung von H und seine Passivität. Z.P.C. 54. 641.

**2346.** *V. Sammet.* Die Gleichgewichte $6H^{\cdot} + 5J' + JO_3' \rightleftarrows 3J_2 + 3H_2O$ u. $6H^{\cdot} + 5Br' + BrO_3' \rightleftarrows 3Br + 3H_2O$ chemisch und elektromotorisch bestimmt. Z.P.C. 53. 641.

Siehe auch 1464; 2768—69; 3669.

### Elektrolyse.

**2347.** *A. P. Sokolov.* Sovremennoe sostojanie učenija ob electrolize (Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse von der Elektrolyse. R.P.W. 3. 176.

**2348.** *L. Kahlenberg.* The theory of electrolytic dissociation. P.M. (6) 10. 662.

**2349.** *Brillouin.* Considérations théoriques sur la dissociation électrolytique. A.C.P. (8) 7. 289.

**2350.** *R. Malmström.* Versuche einer Theorie der elektrolytischen Dissoziation unter Berücksichtigung der elektrischen Energie. Z.E. 11. 797; A.P.L. (4) 18. 413; 19. 440.

**2351.** *E. Wilson.* Alternate current elektrolysis. T.F.S. 1. 305

**2352.** *M. Le Blanc,* Elektrolyse mit Wechselstrom. Z.E. 11. 705.

**2353.** *A. Löb.* Elektrolytische Untersuchungen mit symmetrischem und unsymmetrischem Wechselstrom. Z.E. 12. 179.

**2354.** *W. Palmaer.* Ein Modell und ein Versuch zur Demonstration der Konzentrationsänderungen während der Elektrolyse. Z.E. 12. 511.

**2355.** *G. B. Rambaldini.* L'elettrolisi a 3 liquidi. Pol. 50. 195.

**2356.** *V. V. Nikolaev.* Električeskoe pole v elektrolitach (Elektrisches Feld in Elektrolyten). J.R.P.C.G. 34. 25.

**2357.** *L. G. Kollock* and *E. F. Smith.* The use of the rotating anode and mercury cathode in electro-analysis. J.A.C.S. 27. 1255.

**2358.** *H. Lundén.* Amphotere Elektrolyte. Z.P.C. 54. 532.

**2359.** *J. Walker.* Theorie der amphoteren Elektrolyte. Z.P.C. 51. 706.

**2360.** *M. Chanoz.* Sur le coefficient de pureté des électrolytes. C.R. 141. 881.

**2361.** *E. van der Ven.* Sur le transport des liquides par le courant électrique. A.M.T. (2) 9. 573.

**2362.** *R. Luther* und *F. J Brislee.* Zur Kenntnis des Verhaltens „unangreifbarer" Anoden, insbesondere bei der Elektrolyse von Salzsäure. Z.P.C. 45. 216. — *E. Bose* 49. 227.

**2363.** *E. Mallet* et *P. A. Guye.* Études physicochimiques sur l'électrolyse des clorures alcalins III. J.C.P. 4. 222.

**2364.** *J. B. Westhaver.* Über das Verhalten von Anoden aus Ir, Pt und Rh bei der Elektrolyse verdünnter Schwefelsäure. Z.P.C. 51. 65.

**2365.** *E. Brunner.* Zur Kenntnis der Auflösungsgeschwindigkeit des Zinkes. Z.P.C. 51. 95.

**2366.** *W. Biernacki.* Zwierciadelka żelazne otozymane przez rozpylanie żelaza prądem (Über die Spiegel, die bei der Elektrolyse des Fe entstehen). T.W. 16. 133.

**2367.** *Z. Karaoglanoff.* Über Oxydations- und Reduktionsvorgänge bei der Elektrolyse von Eisensalzlösungen. Z.E. 12. 5.

**2368.** *C. J. Thatcher.* Die elektrolytische Oxydation von Natriumthiosulphat und ihr Mechanismus. Z.P.C. 47. 641.

**2369.** *V. Rothmund* und *K. Drucker.* Über die elektrolytische Dissociation der Pikrinsäure. Z.P.C. 46. 827.

**2370.** *P. Farup.* Die Geschwindigkeit der elektrolitischen Reduktion von Azobenzol. Z.P.C. 54. 231.

Siehe auch 659; 1419; 1445—46; 2343; 2771.

### Magnetochemie.

**2371.** *E. F. Burton* and *P. Phillips.* Susceptibility of Fe in colloidal solution. P.C.P.S. 13. 260.

### Mathematische Physiologie.

**2372.** *G. Kolosov.* Matematičeskaja teorija pribora Barnad'a i Hill'ja dlja opredelenija krovjanogo davlenija (Ma-

them. Theorie des Apparats von Barnard und Hill zur Erklärung des Blutdruckes). S.N.J. 14. 73.

Siehe auch 62.

### Mathematische Zoologie.

**2373.** *Ringelmann.* Mesure du travail mécanique fourni par les boeufs de la race limousine. C.R. 141. 628.

**2373.** *W. Wasilkowski.* Geometryczne uzasadnienie budowy komórek pszczelnych (Geometrische Betrachtungen über den Aufbau der Bienenzellen). M.L. 19. 396.

Siehe auch 251.

### Mathematische Botanik.

**2375.** *W. W. Lepeschkin.* Über den mathematischen Ausdruck der Geschwindigkeit des einseitigen Wasserstroms durch die Zelle nach dem ersten und dritten Schema von Pfeffer. Z.P.C. 48. 596.

**2376.** *F. Kövessi.* Loi de l'accroissement en volume dans les arbres. C.R. 142. 1430.

### Forstmathematik.

Siehe 2757—58; 3416.

### Technik.

**2377.** *A. Stier.* Technische Arbeit. D.V.M. 15. 438.

Siehe auch 133.

### Technische Mechanik.

**2378.** *A. W. Johns.* Normal pressures on thin moving planes. T.I.N.A. 1904. 1.

### Balken.

**2379.** *W. Trinks.* The deflection of beams by graphics. T.A.S.M.E. 24. 116.

**2380.** *Ramisch.* Bestimmung der Kraft K eines über zwei Öffnungen gestreckten Balkens mittels ihrer Einflußlinie. M.A.G. 1905. 730.

**2381.** *L. Lévy.* Remarques sur la détermination des moments fléchissants produits par le passage d'un convoi sur une poutre à deux appuis simples. N.A. (4) 5. 289.

**2382.** *M. T. Huber.* Über die Berechnung der Dimensionen von Eisenbetonbalken (poln.). C.T.L. 23. 1; 21.

**2383.** *Rössler.* Berechnung des Eisenbetonbalkens mit dreieckigem und trapezförmigem Querschnitt. Z.U.B.B. 4. 188; 206.

**2384.** *Ramisch.* Berechnungsweise zur Bestimmung der Durchbiegung von Eisenbetonbalken. Z.U.B.B. 4. 7.

**2385.** *Twelvetrees.* Design of concrete steel beams. E.R.L. 12. 924.

**2386.** *Chaudy.* Flexion des poutres en béton armé. R.I.P. 36. 500.

**2386a.** Le rôle des attaches en étriers dans les poutres en béton armé. A.T.P.B. 1905. 1153.

**2387.** *Hatt.* Tests on reinforced concrete beams. E.B.R. 51. 170; 545.

**2388.** *Condron.* Strength of reinforced concrete. E.B.R. 51. 374.

**2389.** *Blakeley.* Design of reinforced concrete beams. E.B.R. 51. 591.

**2390.** *Legrand.* Poutres en arc à 3 rotules. R.U.L. 9. 113.

Siehe auch 700; 2890; 2912—15; 3223 bis 3235; 3308; 3512; 3598—99.

### Stäbe.

**2391.** *Ramisch.* Statische Untersuchung eines einfach gekrümmten stabförmigen Verbundkörpers. Ö.W.Ö.B. 11. 264.

**2392.** *H. Zimmermann.* Der gerade Stab mit stetiger elastischer Stützung und beliebig gerichteten Einzellasten. S.A.B. 1905. 898, 1056.

**2393.** *D. K. Bobylev.* O nekotorych slučajach izgiba prjamych steržnej pod vlijaniem sosredotočennych gruzov i soprotivlenija grunta (Über einige Fälle der Biegung der gradlinigen Stäbe unter dem Einfluß der konzentrierten Gewichte und des Widerstands des Bodens). R.I.I. 60. 1.

**2394.** *A. Föppl.* Über die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. S.A.M. 1905. 249

Siehe auch 416—418; 422; 748—749; 2888—89; 2911; 3221—22.

### Träger.

**2395.** *Cunningham.* The design of plate girders. E.R.L. 12. 481.

**2396.** *Skinner.* Variations in standard plans for railroad plate girders. E.B.R. 52. 401.

**2397.** *Janetzky.* Einfluß mobiler Lasten für den Träger auf 2 Stützen. D.T.Z.B. 22 291.

**2398.** *Bleich.* Der statisch unbestimmte Parallelträger mit gekreuzten Diagonalen. Ö.W.Ö.B. 11. 751.

**2399.** *Glaser.* Statische Berechnung eines kreisförmigen, in vier Punkten unterstützten Trägers. Ö.W.Ö.B. 11. 11.

**2400.** *E. Bazant.* Statisch bestimmte durchgehende Fachwerksträger (tschech.). M.A.T.P. 1905 Nr. 27.

**2401.** *P. Neumann.* Zeichnerische Bestimmung der größten Strebenkräfte eines Fachwerkbalkenträgers. Ö.W.Ö.B. 11. 392.

**2402.** *Brockmann.* Eigenschaften und Verwendung der breitflanschigen Träger. B.I.G.B. 1905. 185.

**2403.** *Weiske.* Berechnung der mit doppelter Einlage versehenen Eisenbetonträger. Z.U.B.B. 4. 347.

**2404.** *Granberg.* I-beam buckstays. E.M.J. 80. 487.

**2405.** *J. M. H. R. Kersemaekers.* Maximum buigingsspanningen in normale doorsneeden von I-vormige profielliggers. I.W. 19. 273.

**2406.** *Nitzsche.* Über Einflußlinien. D.T.Z.B. 22. 149.

Siehe auch 761; 2413; 2916—22; 3236 bis 3245; 3600; 3620; 3746.

### Bogenträger.

**2407.** *G. Ramisch.* Elementare Untersuchung des Bogenfachwerkträgers. Z.G.U. 15. 189.

**2408.** *Franck.* Bogenträger mit elastisch eingespannten Kämpfern. Ö.W.Ö.B. 11. 312.

### Platten.

Siehe 2923—24; 3246—50; 3512.

### Fachwerk.

**2409.** *Jonson.* Theory of frame works with rectangular panels and its application to buildings which have to resist wind. P.A.S.C.E. 31. 498.

**2410.** *Ramisch.* Beitrag zur Bestimmung der Spannkraft in der Gegendiagonale eines Fachwerkes. Z.E.M. 8. [illegible]

**2411.** *K. Wieghardt.* Über die Nebenspannungen gewisser hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke. Z.S. 53. 113.

**2412.** *Ramisch.* Verschiebungskreise von Fachwerksknoten. Ö.W.Ö.B. 11. 676.

**2413.** *K. Sándor.* Über die günstigste Form des Gitterträgers, ein Beitrag zur Theorie des Fachwerks. S.M.B. 1905. 43.

Siehe auch 716; 2400; 2407; 2442; 2925 bis 2927; 3601—04.

### Bogen.

**2415.** *B. A. Smith.* Arches. R.A.A. 9. 621.

**2416.** *C. Guidi.* Una proprietà degli archi elastici. A.A.T. 40. 735.

**2417.** *Auric.* Sur le calcul d'un arc en maçonnerie. C.R. 141. 621.

**2418.** *B. J. W. Reuser.* Die vorteilhafteste Pfeilhöhe eines gleichmäßig belasteten symmetrischen Dreigelenkbogens mit kreisförmiger Mittellinie. Z.S. 52. 401.

**2419.** *B. J. W. Reuser.* De invloed van de pijlhoogte van een paraboolboog met 3 scharnieren op de benoodigde materiaalhoeveelheid (gelijkmatig verdeelde belasting). I.W. 20. 78.

**2420.** *Keith.* A 3-hinged concrete steel arch. E.B.R. 52. 104.

**2421.** *Leffler.* Four points in the design of reinforced concrete arches. P.A.S.C.E. 31. 271; T.A.S.C.E. 55. 183.

Siehe auch 2390; 2437; 2928—30; 3251 bis 3255; 3268; 3308; 3616; 3618.

### Dächer.

**2422.** *Teasdale.* How to design a roof principal. A.G.L.J. 82. 242! J.G.L. 89. 228.

**2423.** *Turley.* Statistische Berechnung von Eisenbetondecken. Z.U.B.B. 4. 135.

**2424.** *Cain.* Theory of the spherical or conical dome of reinforced concrete or metal. P.A.S.C.E. 31. 277; T.A.S.C.E. 55. 201.

**2425.** *Emrich.* Formulas for hips and valleys. E.B.R. 51. 31.

Siehe auch 3256—58; 3504.

### Gewölbe.

**2426.** *S. Wellisch.* Die Gewölbetheorie im Lichte der Methode der kleinsten Produkte. Z.S. 53. 146.

**2427.** *Ramisch.* Gewölbewirkung bei der doppelt eingespannten Platte. Z.U.B.B. 4. 95.

**2428.** *v. Thullie.* Dimensionierung der betoneisernen Gewölbe. Ö.W.Ö.B. 11. 571.

**2429.** *L. Rehm.* Eine Studie über die statische Festigkeit der Kuppel-, Tonnen- und Halbkreisgewölbe aus Beton für Wasserreservoirs. H.T.B. 2. 124.

**2430.** *Horowitz.* Berechnung eines Moniergewölbes für Windangriff und abstürzende Lasten. Ö.W.Ö.B. 11. 184.

Siehe auch 3605—08.

### Erddruck.

**2431.** *T. Almansi.* Sull' equilibrio dei sistemi disgregati. A.A.T. 40. 707.

**2432.** *J. Oeltjen.* Angriffspunkt des Erdankers an einem aufgesetzten Bollwerke. W.W.B. 2. 238.

Siehe auch 306; 3175—80; 3342; 3609 bis 3610.

**Erdbau.**

**2433.** *F. J. Vaes.* Rekenplaten voor ophoogingen en afgravingen. I. W. 18. 333.

Siehe auch 3175; 3180—83; 3262—65; 3611.

**Tunnelbau.**

Siehe 2008; 2931; 3162; 3187; 3266.

**Strassenbau.**

**2434.** *F. Loewe.* Krümmungshalbmesser und Breite der Straßenwendeplätze. Z.T.S. 22. 505.

Siehe auch 2787.

**Brückenbau.**

**2435.** *Robertson.* Bridge design. E.R.L. 12. 494; 584.

**2436.** *H. Schmidt.* Ein abgekürztes Verfahren für die Berechnung der lichten Weiten von Wehren und Brücken. W.W.B. 2. 240.

**2437.** *Ramisch.* Berechnung einer Betonbrücke mit flachen Kreisbogen, bei der Zugbeanspruchungen nicht vorkommen sollen. Z.U.B.B. 4. 105.

**2438.** *Turneaure.* Real influence of moving loads on bridge structures. E. B.R. 52. 560.

**2439.** *Descans.* Problème des forces mobiles. A.T.P.B. 62. 7.

**2440.** *Turner.* Windpressure on bridges. R.E. 26. 5.

**2441.** *Rösler.* Berechnung massiver Dreigelenkbrücken mittels Einflußlinien. D.T.Z.B. 22. 344.

**2442.** *Coulmas.* Zur Theorie der Längsverbände eiserner Fachwerkbrücken. Ö.W.Ö.B. 11. 719.

**2443.** *v. Friedrichs.* Theorie der versteiften Hängebrücken mit 3 Öffnungen. R.I.Z. 31. 221.

**2444.** *Strong.* Filing and indexing tracings of railroad bridges. E.B.R. 51. 194.

Siehe auch 2716; 2788; 2901; 2932—33; 3267—71; 3505; 3602; 3613—27; 3746.

**Baustatik.**

**2445.** *A. P. van der Vliet.* Ob odnoj zadače stroitelnoj mechani (Über eine Aufgabe der Baumechanik). B.A. I.V.C. 1903. 224; 241; 266.

**2446.** *Turley.* Die wirtschaftlich günstigsten Abmessungen bei Bauteilen aus Eisenbeton. Z.U.B.B. 4. 22.

**2447.** *S. Canevazzi.* Sulla determinazione dell' asse neutro o di rotazione nelle sezioni trasversali di un solido in murature, simmetrico rispetto ad un piano assiale e sollecitato da forze agenti nel piano di simmetria. M.I.B. (6) 2. 81.

Siehe auch 341—342; 562; 704—705; 757—758; 2409; 2715; 2738; 2893—98; 3272—76; 3309; 3612; 3628—30.

**Baumaterialienkunde.**

Siehe 671; 759; 768.

**Fahrzeuge.**

**2448.** *A. Krebs.* Conditions d'établissement et d'application d'un amortisseur progressif à la suspension des véhicules sur route. C.R. 141. 143.

**2449.** *H. Elsner.* Graphisches Verfahren zur Darstellung der Bewegungsvorgänge bei Lenkvorrichtungen. M.W. B. 6. 280.

**2450.** *R. Conrad.* Der Zusammenhang zwischen Tourenzahl und Drehmoment beim „Protos"-motor. M.W.B. 5. 71; 112.

**2451.** *H. Güldner.* Leistungsprüfungen an Motorwagen. M.W.B. 5. 110.

Siehe auch 323; 2789—93; 3277; 3312; 3442; 3456; 3746.

**Fahrrad.**

**2352.** *E. Stasse.* Aperçu sur la théorie de l'équilibre cycliste: essai d'une explication de lâche-mains. U.I. 1901. 35.

**2453.** *O. Frey.* Die Verwendung von Fahrrad und Fahrradteilen zu physikalischen Demonstrationen. Z.P. 19. 224.

**Eisenbahnwesen.**

Siehe 2396; 2444; 2590; 2761; 2794 bis 2816; 2934; 3096; 3279—80; 3313.

**Lokomotiven.**

**2454.** *M. Radaković.* Über die theoretische Behandlung des Problems der störenden Lokmotivbewegungen. Z.S. 53. 225.

Siehe auch 2817—26; 3004; 3278; 3670 bis 3674.

**Maschinen.**

2455. *T. J. Vaes.* Een eenvoudige constructie voor Koppelkrommen bij drijfstang en kruk. I.W. 19. 206.

Siehe auch 315; 321; 2450; 2506; 2767; 2827—41; 3434; 3444—46; 3462—69; 3620; 3648.

**Maschinenelemente.**

2456. *Metcalf.* Notes and constants on springs. M.W.M. 37. 172.

2457. *Gibson* The design of fly-wheel. E.R.L. 12. 488.

Siehe auch 762; 2879; 3589—90.

**Wärmemaschinen.**

2458. *L. Montel.* Rappresentazione grafica dello spostamento dello stantuffo dal punto di mezzo della corsa nel caso di transformazione del moto con biella e manovella. R.T.T. 2. 82.

2459. *G. Andrault.* Calcul élémentaire du rendement d'une machine thermique réversible utilisant deux thermostats. J.P. (4) 5. 97.

Siehe auch 3675—77.

**Dampfmaschinen.**

2460. *H. Mäklin* Ångmaskiners inre friktion och ängkonsumtion. T.F.T. 7. 169.

2461. *A. Witz.* Il rendimento termico delle macchine a vapore e dei motori a gas. I.I.M. 16. 100; 114; 135; 161.

2462. *M. Ferrero.* Il flusso del calore entro le pareti dei cilindri delle macchine a vapore. R.T.T. 2. 288.

2463. *N. Matteucci.* Determinazione razionale delle dimensioni principali dei condensatori a superficie delle macchine a vapore navali. R.M.R. 1902. 303.

Siehe auch 1209; 2487—88; 2711; 2719 bis 2726; 2842—46; 3281—82; 3373; 3678—97.

**Dampfkessel.**

2464. *L. Jannin.* Circulation de l'eau dans les chaudières. B.T.A.M. 2. 204.

Siehe auch 3283; 3671; 3703—09; 3722; 3742.

**Schiffsmaschine.**

2465. *H. C Vogt.* Pendulpropelleren og Amerikanernes anskuelser om fremtidens mest økonomiske fragtskibe. J.K. 13. 1.

Siehe auch 2463; 2470; 2478—79; 2726; 2845; 2850—51; 3387—90; 3710—11.

**Indikatoren.**

2466. *A. Staus.* Neue Indikatoren. G.M.T. 3. 101.

Siehe auch 731; 2847; 3042.

**Regulatoren.**

Siehe 2776; 2829; 2848—51; 3015—17; 3078. 3443; 3518.

**Gasmotoren.**

2467. *E. Körting.* Sulla temperatura del cilindro di un motore a gas. R.T.T. 2. 174.

2468. *A. Wagener.* Über die Vorgänge des Ausspülens und Ladens bei Zweitaktgasmotoren. G.M.T. 3. 69; 88; 106; 125.

2469. *J. Körting.* Der neue doppelt wirkende Viertaktmotor der Gasmotorenfabrik Deutz und die Zweitaktfrage. G.M.T. 2. 166.

2470. *R. Mewes.* Über die Verwendbarkeit der Gasmaschine als Schiffsmaschine. Z.A.J.B. 6. 295; 305.

Siehe auch 765; 2461; 2852—56; 3698—3702; 3712—14.

**Hydraulik.**

2471. *G. H. Fenkell.* A study in hydraulics. J.A.E.S. 26. 156.

2472. *E. Fontaneau.* Préliminaire d' hydraulique. A.F. 1905. 46.

2473. *V. v. Lang.* Über hydraulische Schulversuche. V.B.T.C.U. 7. 100.

2474. *W. T. Franklin.* A lecture experiment in hydraulics. S. (2) 22. 793.

2475. *Horne.* Hydraulic analogy to the Carnot cycle. M.W.M. 37. 31.

2476. *E. Maillet.* Sur les solutions de certains systèmes d'équations différentielles; applications à un système hydraulique de *n* reservoirs. S.M. 33. 129.

2477. *T. Levi-Cività.* Sulla contrazione delle vene liquide. A.I.V. 64. 1465.

2478. *H. C. Vogt.* Om oscilleerende propellere. J.K. 12. 153.

2479. *H. C. Vogt.* Nogle bemaerkninger om propellers virkemaade. T.S.K. 74. 219.

2480. *Tolman.* Beitrag zur Berechnung von Staukurven. Ö.W.Ö.B. 11. 405.

**2481.** *Church.* Formulas and computations for horsepower value of streams. E.B.R. 52. 11.

**2482.** *Matakiewicz.* Versuch der Aufstellung einer Geschwindigkeitsformel für natürliche Flußläufe. Ö.W.Ö.B. 11. 767.

**2483.** *G. Eneström.* Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli. B.M. (3) 6. 16.

Siehe auch 2858—60; 3290; 3318—3405.

### Wasserleitungen.

Siehe 521; 768; 3849—53.

### Wasserbau.

Siehe 3347—48; 3354—55; 3395—98.

### Wehre.

Siehe 2436.

### Wasserräder.

Siehe 3357—58.

### Turbinen.

**2484.** *K. A. Ahlfors.* Modern turbine byggnad. T.F.T. 1902. 143.

**2485.** *H. Dominik.* Mitteilungen über Parsonsturbinen. I.Z.K. 9. 289.

**2486.** *A. Braun.* Gas- bezw. Druckturbine. Z.A.I.B. 7. 170.

**2487.** *A. Riedler.* Über Dampfturbinen. T.C.B.H. 13. 941.

**2488.** *F. Levicki.* Die Curlis-Dampfturbine. E.B.B. 1. 194.

Siehe auch 2717—26; 2845—46; 3025; 3039—41; 3284; 3359—73; 3696—3702.

### Kanalbau.

**2489.** *Allitsch.* Beitrag zur graphischen Ermittelung des Fassungsvermögens von Abwasserkanälen. Ö.W Ö.B. 11. 137.

Siehe auch 3374—80.

### Schiffsbau.

**2490.** *Biles.* The strength of ships. T.I.N.A. 47. 80.

**2491.** *J. Bruhn.* Some points in connection with the transverse strength of ships. T.I.N.A. 1904. 1.

**2492.** *Babcock.* Longitudinal bending moments of certain lake steamers. M.Eg. 10. 502.

**2493.** *Alexander.* The influence of the proportions and form of ships upon their longitudinal bending moments among waves. T.I.N A. 47. 116.

**2494.** *Norton.* Notes on the strength of watertight bulk heads for battleships and cruisers. M.Eg. 10. 505.

Siehe auch 408—10; 2862; 3204; 3285—86; 3381; 3383—94.

### Schiffsbewegung.

**2495.** *R. Henderson.* A correction to be applied to the course of a twin-screw-vessel when using but one screw. P.N.I. 31. 457.

**2496.** *Johns.* The effect of motion ahead on the rolling of ships. T.I.N.A. 47. 186.

**2497.** *E. Fournier.* Diminution de la vitesse et changement d'assiette des navires par l'action réflexe de l' eau sur le fond. C.R. 142. 1560.

**2498.** *H. Garron.* Experiments on the effect of depth of water on speed having special reference to destroyers recently built. S.W. 2. VIII 05.

**2499.** *Goecke.* Zur Feststellung des Einflusses von Tiefgangsänderungen auf die Schiffsgeschwindigkeit. M.R.B. 1906. Nr. 2.

**2500.** *L. Benjamin.* Die Vibrationserscheinungen an Dampfern. H.H. 1906. Nr. 3.

**2501.** *A. E. Gatewood.* Remarks on screw propulsion. P.N.I. 32. Nr. 1.

**2502.** *H. C. Vogt.* Om fremdrivning of skibe. I.K. 84; T.S.K. 75. 37.

Siehe auch 507—09; 3379; 3382.

### Pumpen.

**2503.** *G. A. Liliencrantz.* The Haskell self-registering water gauge. J.W.S.E. 8. 676.

Siehe auch 763—64; 2727—29; 3353; 3399—3404.

### Ventilation.

Siehe 563; 2732—36; 3720.

### Luftschiffahrt.

**2504.** *J. Boyer.* The modern aëronaut T.C.I. 32. 13.

**2505.** *M. Püschel.* Luftschiffahrt und Flugtechnik. A.P.T. 30. 711; 731.

**2506.** *Bataille.* Mémoire relatif à un propulseur applicable à la navigation aérienne. A.N.P. 85. 217.

**2507.** *Sébillot.* Mémoire sur les navires aériens à air dilaté. A.N.P. 35. 234.

**2508.** *H. Deslandres.* Méthode permettant de déterminer la vitesse propre des aérostats dirigeables. M.I. 1902.

**2509.** *Crocco.* Sull' equilibrio delle macchine volanti. R.A.G. 1905. B. 23.

**2510.** *E. Taffoureau.* Sur le coefficient d' utilisation des hélicoptères. C.R. 141. 878.

Siehe auch 2741—42.

### Architektonische Akustik.

**2511.** *W. C. Sabine.* Architectural acoustics. P.A.Bo. 42. 51.

**2512.** *W. Sabine.* Sur l'acoustique des salles. I.B. 1901. 482.

**2513.** *Morage.* Qualités acoustiques de certaines salles pour la voix parlée. C.R. 142. 878.

Siehe auch 2611; 2746—47.

### Architektonische Beleuchtungskunde.

**2514.** *Hough.* The development of illumination. A.G.L.J. 82. 85.

**2515.** *M. F. Alvárez.* Estudios sobre luces y vistas en las habitaciones y attura di estas en calles y patios. M.y R.M. 20. 291.

**2516.** *Müller.* Versuche über die Beleuchtung von Schulräumen und Lehrsälen. Z.B.W.B. 11. 133.

Siehe auch 3557—60.

### Photographie.

**2517.** *J. Renaux.* Contribution à l'étude des écrans photographiques. C.R. 142. 38.

**2518.** *Ponsot.* Photographie interférentielle; variation de l'incidence; lumière polarisée. C.R. 142. 1506.

Siehe auch 886; 984; 1041; 1056; 1155; 2282—85; 3555; 3561.

### Spektralanalyse.

**2519.** *L. Borri.* Note di spettroscopia. M.A.M. (3) 5.

**2520.** *B. E. Moore.* Spektroskopische Studie an Lösungen von Cu und Co. Z.P.C. 55. 641.

**2521.** *W. Hermann.* Zur Spektroscopie des N (Dopplereffekt, positve N-ionen). P.Z. 7. 567.

Siehe auch 1010; 1045.

### Heizung.

Siehe 3723—30.

### Elektrotechnik.

**2522.** *K. Noack* Elementare Messungen aus der Elektrotechnik. A.D. P.N. 2. Nr. 1.

Siehe auch 2866—69; 2939.

### Elektrische Leitungen.

**2523.** *Vogl.* Berechnung der Leitungen für Gleichstrom. B.I.G.B. 1905. 68.

**2524.** *Bauch.* Welches Verteilungssystem macht das Kabelnetz am billigsten. Z.E.M. 8. 357.

Siehe auch 1443; 1509; 2762; 2979—91; 3189; 3520; 3591.

### Elektrische Kraftübertragung.

**2525.** *Hahn.* Berechnung elektrischer Leitungen für Kraftübertragungen. Z.E. M. 8. 3.

**2526.** *P. Gris.* Conférence sur les transports d'énergie électrique à courant alternatif et à courant continu. M.S.L. (8) 2. A. 151.

**2527.** *D. Negrotti.* Calcolo delle lunghe linee di transmissione di energies mediante correnti polifasi. J.C.T. 28 83.

Siehe auch 1573; 1675; 2992—97; 3597.

### Elektrische Eisenbahnen.

Siehe 2870—71; 2998—3007.

### Dynamomaschine.

**2528.** *Poole.* Design and construction of small dynamos and motors. M.W.M. 37. 8.

**2529.** *R. V. Picou.* Les principes généraux dans la construction des dynamos à courant continu. B.S.F.P. 1905. 142.

**2530.** *Senstius.* Limitations in direct-current mechanic design. P.A.I.E.E. 24. 407; 925.

**2531.** *Linker.* Bestimmung des Wirkungsgrades von Gleichstrommaschinen. E.T.R. 22. 211.

**2532.** *P. Riebesell.* Über die Kommutation des Stromes in Gleichstromgeneratoren. Z.S. 53. 337.

**2533.** *Page.* The separation of iron and friction losses in direct current machines. E.R. 57. 910.

**2534.** *G. Mie.* Über die Kurzschlußstromkurve eines Gleichstromankers. Z.S. 53. 37.

**2535.** *Boucherot.* Les principes généraux dans la construction des alternateurs. B.S.F.P. 1905. 228.

**2536.** *Rushmor.* Alternating current generator. J.F.I. 160. 253.

**2537.** *D. I. Puljnj.* Krugova diagrama generatoriv dlja pereminnien prudiv (Über das Kreisdiagramm für Wechselstromgeneratoren). R.S.M. 10. Nr. 2.

**2538.** *Lyon.* Calculation of the armature reaction in alternatòrs. T.Q. 18. 421.

**2539.** *Preuß.* Verfahren zur Bestimmung der Erregerfeldstreuung von Wechselstrommaschinen. E.T.R. 22. 325.

**2540.** *Guilbert.* Expression des puissances fournies par deux alternateurs en parallèle. R.T.P. 26. 107.

**2541.** *H. Linsenmann.* Die elastische Linie des Gehäuses von Drehstrommaschinen mit großen Durchmessern. Z.S. 53. 245.

**2542.** *B. Strasser* und *J. Zerneck.* Über phasewechselnde Oberschwingungen. A.P.L. (4) 20. 759.

Siehe auch 1608; 1674; 2628; 2739; 3008—45; 3497—99.

### Elektromotoren.

**2543.** *A. S. Morris.* Electric motors: a brief outline of their history. S.I.I. 18. 138.

**2544.** *A. Hillairet.* Les motors électriques dans l'industrie. B.S.F.P. 1905. 151.

**2545.** *Knowlton.* Synchronous motors in central stations. A.E.N.Y. 17. 15.

**2546.** *A. A. Kuznezov.* O primanenii sinchronnago dvigatelja v pribore dlja izmerenija raznostej faz v cepjach peremennych tokov (Über die Anwendung des Synchrommotors zur Bestimmung der Phasenverschiebung in Wechselstromnetzen). J R.P.C.G. 34. 30.

**2547.** *Jonides.* Alternating current motor in industrial service. J.I.E.E. 35. 475; E.R. 56. 996.

**2548.** *Churton.* Notes on alternating current induction motors. E.R.N.Y. 47. 818; E.R. 57. 706; E.E.C. 36. 590; P.W.L. 7. 980.

**2549.** *Butt.* The induction motor as generator. E.E.L. 36. 91.

**2550.** *Rogers.* Theory and testing of the polyphase induction motor. E.E.L. 35. 662.

**2551.** *Doubrava.* Single phase motors on polyphase systems. E.R.N.Y. 46. 274.

**2552.** *Cole.* Single phase alternating-current motors. E.C. 42. 652.

**2553.** *Rhodes.* A study of a single-phase series motor. T.Q. 18. 410.

**2554.** *Lamme.* A single-plase motor of the class of alternating-current multipolar machine. W.E. 36. 129.

**2555.** *Bate.* Heating and sparking limits in variable speed motors. E.R. 56. 665; J.I.E.E. 35. 421.

Siehe auch 2528; 2624; 2628; 2872—78; 3046—93; 3484; 3496—97.

### Elektrische Beleuchtung.

**2556.** *P. Weiß.* Les progrès récents de l'éclairage électrique. B.S.F.P. 1905. 267.

**2557.** *J. A. Fleming.* On the ratio between the mean spherical and the mean horizontal candlepower of incandescent electric lamps. P.M. (6) 10. 208; P.P.S.L. 19. 681.

**2558.** *E. F. Roeber.* Thermodynamik der elektrischen Glühlampe. Z.B.W.B. 11. 381.

Siehe auch 1145; 2764; 3044—45; 3094—96; 3548; 3562—63; 3731.

### Telephon.

**2559.** *G. de la Touanne.* État actuel de la téléphone. B.S.F.P. 1905. 302.

**2560.** *C. Chierichetti.* Telefoni. M.T.M. 8. 246.

**2561.** *J. W. Giltay.* Experimentaluntersuchung über die Möglichkeit einer Doppeltelephonie mittels unterbrochener Klänge. M.A.A. 9. Nr. 3.

**2562.** *A. Bull.* Pupins system for telefoneering paa större afstande. E.T.K. 16. 19.

**2563.** *F. Savorgnan di Brazzà.* La telefonia senza fili E.B. 15. 396.

Siehe auch 942; 2594; 2744; 3097—99; 3741.

### Telegraphenwesen.

**2564.** *Devaux-Charbonel.* L'étude expérimentale des transmissions télégraphiques. C.R. 143. 215.

**2565.** *B. O. Peirce.* On the lenghth of the time of contact in the case of a quick tap on a telegraph key. P.A.Bo. 42. 95.

### Drahtlose Telegraphie.

**2566.** *A. Montel.* Sullo stato attuale della radiotelegrafia. A.A.E.I. 30. 82.

**2567.** *F. Savorgnan di Brazzà.* La telegrafia senza fili. E.B. 16. 387.

**2568.** *L. Poincaré.* La télégraphie sans fil. J.D.S. 1906. 36.

2569. *A. Slaby*. Besprovoločnyj telegraf (Drahtlose Telegraphie). R.P.W. 3. 18.

2570. *E. Rutherford*. Wireless telegraphy. C.E.T. 1902. 190.

2571. *A. Turpain*. Les théories de la télégraphie sans fil. B.S.C.I. 1901. 39.

2572. *Q. Majorana*. La telegrafia senza filo. R.I.R. 1902. A. 552.

2573. *P. Lanino*. La telegrafia senza filo. R.E.T.B. 5. 120. 137.

2574. *J. Fleming*. Hertzian wave wireless telegraphy. P.S.M. 63. 97; 193; 362; 439; 551; 64. 53; 152.

2575. *A. Bull*. Afstemt gnisttelegrafi. E T.K. 16. 79; 87.

2576. *C. A. Thorne*. Branly-Popps traadlöse telegrafsystem. E.T.K. 16. 147.

2577. *C. Déguisne*. Über neue Apparate der drahtlosen Telegraphie. J.P.V.F. 1904—05. 43.

2578. *C. Déguisne*. Über die Entsendung von elektrischen Wellen in der Wellentelegraphie. J.P.V.F. 1904—05. 46.

2579. *C Déguisne*. Über abgestimmte Wellentelegraphie. J.P.V.F. 1904—05. 44.

2580. *G. W. Pierce*. Experiments on resonance in wireless telegraph circuits. P.R. 21. 367; 22. 159.

2581. *C. Tissot*. Étude de la résonance des systèmes d'antennes dans la télégraphie sans fil. A.C.P. (8) 7. 320; 433.

2582. *C. Tissot*. Ordre de grandeur des forces électromotrices mises en jeu dans les antennes réceptrices. J.P. (4) 5. 181.

2583. *J. S. Sachs*. Untersuchungen über den Einfluß der Erde bei der drahtlosen Telegraphie. A.P.L. (4) 18. 348.

2584. *C. Tissot*. Les méthodes de mesure dans la télégraphie sans fil. B.S.I.E. (2) 6. 319.

Siehe auch 1145; 2563; 3103—13.

### Kabel.

2585. *H. Czopowski*. Obliczenie lin drucianych pramjących na ciągnienie (Über die Berechnung der Festigkeit eiserner gespannter Drahtseile). P.T.W. 42. 13; 41; 75.

Siehe auch 1370; 3097; 3114—18; 3668.

### Technologie.

2586. *T. Oliver*. The diameters of twisted threads. P.R.S.E. 25. 481.

2587. *T. Oliver*. The relation between take-up or contraction and degree of twist in twisted threads. P.R.S.E. 26. 182.

Siehe auch 659; 2782—86; 3314; 3420; 3447; 3633.

### Instrumentenkunde.

2588. *V. V. Lermantov*. Pribor Giksa dlja ujasnenija na opyte principa sochranenija količestva dviženija (Apparat des Herrn Hicks zur Erklärung des Prinzips der Erhaltung der Bewegungsgröße). J.R.P.C.G. 34. 367.

2589. *W. Zurhellen*. Die Untersuchung der Mikrometerschrauben in der Praxis. A.N K. 172. 1.

2590. *Vanderpol*. Nouveau dispositif électromécanique d'embrayage et de changement de vitesse. M.S.L. (8) 2. B. 99.

Siehe auch 297—99; 305; 308; 415; 575; 2874.

### Rotationsmaschine.

Siehe 405.

### Wagen.

2591. *D. van Gulik*. Zur Bestimmung des Verhältnisses der Wagenarme. Z.P. 19. 102.

2592. *M. Marek*. Aperiodische Wage mit Hilfsfedern. Ö.Z.Z.O.M. 1. 5.

Siehe auch 3631.

### Akustische Instrumente.

2593. *L. Jacobson* und *W. Cowl*. Über die Darstellung und Messung der Schwingungsamplituden ausklingender Stimmgabel mit Hilfe der Linearkinematographie. A.A.P.L. 1903 I 1.

2594. *A. Stefanini*. Acumetro telefonico a solenoide neutro. N.C.P. (5) 10. 65.

2595. *H. Bouasse*. Les gammes musicales au point de vue des physiciens. R.G.O. 17. 177.

Siehe auch 936; 938; 940.

### Optische Instrumente.

2596. *F. Biske*. Katoptrisches Okular. Z.S. 52. 425.

2597. *P. Lambert*. Dispositif permettant de mettre simultanément plusieurs prismes au minimum de déviation. C.R. 142. 1509.

**2598.** *A. v. Reuß.* Über Brillen. S.V. N.W. 46. 171.

**2599.** *A. Larsen.* Das Aktinoskop. M.F.L. 2. 108.

Siehe auch 959; 972; 1058—59; 1076; 1154; 3535; 3564—65.

### Stereoskop.

**2600.** *H. G. Fourcade.* On instruments for stereoscopic surveying. R.B.A. 75. 321.

**2601.** *M. Loehr.* Die Ausdehnung des stereoskopischen Bildes und seine sinngemäße Einrahmung im Stereoskop. J.P.R. 19. 65.

**2602.** *A. Elschnig.* Über monoculare Stereoskopie und direkte stereoskopische Projektion. J.P.R. 19. 108.

Siehe auch 1162; 1822.

### Mikroskopie.

**2603.** *U. Behn* und *W. Heuse.* Zur Demonstration der Abbe'schen Theorie des Mikroskops. V.D.P.G. 8. 283.

**2604.** *A. Winkelmann.* Zur Demonstration der Abbe'schen Theorie des Mikroskops. A.P.L. (4) 19. 116.

**2605.** *L. Malassez.* Évaluation du pouvoir grossissant des objectifs microscopiques. C.R. 141. 1004.

**2606.** *L. Malassez.* Évaluation de la puissance des objectifs microscopiques. C.R. 142. 773.

**2607.** *L. Malassez.* Évaluation des distances foco-faciales des objectifs microscopiques. C.R. 142. 926.

**2608.** *A. Gemelli.* Le particelle ultramicroscopiche. R.F.M. 6. B. 397.

Siehe auch 1054.

### Spektroskop.

**2609.** *A. Schuster.* The optics of the spectroscope. A.J.C. 21. 197.

**2610.** *H. Morris-Airey.* On the resolving power of spectroscopes. P.M. (6) 11. 414.

Siehe auch 1850; 3568—69.

### Photometer.

**2611.** *P. Süß.* Über die Ermittlung bez. Messung der Helligkeit auf Arbeitsplätzen. A.Z.B. 18. 26.

**2612.** *A. Larsen.* Ein Photometer für chemisch wirksames Licht. M.F.L. 2. 112.

Siehe auch 3571—75.

### Thermische Instrumente.

Siehe 1343.

### Thermometer.

**2613.** *M. W. Travers* und *A. G. C. Gwyer.* Der Vergleich des Platinthermometers mit dem Normalthermometer zwischen 444° und − 190° C., und Beobachtungen über konstante Temperaturen unterhalb des Schmelzpunktes des Eises. Z.P.C. 52. 437.

Siehe auch 3732.

### Pyrometer.

**2614.** *W. Nernst.* Über die Helligkeit glühender, schwarzer Körper und über ein einfaches Pyrometer. P.Z. 7. 380.

### Bolometer.

Siehe 3102.

### Elektrische Instrumente.

**2615.** *L. W. Austin.* Detector for very small alternating currents and electrical waves. B.B.S.W. 1. 435.

**2616.** *U. Martini.* Un modelo dinamico per le esperienze di Henry. N.C.P. (5) 11. 227.

**2617.** *Devoux-Charbornel.* Emploi de l'électro-diapason comme générateur de courants alternatifs. C.R. 142. 953.

Siehe auch 1416; 1433; 1437; 1465; 1519; 3145—48.

### Elektrisiermaschine.

**2618.** *J. Januškevič.* O nekotorych javlenijach nabljudaemych meždu poliusami staličeskoj električeskoj mašiny (Über einige Erscheinungen, welche zwischen den Polen einer elektrostatischen Maschine beobachtet werden). E.P. 23. 201.

### Volta'sche Säule.

**2619.** *P. A. Zilov.* Mechanism voltova stolba (Mechanismus der Volta'schen Säule). R.P.W. 3. 271.

### Galvanische Elemente.

**2620.** *A. Reuterdahl.* Electric storage batteries. C.M.N.Y. 21. 489.

**2621.** *F. Haber* und *A. Moser.* Das Generatorgas- und das Kolbenelement. Z.E. 11. 593.

2622. *M. Wildermann*. Sur les piles actionnées par la lumière. J.C.P. 4. 10.

2623. *M. Wildermann*. Vorläufige Mitteilung über die durch Lichtwirkung erzeugten galvanischen Elemente. Z. B.C. 52. 209.

Siehe auch 1371; 3119—21; 3500; 3506.

### Kommutatoren.

Siehe 3122—30.

### Transformatoren.

2624. *L. Donati*. Diagramma generale per trasformatori a corrente alternativa e motori asincroni polifasi. M. I.B. (6) 2. 269.

2625. *A. G. Hansard*. Transformers in parallel. E.T.L. 21. 86.

2626. *Mackeen*. The multiple operation of transformers. E.R.N.Y. 47. 858.

2627. *Sammett*. Operation of transformers at varying frequencies and voltages. E.R.N.Y. 47. 48.

2628. *Bogen*. Rotary converters and motor generators. W.E. 37. 52.

2629. *W. C. Clinton*. Note on the voltage ratio of an inverted rotary converter. P.M. (6) 10. 160.

Siehe auch 3131—40; 3501.

### Akkumulatoren.

2630. *Jumau*. État actuel de l'industrie des accumulateurs. B.S.F.P. 1905. 181.

2631. *U. Schoop*. Sur la répartition du courant dans les accumulateurs. S. F.P. 245—47. 22.

Siehe auch 3141—44.

### Elektrische Meßinstrumente.

2632. *H. Bohn*. Geschichtliche Entwicklung des Elektroskops. Z.L.L. 2. 130.

2633. *G. Lippmann*. Sur une méthode permanente de déterminer la constante d'un électrodynamomètre absolu à l'aide d'un phénomène d'induction. C.R. 142. 69.

2634. *W. E. Sumpner*. The theory of phasemeters. P.P.S.L. 20. 1; P.M. (6) 11. 81.

2635. *E. B. Rosa*. Wattmeter methods of measuring power expended upon condensers and circuits of low power factor. B.B.S.W. 1. 383.

2636. *A. de Forest Palmer*. An inductance and capacity bridge. P.R. 23. 55.

Siehe auch 1435; 3150—61.

### Elektrometer.

2637. *H. Fischer*. Über die elektrostatischen Spannungszeiger. Eine experimentelle Untersuchung über den Einfluß der Lade- und Entladezeit auf die Angaben der Elektrometer. P.Z. 7. 376.

2638. *A. Kleiner*. Über Elektrometer von hoher Empfindlichkeit. V.N.Z. 51. 226

2639. *H. Benndorf*. Über ein mechanisch registrierendes Elektrometer für luftelektrische Messungen. P.Z. 7. 98.

### Galvanometer.

2640. *P. O. Peirce*. On the correction for the effect of the counter electromotive force induced in a moving coil galvanometer when the instrument is used ballistically. P.A.Bo. 42. 161.

2641. *W. Einthoven*. Sur le galvanomètre à corde. A.N. (2) 10. 414.

2642. *H. Abraham*. Galvanomètre à cadre mobile pour courants alternatifs. C.R. 142. 993; J.P. (4) 5. 576; S.F.P. 245—47. 17.

2643. *B. O. Peirce*. A simple device for measuring the deflections of a mirror galvanometer. P.A.Bo. 42. 173.

2644. *A. W. Smith*. Damping of a ballistic galvanometer. P.R. 22. 250.

2645. *G. Gaillard*. Galvanomètre optique à indications lumineuses et pouvant servir à l'enregistrement photographique. S.F.P. 248. 4.

Siehe auch 591; 1429; 1689.

### Magnetische Instrumente.

2646. *A. H. Peake*. A novel instrument for illustrating the magnetic properties of Fe. P.C.P.S. 13. 250.

Siehe auch 1690; 2664.

### Induktorien.

2647. *Jouve*. Nouvel interrupteur utilisé pour la détermination de la conductance par la méthode de Kohlrausch. E. P. 29. 59.

2648. *Fomm*. Betrieb von Induktorien. B.I.G.B. 1905. 393.

Siehe auch 1693.

### Kompaß.

2649. *H. Meldau*. Die magnetische Wirkung stromdurchflossener ebener Flächen und die Einwirkung der durch den eisernen Schiffskörper fließenden Ströme auf das Kompaßfeld. A.H. 34. 247.

**2650.** *C. Arldt.* Die magnetische Wirkung der durch den eisernen Schiffskörper fließenden elektrischen Ströme auf das Kompaßfeld. A.H. 34. 343.

**2651.** *J. J. Thaudin-Chabot.* Über den Ersatz des Schiffskompasses. D.V.N. 77. 64.

**2652.** *L. Mars.* Wenken by het zich voordoen von groote plotselinge kompasstoringen. D.Z.R. 27. 415.

**2653.** *H. Meldau.* Über das neue Modell des Fluidkompasses. A.H. 34. 27.

**2654.** *M. H. Anderson.* A method of obtaining the deviation of a compass in a fog. N.M.L. 74. 624.

**2655.** *F. Lauffer.* Über den Zweck der Deviationskoeffizienten. A.H. 34. 182.

**2656.** *O. Martienssen.* Die Verwendbarkeit des Rotationskompasses als Ersatz des magnetischen Kompasses. P.Z. 7. 535; A.K. 34. 56.

**2657.** *F. Lauffer.* Ermittlung der Deviationskonstanten auf graphischem Wege. M.A.G.S. 33. 223.

**2658.** *H. Meldau.* Über die Berechnung der Koeffizienten der Deviationsformel aus gegebenen Betrachtungen. A.H. 33. 471.

**2659.** *S. Mars.* Über die Anwendung der Flinderstangen bei der Kompensation der Kompasse. A.H. 34. 331.

Siehe auch 1643—44; 1933.

### Astronomische Instrumente.

**2660.** *Forman.* Méthode d'essai des objectifs astronomiques. B.S.A.F. 19. 408; 500; 542.

**2661.** *A. E. Conrady.* On the spherical correction of object glasses. M.N.A.S. 65. 594.

**2662.** *A. E. Conrady.* The optical sine-condition. M.N.A.S. 65. 501.

**2663.** *H. Renan.* Résultats obtenus pour la détermination de 2 constantes instrumentales qui interviennent dans certaines observations méridiennes. C.R. 143. 274.

**2664.** *A. Bergot.* Collimateur magnétique permettant de transformer une jumelle en instrument de relèvement. C.R. 142. 1143.

**2665.** *E. Schaer.* Note préliminaire sur un nouvel objectif astrophotographique à très-court foyer. A.N.K. 171. 315.

**2666.** *E. Kohlschütter.* Über die neuere Entwicklung der nautischen Instrumente. D.M.Z. 1906. 61; 73.

**2667.** *E. Perrin.* Nouveau modèle de navisphère. A.H.G. 25. 39.

**2668.** *A. Claude* et *L. Driencourt.* L'instrument des hauteurs égales en astronomie de position ou astrolabe à prisme. R.G.O. 16. 1071.

**2669.** *Simonin.* Réglage photographique du célostat. B.A. 23. 291.

**2670.** *B. Wanach.* Untersuchung einiger Radunterbrecher. A.N.K. 172. 145.

Siehe auch 1910.

### Fernrohr.

**2671.** *A. Hanskij.* Izsledovanie 30-tidjujmovago obektiv Pulkovskoj observatorii po sposobu Hortmanna (Untersuchung über das 30-zöllige Objektiv der Sternwarte Pulkowa nach der Methode von Hartmann). A.P.B. (5) 20. 77.

**2672.** *A. Mullendorf.* Les lunettes nouvelles à prismes. A.T.I.L. 1906. 134.

**2673.** *H. C. Vogel.* Über Spiegelteleskope mit relativ kurzer Brennweite. S.A.B. 1906. 332.

**2674.** *P. Bruck.* Rotations simultanées des 2 cercles d'une lunette méridienne. B.A. 23. 91.

**2675.** *J. Gasca.* Images hyperboliques. Nouvelle théorie de la lunette de Galilée. M.y R.M. 22. 187.

**2676.** *E. Haudié.* Détermination au moyen d'un appareil photographique, du grossissement et du champ des lunettes galiléiques ou astronomiques. B.S.F.P. 1905. 425.

**2677.** *Gemeiner.* Über die Reliefwirkung der Doppelfernrohre. M.A.G. 1905. 773.

**2678.** *G. Millochau.* Sur un dispositif optique généralisant l'emploi du télescope de $1^{m}$ de diamètre de l'observatoire de Meudon. C.R. 143. 33.

### Heliometer.

**2679.** *Franz.* Über die Bedeutung des Heliometers. J.S.G. 83. E. 1.

**2680.** *M. Stefánik.* Héliomètre à réflexion. C.R. 143. 106.

**2681.** *Przybyllok.* Über die Quereinstellungen des Heliometers. J.S.G. 83 E. 1.

Siehe auch 1852.

### Uhrmacherkunst.

**2682.** *H. Cunynghame.* Measuring time: ancient and modern methods. E.M.W. 80. 495; 518.

**2683.** *D. J. Korteweg.* Huygens sympathische uurwerken en verwante verschijnselen in verband met de principale en de samengestelde slingeringen

# ZEITSCHRIFT
# FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

---

## ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

---

GEGENWÄRTIG
UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND C. RUNGE IN GÖTTINGEN.

---

55. BAND. 1/2. HEFT.

MIT 52 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 10. Oktober 1907.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

# ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart-Degerloch

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

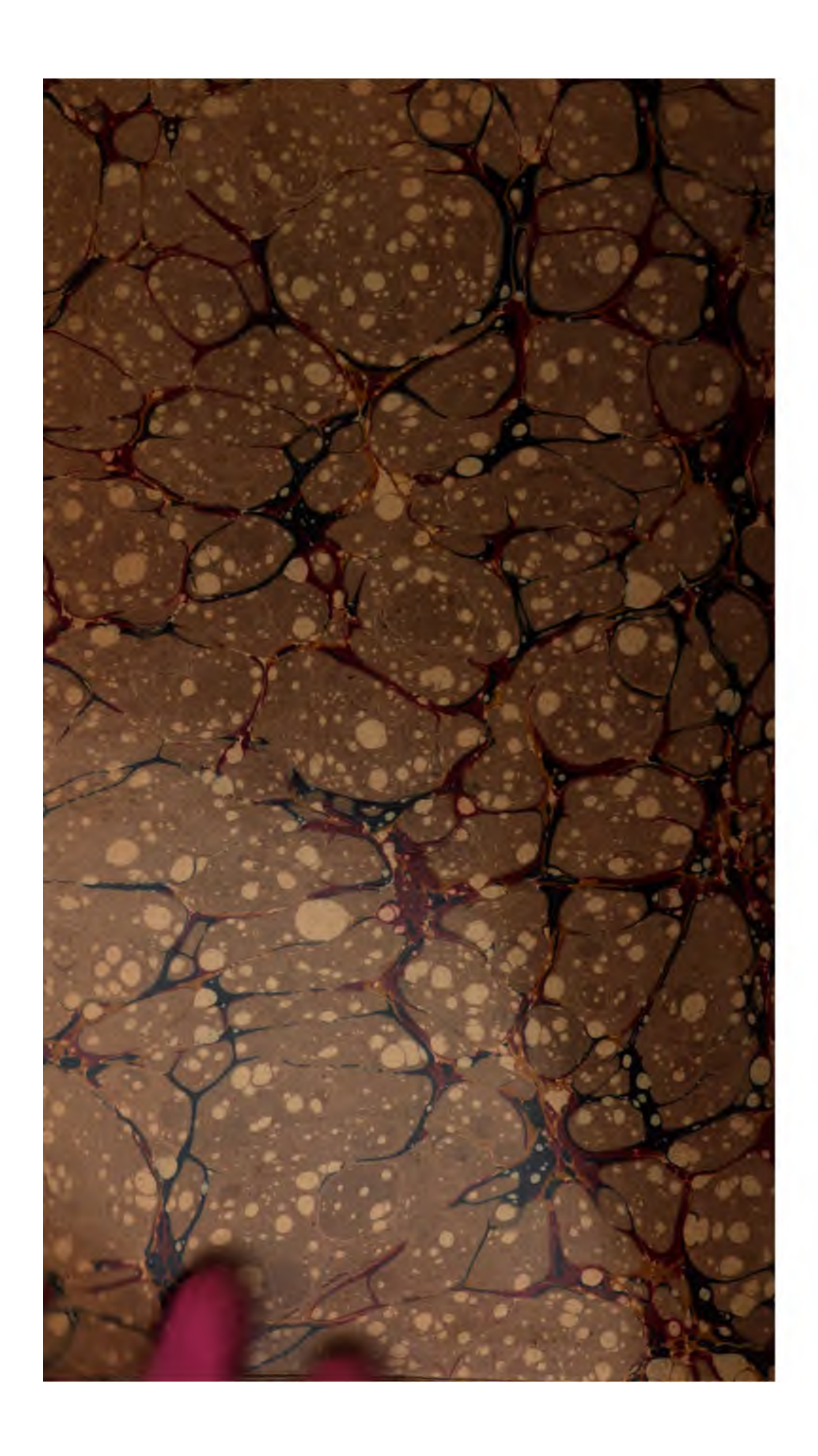

## INHALT DES VORLIEGENDEN DOPPELHEFTES.

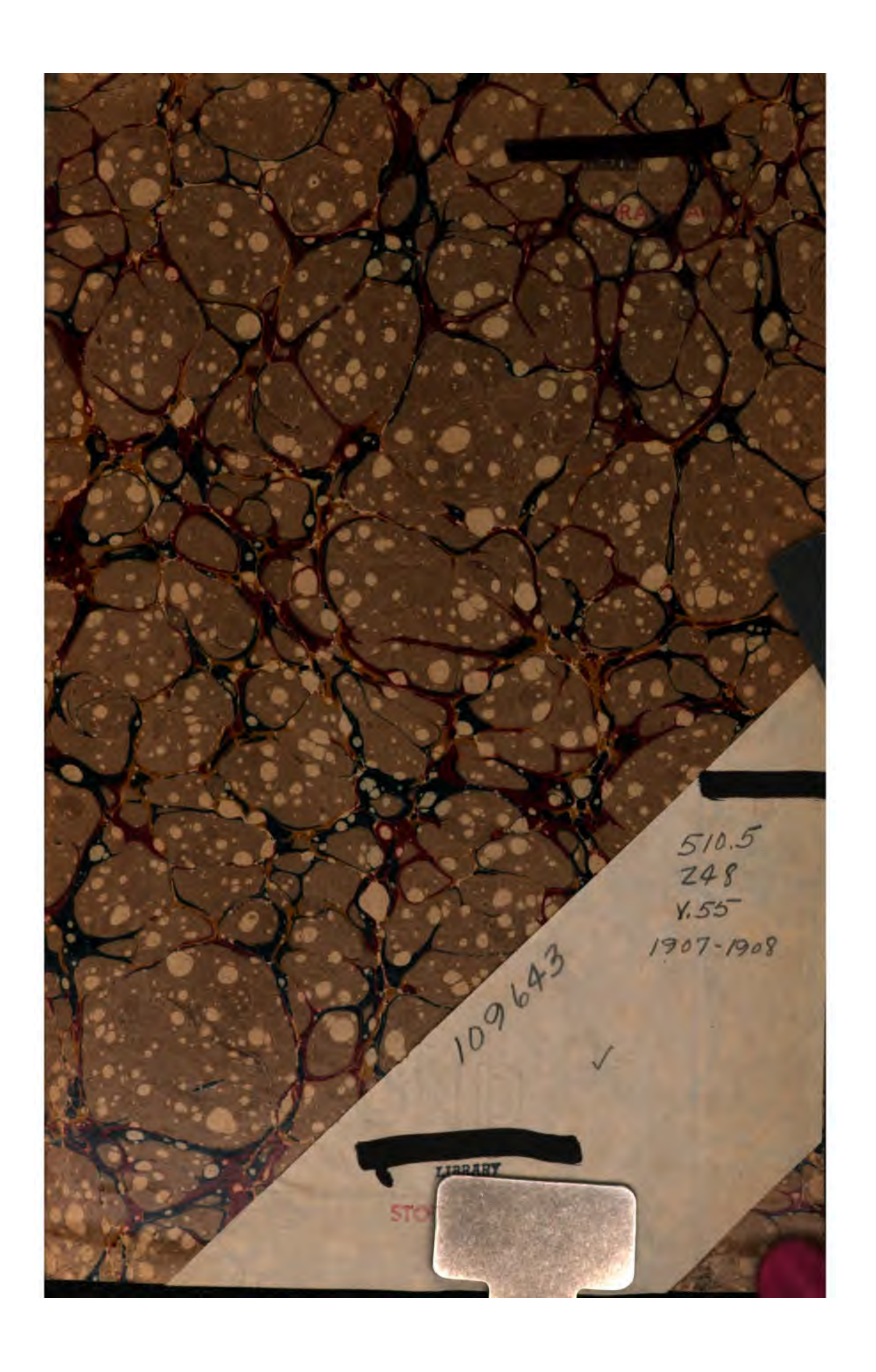


[Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.]

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

**O. Bergmann, H. Blasius, J. Boyke, H. Distelli, K. Doehlemann, A. Egerer, H. Einhorn, A. Francke, P. Fröhlich, K. Fuchs, v. Gleich, R. Greiner, A. Grünwald, A. Härpfer, K. Heun, A. Jatho, K. Kreul, R. Mehmke, B. Meidell, O. Meißner, R. v. Mises, E. Müller, F. Nußbaum, A. v. Obermayer, C. Runge, W. Scheufele, Fr. Schilling, J. Schnöckel, Fr. Schur, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, E. Stübler, J. Thieme, H. Tolle, Th. Vahlen, P. Werkmeister, K. Wieghardt, A. Willers, C. W. Wirtz, E. Wölffing.**




510.5
Z48
V.55
1907-1908
109643
LIBRARY

